RA-007

双対解を用いた提携構造付きコアの非空判定アルゴリズムの高速化

岩崎 敦* 上田 俊* 横尾 真*
Atsushi Iwasaki Suguru Ueda Makoto Yokoo

1 序論

協力ゲーム理論は，利己的に行動するエージェント間で拘束力がある合意が可能な場合のエージェントの振る舞いに関する理論である．近年，協力ゲーム理論はマルチエージェントシステムの基礎理論として注目を集めており，計算機科学分野の研究者による研究が盛んとなっている [5, 10, 23]．伝統的な協力ゲーム理論では，任意の提携が実現可能であり，かつ特性関数は優加法性を満たすものとされている．優加法的な特性関数では，2 つの提携が合併して 1 つの提携となったとき，その提携の利得は少なくとも元の 2 つの提携の利得の和以上であることが保証される．しかしながら，実際には大きな提携を組織するために，通信コスト等の調整のためのオーバヘッドが必要となる．また，大きな提携内で行動を調整するための通信やプランニングのための十分な時間がない場合には，大きな提携で行動するよりも，より小さい提携に分かれて行動した方が良い場合も考えられる．

さらに，現実には実現可能な提携に対して，なんらかの制約が課せられることもある．例えば，多くの国において独占禁止法により，ある市場全体を支配可能な企業同士の提携 (カルテル) の形成が禁止されている．また，実現可能な提携の大きさに対して制約が課せられることもある．さらに，エージェント間の通信が制限されており，特定のエージェント間のみで通信が可能な場合も存在する．このような場合には，互いに通信可能なエージェント間でのみ，意味のある提携が形成できると考えられる．実際，そのような実現可能な提携に制約を与えた場合の研究がいくつか存在する [13, 21, 16, 12]．

全体提携 (すべてのエージェントを含む一つの提携) が制約によって形成できない場合，もしくは全体提携が最適でない場合は，エージェントは複数の小さい提携に分かれて行動する．すなわち，エージェントは提携構造を形成することになる．提携構造形成問題は，全体としての利得の合計が最大化されるような提携構造を求める問題である [19, 15, 3, 9, 17, 18]．さらに，提携構造が安定であるためには，提携構造によって得られた利得を，どのようにエージェント間で配分を行うかに関して，エージェント間で合意が得られている必要がある．伝統的な協力ゲーム理論では，特性関数が優加法的である場合の望ましい利得の配分方法 (解概念) が複数提案されており，代表的な解概念としてコア [8, 22] がある．コアはエージェントが提携構造を形成する場合にも拡張できる [2].

コアの非空性判定問題は，実現可能な提携の数を制限したとしても NP 完全であることが知られている [6]．したがって，本論文では，最悪時の計算量が実現可能な提携の数に対して指数的となることは許容し，既存のアルゴリズムと比較して，平均的な実行時間が短いアルゴリズムの開発を目標とする．既存のアルゴリズム（以後 $CoreP$ と呼ぶ） は，整数計画問題 (integer program, IP) を解くことで，最適な提携構造の利得を求める．本論文は，$CoreP$ の IP を線形緩和した問題の双対問題を利用した，$CoreD$ と呼ばれるアルゴリズムを提案する．さらに，提案アルゴリズムと既存アルゴリズムの実行時間を実験的に評価する．問題のインスタンスのコアが空である場合，提案手法である $CoreD$ は $CoreP$ よりも，はるかに高速にコアの非空性判定が可能であり，コアが非空の場合，$CoreD$ と $CoreP$ の実行時間は同程度であることが示される．

コアは非空となることが一般には保証されないため，コアの性質を緩和した様々な解概念が提案されている．本論文では，弱 ε コア $^+$ と呼ばれる新たな解概念を提案する．この解概念の特徴は，コアを特徴付ける 2 つの条件である，提携合理性と全体合理性と呼ばれる 2 つの条件の双方を，パラメータ ε を用いて緩和している点である．さらに，$CoreD$ と類似のアイデアを用いて，$ECore^+(\varepsilon)$ と呼ばれる弱 ε コア $^+$ の非空性判定を行うアルゴリズムを提案する．

本論文は以下のように構成される．まず，本論文で扱う協力ゲームを定式化する（2 章）．次にコアの非空性判定における既存アルゴリズム $CoreP$ を概説し，提案アルゴリズム $CoreD$ を提案する (3 章)．さらに，$CoreD$ を利用した新しい解概念である弱 ε コア $^+$ とその非空性判定アルゴリズム $ECore^+(\varepsilon)$ を提案する (4 章)．その後，計算機実験を用いて各アルゴリズムの性能を検証（5 章）し，先行研究との関係を議論する（6 章）．最後に結論を述べる（7 章）．

2 モデル

本章では実現可能な提携に制約が存在する協力ゲームを定式化する．基本的には文献 [16] の *locally constrained coalition formation game* と等価なモデルになっている．参加するすべてのエージェントの集合を A とし，$|A| = n$ とする．特性関数 $v : 2^A \to \mathbb{R}$ は，任意の提携 $S \subseteq A$ に関して，提携 S に含まれるエージェントが協力した結果得られる利得 $v(S)$ を与える．また，一般性を失うことなく，$v(\emptyset) = 0$ とする．

特性関数の代表的な性質に優加法性がある．$S_i \cap S_j = \emptyset$ を

* 九州大学大学院システム情報科学府

満たす任意の提携 S_i, S_j について，$v(S_i)+v(S_j) \leq v(S_i \cup S_j)$ が成り立つような特性関数を，優加法性を満たす，または優加法的な特性関数という．

次に，実現可能な提携の集合を $AC \subseteq 2^A$ とする．提携 S が AC に含まれてなければ，$v(S)$ は $-\infty$ とする．本論文では，v が優加法的であることを前提としない．仮に元の v が優加法的であっても，AC を考慮した特性関数は優加法的とはならない．本論文では，AC の要素数は比較的小さいことを仮定する．

定義 1 (提携構造)**.** 提携構造 $CS^S = \{S_1, S_2, \ldots\}$ とは，以下の条件を満たすような，エージェントの集合 $S \subseteq A$ の分割である．

- $\forall i, S_i \in AC,$
- $\forall i, j\ (i \neq j),\ S_i \cap S_j = \emptyset,$
- $\bigcup_{S_i \in CS^S} S_i = S.$

提携構造 CS^S の存在を保証するため，各エージェント $i \in A$ による単独提携 $\{i\}$ は AC に必ず含まれているとする．

定義 2 (提携構造のもたらす利得)**.** ある提携構造 CS^S のもたらす利得 $V(CS^S)$ は，CS^S に含まれるすべての提携の利得の和，すなわち $V(CS^S) = \sum_{S_i \in CS^S} v(S_i)$ である．

定義 3 (最適な提携構造)**.** 最適な提携構造 CS^* は，以下の条件を満たす，すべてのエージェント A の提携構造である．

- $\forall CS^A, V(CS^*) \geq V(CS^A).$

例 1. 4 人のエージェント a, b, c, d による協力ゲームにおいて，以下のように特性関数が与えられているとする．

$$
\begin{array}{lll}
v(\{a\}) = 3, & v(\{b\}) = 3, & v(\{c\}) = 2, \\
v(\{d\}) = 2, & v(\{a,b\}) = 6, & v(\{a,c\}) = 5, \\
v(\{a,d\}) = 5, & v(\{b,c\}) = 5, & v(\{b,d\}) = 5, \\
v(\{c,d\}) = 2, & v(\{a,b,c\}) = 8, & v(\{a,b,d\}) = 8, \\
v(\{a,c,d\}) = 5, & v(\{b,c,d\}) = 5, & v(\{a,b,c,d\}) = 5.
\end{array}
$$

このとき，最適な提携構造 CS^* は $\{\{a,b,c\},\{d\}\}, \{\{a,b,d\},\{c\}\}$ 等があり，その利得は $V(CS^*) = 10$ である．

提携構造が安定であるためには，提携構造によって得られた利得をどのようにエージェント間で配分するかに関して，エージェント間で合意が得られている必要がある．伝統的な協力ゲーム理論では，特性関数が優加法的である場合の望ましい利得の配分方法 (解概念) が複数提案されており，代表的な解概念としてコア [8, 22] がある．コアはエージェントが提携構造を形成する場合にも拡張できる [2]．各エージェントが受け取る利得を，利得ベクトル $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $\forall i, y_i \geq 0$ で表す．y_i がエージェント i の受け取る利得を表す．

定義 4 (提携構造付きコア)**.** 提携構造 CS^A において，次の条件を満たす利得ベクトル y の集合を提携構造付きコアという．

- $\forall S \in AC, \sum_{i \in S} y_i \geq v(S)$（提携合理性），
- $\sum_{i \in A} y_i = V(CS^A)$（全体合理性）．

ここで提携合理性とは，提携 S に属するすべてのエージェントの利得の和が，提携 S にとって実現可能な総利得以上であることである．提携 S に関して提携合理性が満足されない場合，S に属するエージェントは，現在の提携構造から逸脱して，独立した提携を形成する誘因を持つ．全体合理性は，全員で得た利得がもれなく配分されることを意味する．

例 2. 例 1 の協力ゲームの提携構造付きコアは非空であり，例えば利得ベクトル $y = (3, 3, 2, 2)$ はコアに属する．

文献 [2] は，提携構造が最適な提携構造 CS^* でない場合，提携構造付きコアが必ず空になることを示している．また，提携合理性により，提携構造付きコアにおいては，最適な提携構造に含まれる提携の間での利得の譲渡は生じない．したがって，本論文では，最適な提携構造 CS^* に対する提携構造付きコアを見つけることを目的とする．

定義 4 は，AC に属する提携に関してのみ，提携合理性の条件，すなわち，提携が逸脱する誘因がないことを保証している．しかしながら，AC に含まれないエージェントの集合 S が提携構造 CS^S を作って逸脱することも考えられる．もし，$V(CS^S)$ が，S に配分された利得の合計 $\sum_{i \in S} y_i$ より大きければ，S は逸脱する誘因を持つ．しかしながら，文献 [6] は，AC に属する提携に関して提携合理性が成立すれば，このような状況は起こり得ないことを示している．すなわち，次の定理が成立する．

定理 1 (Conitzer and Sandholm (2006))**.** 利得ベクトル y が，任意の提携 $S \in AC$ において，$\sum_{i \in S} y_i \geq v(S)$ なる条件を満たす場合，AC に属さない任意の提携 $S' \subseteq A$ に関して，$\sum_{i \in S'} y_i \geq V(CS^{S'})$ が成立する．ここで $CS^{S'}$ とは S' に対する任意の提携構造である．

3 コアの非空性判定問題

3.1 既存アルゴリズム

本節では，既存のコアの非空性判定アルゴリズムである $CoreP$ を概説する．$CoreP$ はまず，以下の IP を解くことにより，最適な提携構造の利得 $V(CS^*)$ を求める [6]．

定義 5 (IP-PRIMAL: 最適な提携構造の利得を求める IP)**.**

$$
\begin{array}{ll}
\text{max} & \sum_{S_j \in AC} x_j \cdot v(S_j), \\
\text{subject to} & \sum_{j \mid i \in S_j \in AC} x_j \leq 1,\ \forall i, \\
& x_j \in \{0, 1\},\ \forall j.
\end{array}
$$

x_j は決定変数であり，提携 S_j が最適な提携構造 CS^* に属する場合，x_j の値は 1 とし，さもなければ，x_j の値は 0 とする．実現可能な提携の集合 AC のサイズが大きくなると，CPLEX などの高速な最適化ソフトウェアパッケージを用いても，最適解を現実的な時間で求めることは困難となる．

次に，以下の線形計画問題 (linear program, LP) により，コ

アに属する利得ベクトルを求める．

定義 6 (LP-CNE: コアの非空性判定の LP)**.**

$$\begin{array}{ll} \text{find} & y, \\ \text{subject to} & \sum_{i \in A} y_i = V(CS^*), \\ & \sum_{i \in S_j} y_i \geq v(S_j),\ \forall S_j \in AC, \\ & y_i \geq 0,\ \forall\, i. \end{array}$$

アルゴリズム $CoreP$（コアが非空のときはコアに属する利得ベクトルを 1 つ返す）は以下のように定義される．

定義 7 (アルゴリズム $CoreP$)**.**

1. *IP-PRIMAL* を解き，最適な提携構造の利得 $V(CS^*)$ を得る．
2. *LP-CNE* を解き，全体合理性と提携合理性を満たす利得ベクトル y が存在するか否かを判定する．
3. 上記を満たす y が存在する場合，y をコアに属する利得ベクトルとして返す．そうでない場合，コアは空であると判定する．

3.2 提案アルゴリズム

本節では，提案アルゴリズムである $CoreD$ を導入する．そのためにまず，IP-PRIMAL を線形緩和した問題とその双対問題を考える．

定義 8 (LP-PRIMAL: IP-PRIMAL の線形緩和)**.**

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{S_j \in AC} x_j \cdot v(S_j), \\ \text{subject to} & \sum_{j | i \in S_j \in AC} x_j \leq 1,\ \forall\, i, \\ & 0 \leq x_j,\ \forall\, j. \end{array}$$

定義 9 (LP-DUAL: 双対問題)**.**

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{i \in A} y_i, \\ \text{subject to} & \sum_{i \in S_j} y_i \geq v(S_j),\ \forall S_j \in AC, \\ & y_i \geq 0,\ \forall\, i. \end{array}$$

後で述べるように，提案アルゴリズム $CoreD$ はこの双対問題を利用している．この双対問題を利用する類似のアイデアは，組合せオークションにおける勝者決定問題の近似解を求めるためにも利用されている [14].

定義 10 (アルゴリズム $CoreD$)**.**

1. *LP-DUAL* を解き，y^* と $V^* = \sum_{i \in A} y_i^*$ を得る．
2. *IP-EFF* を解き，y^* が全体合理性を満たすか否かを確認する．
3. y^* が全体合理性を満たす場合，y^* をコアに属する利得ベクトルとして返す．そうでない場合，コアは空であると判定する．

定義 11 (IP-EFF：全体合理性を判定する IP)**.**

$$\begin{array}{ll} \text{find} & x, \\ \text{subject to} & \sum_{S_j \in AC} x_j \cdot v(S_j) = V^*, \\ & \sum_{j | i \in S_j \in AC} x_j \leq 1,\ \forall\, i, \\ & x_j \in \{0, 1\},\ \forall\, j. \end{array}$$

この問題は，最適な提携構造の利得 $V(CS^*)$ が V^* と等しいか否かを判定する．コアが空の場合，V^* と $V(CS^*)$ の差は *cost of stability* と呼ばれ，提携構造を安定にするために必要な，外部から与えられる補助金の額を表す [4].

定理 2. 定義 10 のアルゴリズム $CoreD$ は正しい結果を返す．すなわち，y^* が返ってきた場合，y^* はコアに属し，アルゴリズムがコアは空であると判断した場合，コアは空である．

証明. $CoreD$ が y^* を返した場合，定義 9 より，y^* はすべての提携 $S \in AC$ において提携合理性を満たす．また，定義 11 より，y^* は全体合理性も満たす．従って，y^* はコアに属する．

$CoreD$ がコアは空であると判断した場合，IP-EFF は解を持たない．ここで, LP-PRIMAL の最適解を $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots)$ とし, LP-DUAL の最適解を $y^* = (y_1^*, \ldots, y_n^*)$ とする．双対原理より，これらの問題の最適値は等しい，つまり，$\sum_{S_j \in AC} x_j^* \cdot v(S_j) = \sum_{i \in A} y_i^* = V^*$ でなければならない．また，LP-PRIMAL は IP-PRIMAL の線形緩和であるため，IP-PRIMAL の最適値が V^* より大きくなることはありえない．

ここで，y^* は提携合理性を満たす（一方で，全体合理性は満たさなくてもよい）利得ベクトルであり，その各要素の和は最小化される．このとき，さらに IP-EFF が解を持たなければ，IP-PRIMAL は値が V^* 以上の解をもたない．したがって，提携合理性と全体合理性を同時に満たす利得ベクトルは存在しない．以上より，コアは空となる． □

$CoreD$ は，先に LP-DUAL（最適化問題）を解き，次に IP-EFF（決定問題）を解く．一方で, $CoreP$ は，まず IP-PRIMAL（最適化問題）を解き，次に LP-CNE（決定問題）を解く．このため，コアが非空の場合は，これらのアルゴリズムの性能はほぼ等しいと予想される．しかし，コアが空の場合，特に $V(CS^*)$ が V^* より非常に小さい場合，IP-PRIMAL により最適解を求めるコストは，IP-EFF で単純に $V(CS^*)$ と V^* が等しいかを判定するコストよりも大きいことが予想される．本論文では，5 章に示す計算実験により，これらの予想が正しいことを確認する．

4 弱 ε コア $^+$

コアは非空となることが一般に保証されないため，コアの性質を緩和した様々な解概念が提案されている．特に，弱 ε コアは，ε を用いて提携合理性の条件を緩和した代表的な解概念である [20].

本論文ではまず，弱 ε コアを，エージェントが提携構造を形成する場合に拡張する．また例えば，文献 [1] のように他の解概念，ここではカーネル [7] も提携構造を形成する場合に拡張できる．一方，本論文では，$CoreD$ と類似のアイデアを適用可能とするため，コアに基づく解概念のみを対象とする．一般に，エージェントが提携構造を構成する場合に実現可能な利得ベクトルを定義する際に，提携構造における異なる提携間で利得の譲渡が可能か否かが問題となる．当然，実現可能

な利得ベクトルの空間は，提携間で利得の譲渡が可能な場合の方が，譲渡不可能な場合より大きくなる．通常のコアの場合は提携合理性より，提携間で利得の譲渡が生じるような利得ベクトルはコアに属さないため，上記の違いは問題とならないが，提携合理性の条件を緩和した場合には，上記の違いを考慮する必要性が生じる．

各提携が異なる企業ではなく，ある企業内の部門等であれば，提携間での利得の譲渡の存在を仮定することは自然であり，提携間での利得の譲渡により提携を安定にすることが可能となる．例えば，ある会社の各部門を担当するマネージャを決定することを考えよう．ここで，どの部門に割り当てても，他のどのマネージャと同程度の成果を上げる有能なマネージャ a がいると仮定する．また，a はある不採算部門の赤字を減らすことができる唯一のマネージャであるとする．この場合，a を不採算部門に割り当てることで会社の利益の合計は最大化できる．この場合，担当部門が赤字であることを理由に a にボーナスを与えないとすると，a は不満を持つことが予想される．提携間での利得の譲渡により，a の不満を解消することが可能になる．

提携間で利得の譲渡が不可能な場合に適切な提携構造と利得の配分を求める問題は，提携間で利得の譲渡が可能な場合と比較して，より複雑となる．この話題に関しては 6.3 節で改めて議論する．

以下，平均不満と弱 ε コアを定義する．

定義 12 (平均不満)**.** ある提携 S と利得ベクトル y が与えられたとき，提携 S が持つ平均不満 $d(y,S)$ は以下で与えられる．

$$d(y,S) = \frac{v(S) - \sum_{i \in S} y_i}{|S|}.$$

定義 13 (弱 ε コア)**.** CS^A における弱 ε コアとは，以下の条件を満たす利得ベクトル y の集合である．

- $\forall S \in AC, d(y,S) \le \varepsilon$（緩和された提携合理性），
- $\sum_{i \in A} y_i = V(CS^A)$（全体合理性）．

この定義より，ある提携構造 CS^A における弱 ε コアが非空ならば，最適な提携構造 CS^* においても同様に非空となる．したがって，本論文では最適な提携構造 CS^* における弱 ε コアを求めることを目標とする．通常のコアと同様に，AC で記述された提携に関して緩和された提携合理性が成立すれば，任意のエージェントの集合 S に関して，S が独自の提携構造を形成して逸脱する誘因が (ε を超える範囲では) ないことが示される．すなわち，以下の定理が成り立つ．

定理 3. ある利得ベクトル y が, 任意の提携 $S \in AC$ において，$d(y,S) \le \varepsilon$ を満たすならば，AC に属さない任意の提携 S' における任意の提携構造 $CS^{S'}$ に対して，$\frac{V(CS^{S'}) - \sum_{i \in S'} y_i}{|S'|} \le \varepsilon$ が成り立つ．

証明. 提携構造 $CS^{S'} = \{S_1, \ldots, S_k\}$ の定義より，$\forall i,j\ (i \neq j)$，$S_i \cap S_j = \emptyset$，$\bigcup_{S_i \in CS^{S'}} S_i = S'$，および $V(CS^{S'}) = v(S_1) + v(S_2) + \ldots + v(S_k)$ が成立する．さらに，仮定より，すべての S_j に対して，

$$d(y,S_j) = \frac{v(S_j) - \sum_{i \in S_j} y_i}{|S_j|} \le \varepsilon$$

が成り立つ．これは $v(S_j) - \sum_{i \in S_j} y_i \le \varepsilon \cdot |S_j|$ が成り立つことを意味する．以上より，以下が導かれる．

$$\begin{aligned}
&\frac{V(CS^{S'}) - \sum_{i \in S'} y_i}{|S'|} \\
&= \frac{v(S_1) + \ldots + v(S_k) - \sum_{i \in S_1} y_i - \ldots - \sum_{i \in S_k} y_i}{|S'|} \\
&\le \frac{\varepsilon \cdot |S_1| + \ldots + \varepsilon \cdot |S_k|}{|S'|} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

他のよく知られているコアに基づく解概念に強 ε コア [20] がある．これは各提携の平均不満の代わりに，各提携の不満 ($v(S) - \sum_{i \in S} y_i$) を最小化する．強 ε コアも提携構造を考慮した形に拡張できるが，以下の例に示すように定理 3 と同様の性質は保証できない．

例 3. a,b,c,d の 4 人のエージェントと，実現可能な提携の集合 $AC = \{\{a\},\{a,b\},\{c,d\},\{a,b,c\},\{a,b,d\}\}$，および特性関数 $v(\{a\}) = 1, v(\{a,b\}) = 2, v(\{c,d\}) = v(\{a,b,c\}) = v(\{a,b,d\}) = 10$ からなる協力ゲームを考える．利得ベクトルとして $y = (0,4,4,4)$ と $y' = (1,11/3,11/3,11/3)$ を考える．すべての提携 $S \in AC$ について $v(S) - \sum_{i \in S} y_i \le 2$ が成り立ち，提携 $S' = \{c,d\}$ について $v(S') - \sum_{i \in S'} y'_i = 10 - (11/3 + 11/3) = 8/3 > 2$ が成り立つ．つまり，AC に含まれる提携のみを考慮した場合，配分 y の方がより小さい不満を持つ．しかし，AC に属さない提携 $S'' = \{a,c,d\}$ について，提携構造 $CS^{S''} = \{\{a\},\{c,d\}\}$ を考えると，y における不満は $v(S) - \sum_{i \in S''} y_i = 1 + 10 - 8 = 3$ であり，y' における不満は $v(S) - \sum_{i \in S''} y'_i = 1 + 10 - (1 + 11/3 + 11/3) = 8/3$ である．したがって，AC に属さない提携 S'' まで考慮すると配分 y' の方がより小さい不満を持つ．

弱 ε コアにおいて, 全体合理性は緩和されておらず, $V(CS^*)$ の値を計算する必要がある．弱 ε コアの非空性判定において，この $V(CS^*)$ の値の計算時間がボトルネックとなる．本論文では以下，全体合理性を緩和して $V(CS^*)$ の近似値を用いる，弱 ε コア $^+$ と呼ばれる新しい解概念を提案する．$V(CS^*)$ の近似値を用いることにより，ε の値を大きくした場合，すなわち，より誤差の大きい近似解を許容した場合に，平均的な実行時間が短縮されることが期待される．

定義 14 (弱 ε コア $^+$)**.** 弱 ε コア $^+$ とは，以下の条件を満たす利得ベクトル y の集合である．

- $\forall S \in AC, d(y,S) \le \varepsilon$ (緩和された提携合理性),
- $V(CS^*) - n \cdot \varepsilon \le \sum_{i \in A} y_i \le V(CS^*)$ (緩和された全体合理性).

ここでは，$\sum_{i\in A} y_i$ の値は $V(CS^*)$ の値より小さくなり得るように，全体合理性を緩和している．しかしながら，$V(CS^*)$ と $\sum_{i\in A} y_i$ の差は，高々 $n\cdot\varepsilon$ であることが保証される．この定義より，明らかに任意の $\varepsilon' \leq \varepsilon$ において，弱 ε コア + は弱 ε' コア + の上位集合となり，ε が正である（$\varepsilon < 0$ において，弱 ε コア + は空）限り，弱 ε コア + は弱 ε コアの上位集合となる．したがって，弱 ε コアが非空ならば，弱 ε コア + も非空となる．以下の定理は，その逆も真となることを示している．

定理 4. 弱 ε コア + が非空であれば，弱 ε コアも非空となる．

証明. 弱 ε コア + は非空であると仮定し，弱 ε コア + に含まれる利得ベクトルを y とする．$\sum_{i\in A} y_i = V(CS^*)$ であれば，y は弱 ε コアにも含まれる．そうでない場合，$V(CS^*) - \sum_{i\in A} y_i$ の値を σ とする．このとき，$\sigma > 0$ である．y と σ を用いて，$y'_i = y_i + \sigma/n$ となる利得ベクトル y' を作る．このとき，$\sum_{i\in A} y'_i = V(CS^*)$ が成り立ち，各 $S \in AC$ について，

$$d(y', S) = \frac{v(S) - \sum_{i\in S} y'_i}{|S|} < \frac{v(S) - \sum_{i\in S} y_i}{|S|} \leq \varepsilon$$

が成り立つ．したがって，y' は弱 ε コアに属するため，弱 ε コアは非空である． □

例 4. 3 人のエージェント a, b, c と，$AC = \{\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{b,c\},\{a,c\}\}$，$v(\{a\}) = v(\{b\}) = v(\{c\}) = 0, v(\{a,b\}) = v(\{b,c\}) = v(\{a,c\}) = 12$ からなる協力ゲームを考える．なお，このゲームのコアは空である．

与えられた ε に関して，ε 以下となる ε' を選び，$V(CS^*) - n\cdot\varepsilon' \leq \sum_{i\in A} y_i \leq V(CS^*)$ なる条件を考える．この条件は，$\varepsilon' = 0$ とすれば弱 ε コアの全体合理性の条件と等しくなる．

まず，$\varepsilon = 3$ とし，$\varepsilon' = 0$ とすると，弱 ε コア +（弱 ε コアと等価）は，図 1 の一番左の大きい三角形の中の，影をつけた三角形として表現される．ここで，この大きい三角形の高さは $V(CS^*) = 12$ と等しい．影をつけた三角形の中のどの点も全体合理性を満たす利得ベクトルになっている．例えば，$y = (4,4,4)$ は弱 ε コア + に属し，かつ弱 ε コアにも属する．

次に，$\varepsilon' = 2/3$ とする．このとき，弱 ε コア + は図 1 の中央の大きい三角形の中の影をつけた三角形として表現される．ここで，大きい三角形の高さは $V(CS^*) - \varepsilon'\cdot n = 10$ と等しい．$y = (10/3, 10/3, 10/3)$ は弱 ε コア + に属する．y に $(2/3, 2/3, 2/3)$ を足すと $(4,4,4)$ となり，弱 ε コアに属する．

最後に，$\varepsilon' = 1$ とする．このとき，弱 ε コア + は図 1 の一番右の三角形の中の一点 $(3,3,3)$ として表現される．ここで，その三角形の高さは $V(CS^*) - \varepsilon'\cdot n = 9$ と等しい．$\varepsilon' = 1$ のとき，$y = (3,3,3)$ は弱 ε コア + に属する唯一の利得ベクトルである．もし，y に $(1,1,1)$ を足すと $(4,4,4)$ となり，これは弱 ε コアに属する．

上記の議論より，弱 ε コアと弱 ε コア + の非空性は等価であるため，その非空性判定の計算量は等価である．しかし，全体合理性を緩和することにより $CoreD$ と同様のアイデアを用いた非空性判定アルゴリズムを用いることができ，平均的な実行時間を削減できる．

以下に弱 ε コア + の非空性判定アルゴリズムを示す．

定義 15 (アルゴリズム $ECore^+(\varepsilon)$)**.**

1. ε に対して，定義 16 の双対問題を解き，双対最適解 y^* および $V^* = \sum_{i\in A} y^*_i$ を得る．
2. 定義 17 の IP を解き，y^* が緩和した全体合理性 ($V^* \leq V(CS^*)$) を満たすか否かを確認する．
3. y^* が緩和した全体合理性を満たす場合，y^* を弱 ε コア + に属する利得ベクトルとして返す．そうでない場合，弱 ε コア + は空と判定する．

定義 16 と定義 17 はそれぞれ，定義 9 と定義 11 を修正したものである．正確な定義は以下の通りである．

定義 16 (緩和された提携合理性を用いた双対問題)**.**

$$\begin{array}{ll} \text{min} & \sum_{i\in A} y_i, \\ \text{subject to} & \sum_{i\in S_j} y_i + \varepsilon\cdot|S_j| \geq v(S_j),\ \forall S_j \in AC, \\ & y_i \geq 0,\ \forall\, i. \end{array}$$

定義 17 (緩和された全体合理性の判定のための IP)**.**

$$\begin{array}{ll} \text{find} & x, \\ \text{subject to} & \sum_{S_j\in AC} x_j\cdot v(S_j) \geq V^*, \\ & \sum_{j|i\in S_j\in AC} x_j \leq 1,\ \forall\, i, \\ & x_j \in \{0,1\},\ \forall\, j. \end{array}$$

定理 5. 定義 15 のアルゴリズム $ECore^+(\varepsilon)$ が返す結果は正しい．すなわち，y^* が返ってきた場合，y^* は弱 ε コア + に属し，アルゴリズムが弱 ε コア + が空であると判断した場合，弱 ε コア + は空である．

証明. この定理は，基本的に定理 2 と同様に証明できるが，$V(CS^*) - n\cdot\varepsilon \leq \sum_{i\in A} y_i$ が成立することを示す必要がある．この式は $A \in AC$ であれば，定義 16 の制約式から導かれる．そうでない場合は，定理 3 より導かれる． □

弱 ε コア + の非空性判定には，$CoreP$ を修正したアルゴリズムも利用できる．この場合は，まず $V(CS^*)$ を求め，次に緩和した提携合理性と緩和した全体合理性を満たす利得ベクトル y を求めればよい．しかし，このアルゴリズムは ε の値に関わらず，$V(CS^*)$ を求めなければならない．このため，$CoreP$ をもとにしたアルゴリズムの実行時間は，AC の要素数の増加に伴って，$ECore^+(\varepsilon)$ より急激に増加すると予想される．

5 計算機実験

本章では提案アルゴリズムの性能を評価するための計算機実験を行う．ここでのすべての実験は Xeon E5540 プロセッサと 24GB メモリを搭載した Windows Vista Business 64bit Edition マシンで行った．また，各インスタンスにおける IP や LP を解くため，市販の最適化ソフトウェアパッケージで

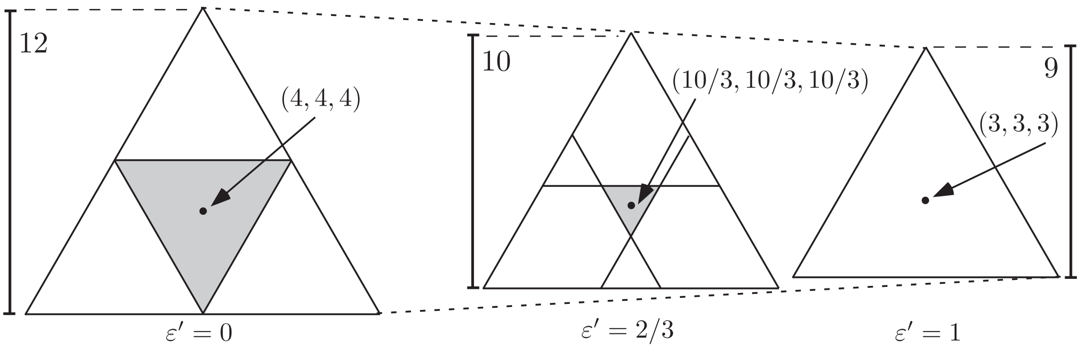

図 1　弱 ε コア $^+$ の例

ある CPLEX version 12.1 を用いた．提携構造形成やコアの非空性判定のための一般的なベンチマーク問題は存在しないため，本論文では，許される提携が限られている場合の提携構造形成問題と等価な問題となる，組合せオークションにおける勝者決定問題のベンチマーク問題を用いる．具体的には，勝者決定問題のベンチマーク問題を生成するプログラムである Combinatorial Auction Test Suite (CATS) [11] により，協力ゲームの問題のインスタンスを生成する．

具体的には，エージェント数 $|A|$，実現可能提携の集合 AC，AC に含まれる各提携 S の利得 $v(S)$ を次の手順で生成する．

本実験では，常にエージェント数を $|A| = 1000$ とする．次に，実現可能な提携の集合 AC に含まれる提携 S を CATS を用いて生成する．CATS では，減衰分布，一様分布および指数分布といった分布に従って提携の大きさと提携に含まれるエージェントを決定し，提携を生成する．

例えば，CATS が行う減衰分布を用いて提携を生成する具体的な手順は以下のとおりである．まずエージェント 1 人からなる提携を生成し，その提携に確率 p でランダムにエージェントを追加していく．次に，エージェントを追加しなくなるか，すべてのエージェントを提携に追加した場合は動作を終了し，1 つの提携を決定する．これを繰り返し，生成された提携を AC の要素として追加していくことで，任意の個数の提携を生成する．ただし，重複する提携は許さないとし，$p = 0.55$ と設定している．生成する提携の数は実験により異なる．

最後に，各提携の利得を $(0, |S| \times 10]$ の一様分布に従って決定する．本論文では，減衰分布，指数分布，一様分布のいずれかを用いてインスタンスを 100 個ずつ生成し，その平均を評価する．紙幅の都合上，指数分布および一様分布の結果は割愛するが，減衰分布とほぼ同様の結果を確認している．

図 2 に $CoreD$ と $CoreP$ の平均実行時間を比較した結果を示す．左縦軸が実行時間，右縦軸が ratio を示す．横軸が $|AC|$ の数を表し，それを 1000 から 10000 の間で変化させる．ratio が表すのは生成した 100 個のインスタンスのうち，コアが非空であるインスタンスの割合となる．その割合は $|AC|$ の増加に伴って急速に減少していることがわかる．具体的には，$|AC|$ が 3000 を超えると，生成されたどのインスタンスにおいてもコアは常に空となる．

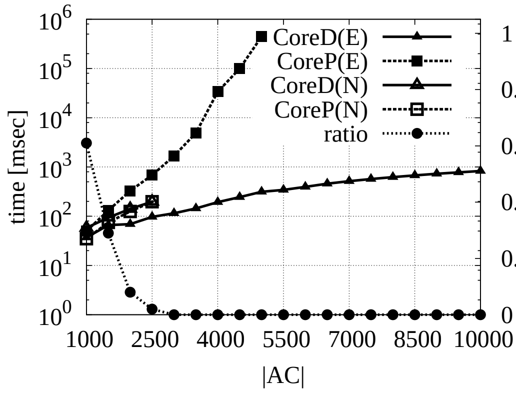

図 2　コアの非空性判定アルゴリズムの実行時間（減衰分布）

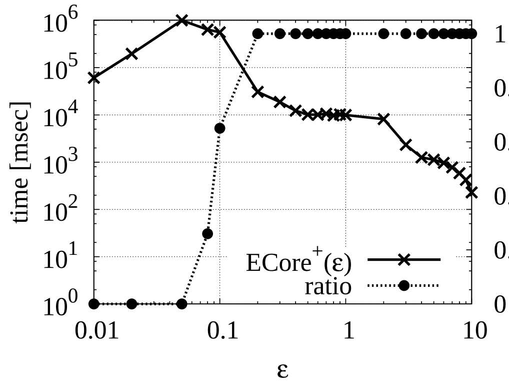

図 3　$ECore^+(\varepsilon)$ の実行時間 (減衰分布)

次に，コアが空／非空となるインスタンスにおける $CoreD$ と $CoreP$ を比較する．コアが空である場合（凡例の $CoreD(E)$ と $CoreP(E)$），$CoreD$ は $CoreP$ よりはるかに優れている．つまり，$|AC|$ の増加に伴って $CoreP$ の実行時間は急速に増加する一方で，$CoreD$ は $|AC|$ が 10000 のインスタンスでも，1 秒以内にコアの非空性判定が可能である．また，$CoreP$ は $|AC|$ が 5000 より大きいインスタンスにおいては，10^6 ミリ秒以内にコアの非空性判定が不可能となる．

一方，コアが非空である場合（凡例の $CoreD(N)$ と $CoreP(N)$），$CoreD$ と $CoreP$ の平均実行時間はほぼ等しくなる．$|AC| > 3000$ のとき，CATS を用いて生成したインスタンスのコアは常に空となってしまう．このため，$|AC|$ を大きくした場合でも，コアが必ず非空になるように人工的に提携の利得を調整した問題に関しても同様の実験を行い，$CoreD$ と $CoreP$ の平均実行時間はほぼ等しくなることを確認した．

次に，$ECore^+(\varepsilon)$ の実行時間を，ε の値を変化させながら評価する．この実験では，$|AC|$ を 10000 に固定した状態で，ε の値を 0.01 から 10 の間で変化させる．また，10^6 ミリ秒という制限時間を設け，$ECore^+(\varepsilon)$ の実行時間がこの時間制限を超えたときアルゴリズムを終了させる．制限時間を超えた問題のインスタンスは，実行時間や弱 ε コア $^+$ が非空であるインスタンスの割合の平均を計算するときは除外する．

実験結果を図 3 に示す．右縦軸の ratio は弱 ε コア $^+$ が非空であるインスタンスの割合を表す．一般に，コアが空の場合，ε を十分大きく設定することで，弱 ε コア $^+$ は非空となる．ε の増加に伴って，実行時間が易-難-易 (easy-hard-easy) と変化しており，最も難しい範囲は 0.05 と 0.1 の間となることが確認できる．ε の値が 0.05 (4%)，0.08 (46%)，0.1 (9%) のとき，$ECore^+(\varepsilon)$ の実行時間が制限時間を超える．ここで，括弧の中の数字は制限時間を超えたインスタンスの割合を示す．一方，4 章の最後で述べた $CoreP$ を修正したアルゴリズムは，制限時間内に $V(CS^*)$ を得ることができず，どのインスタンスにおいても制限時間内には解くことができない．

6 議論

6.1 Super-additive cover

文献 [2] は super-additive cover と呼ばれる，優加法性を満足しない特性関数の下での元のゲームを，優加法性を満足する，別のゲームに変換する方法を示している．具体的には，特性関数 v と AC が与えられたとき，優加法性を満たす新しい特性関数 $\bar{v}$ を以下のように定義する．

- もし $S \in AC$ であれば，$\bar{v}(S)$ は $v(S)$ とする．
- そうでない場合，$\bar{v}(S)$ は $\max_{p_S}\{\sum_{S_i \in p_S} v(S_i)\}$ で与えられる．ここで，$p_S = \{S_1, S_2, \ldots\}$ は S の分割とする．すなわち，すべての S_i は互いに素であり，$\cup_{S_i \in p_S} S_i = S$ と $\forall S_i \in AC$ を満たす．

この変換法を用いた場合，元のゲームの最適な提携構造 CS^* は $\bar{v}(A) = \sum_{S_i \in p_A} v(S_i)$ を満たすような分割 p_A と等しくなる．このため，$V(CS^*) = \bar{v}(A)$ が成り立つ．つまり，v における最適な提携構造（と提携構造付きコア）を求める問題は，$\bar{v}$ における全体提携の利得の値（とコア）を求める問題と等しくなる．実際，文献 [6] は，変換されたゲームにおける全体提携の利得の値とコアを求める問題を対象としている．

6.2 Cost of stability

本節では，弱 ε コア $^+$ と *cost of stability* (CoS) [4] の関係を議論する．CoS は，コアが空のときに提携構造を安定にするために必要な外部から与えられる最小の金額を表す．

定義 18 (Cost of stability). 特性関数 v，$CS^A = \{S_1, \ldots, S_k\}$ およびベクトル $\Delta = (\Delta_1, \ldots, \Delta_k)$ ($\forall i, \Delta_i \geq 0$) が与えられたとき，$S \notin CS^A$ において $v'(S) = v(S)$，かつ $S_j \in CS^A$ において $v'(S_j) = v(S_j) + \Delta_j$ を満たす新しい特性関数 v' を考える．*cost of stability (CoS)* は，新しい特性関数 v' におけるコアが非空となる Δ における $\sum_j \Delta_j$ の最小値として定義する．

弱 ε コア $^+$ の非空性と CoS は次の関係を持つ．

定理 6. 弱 ε コア $^+$ が非空であれば，$CoS \leq n \cdot \varepsilon$ が成り立つ．

証明. 弱 ε コア $^+$ が非空であると仮定し，弱 ε コア $^+$ に属する利得ベクトルを y とする．次に，$y'_i = y_i + \varepsilon$ を満たす新たな利得ベクトル y' を考える．弱 ε コア $^+$ の定義より，以下の条件が成り立つ．

- $v(S) - \sum_{i \in S} y' \leq 0, \forall S \in AC$
- $V(CS^*) \leq \sum_{i \in A} y'_i \leq V(CS^*) + n \cdot \varepsilon$.

これらより，y' は $\sum_j \Delta_j = n \cdot \varepsilon$ である v' を用いたゲームのコアに属する．したがって，$CoS \leq n \cdot \varepsilon$ が成り立つ． □

また，以下の定理から CoS を所与としたとき，弱 ε コア $^+$ が非空となる ε の下限を与えることができる．

定理 7. $\varepsilon = CoS/n$ において，弱 ε コア $^+$ は非空である．

証明. CoS の定義より，$\sum_{i \in A} y_i = V(CS^*) + CoS$ と $\forall S \in AC, \sum_{i \in S} y_i \geq v(S)$ を満たす利得ベクトル y が存在する．すなわち，y は v' を用いた協力ゲームのコアに属する．ここで，$\varepsilon = CoS/n$ かつ $y'_i = y_i - \varepsilon$ を満たす新たな利得ベクトル y' を考える．このとき，$\sum_{i \in A} y'_i = \sum_{i \in A} y_i - n \cdot \varepsilon = V(CS^*)$ かつ $\forall S \in AC, d(y, S) \leq \varepsilon$ が成り立つため，y' は弱 ε コア $^+$ に属する．以上より，弱 ε コア $^+$ は非空である． □

上記の 2 つの定理より，以下の定理が導かれる．

定理 8. 弱 ε コア $^+$ が非空である ε のうち，最小な ε を ε_{min} とする．このとき，ε_{min} は CoS/n と等しい．

6.3 提携間での利得の譲渡が不可能な場合

提携間で利得の譲渡が許されていないとき，最適な提携構造を形成することで，ε の値を最小化できるとは限らない．

例 5. *3* 人のエージェント a, b, c と，特性関数が $v(\{a,b,c\}) = v(\{a,b\}) = v(\{b,c\}) = v(\{a,c\}) = 30, v(\{c\}) = 3, v(\{a\}) = v(\{b\}) = 0$ で与えられるゲームを考える．このとき，最適な提携構造は $\{\{a,b\},\{c\}\}$ である．提携間の利得の譲渡は不可能と仮定する．このとき，平均不満を最小化する利得ベクトルは $y = (15, 15, 3)$ として与えられる．ここで，提携 $S = \{a, c\}$ に注目する．この提携は協力すると 30 の利得を得られる，つまり $v(S) = 30$ であるにもかかわらず，合計で 18 の利得しか得られていないため，提携 S は不満を持つ．その平均不満

$d(y,S) = \frac{v(S)-\sum_{i\in S} y_i}{|S|}$ は 6 である．一方で，全体提携が形成され，エージェントが利得ベクトル $y = (10, 10, 10)$ を選んだ場合を考える．このとき，平均不満は 5 である．従って，この最適でない提携構造が ε をより最小化している．

提携間で利得の譲渡が可能な場合，次の 2 つの問題を独立に解くことが可能である: (1) $V(CS^*)$ を求める問題，(2) $\sum_{i\in A} y_i = V(CS^*)$ を満たし，ある基準（例：平均不満の最小化）に従って最適化を行った利得ベクトル y を求める問題．一方，提携間で利得の譲渡が不可能な場合，上記のような問題の分割は不可能であり，望ましい提携構造と利得ベクトルを同時に求めるという，より複雑な問題を解く必要がある．

7　結論

全体提携を形成することが実現不可能もしくは最適でないとき，エージェントは提携構造を形成し，提携構造がもたらす利得を各エージェントにどう配分するかを決定しなければならない．コアの非空性判定問題は一般には NP 完全なので，既存のアルゴリズムである $CoreP$ より平均実行時間がより短いアルゴリズムを提案することを目的とし，提携構造付きコアの非空性判定を効率的に行うアルゴリズムである $CoreD$ を開発した．また，計算機実験を用いて，そのインスタンスのコアが空であれば，$CoreD$ の性能は $CoreP$ より非常に優れていることを示した．

さらに，提携間の利得の譲渡が可能な場合において，弱 ε コア $^+$ と呼ばれる新たな解概念を提案した．弱 ε コア $^+$ は，弱 ε コアにもとづいた解概念であり，最適な提携構造の利得の近似値を用いる．また，$ECore^+(\varepsilon)$ と呼ばれる弱 ε コア $^+$ の非空性判定を行うアルゴリズムを提案し実験的評価を行った．

今後の研究課題として，提携間で利得の譲渡が不可能な場合に，適切な提携構造と利得の配分を求める効率的なアルゴリズムを開発することが挙げられる．

参考文献

[1] S. Airiau and S. Sen. On the stability of an optimal coalition structure. In *ECAI*, pp. 203–208, 2010.

[2] R. J. Aumann and J. H. Dreze. Cooperative games with coalition structures. *International Journal of Game Theory*, 3:217–237, 1974.

[3] H. Aziz and B. de Keijzer. Complexity of coalition structure generation. In *AAMAS*, pp. 191–198, 2011.

[4] Y. Bachrach, E. Elkind, R. Meir, D. V. Pasechnik, M. Zuckerman, J. Rothe, and J. S. Rosenschein. The cost of stability in coalitional games. In *SAGT*, pp. 122–134, 2009.

[5] G. Chalkiadakis, E. Elkind, and M. Wooldridge. *Computational Aspects of Cooperative Game Theory*. Morgan and Claypool Publishers, 2011.

[6] V. Conitzer and T. Sandholm. Complexity of constructing solutions in the core based on synergies among coalitions. *Artificial Intelligence*, 170(6):607–619, 2006.

[7] M. Davis and M. Maschler. The kernel of a cooperative game. *Naval Research Logistics Quarterly*, 12(3):223–259, 1965.

[8] D. Gillies. *Some Theorems on n-Person Games*. PhD thesis, Princeton University, 1953.

[9] G. Greco, E. Malizia, L. Palopoli, and F. Scarcello. On the complexity of the core over coalition structures. In *IJCAI*, pp. 216–221, 2011.

[10] G. Hines, T. Rahwan, and N. R. Jennings. An anytime algorithm for finding the epsilon-core in nontransferable utility coalitional games. In *ECAI*, pp. 414–419, 2012.

[11] K. Leyton-Brown, M. Pearson, and Y. Shoham. Towards a universal test suite for combinatorial auction algorithms. In *ACM EC*, pp. 66–76, 2000.

[12] R. Meir, J. S. Rosenschein, and E. Malizia. Subsidies, stability, and restricted cooperation in coalitional games. In *IJCAI*, pp. 301–306, 2011.

[13] R. B. Myerson. Graphs and cooperation in games. *Mathematics of Operations Research*, 2(3):225 – 229, 1977.

[14] N. Nisan. Bidding and allocation in combinatorial auctions. In *ACM EC*, pp. 1–12, 2000.

[15] T. Rahwan and N. R. Jennings. An algorithm for distributing coalitional value calculations among cooperative agents. *Artificial Intelligence*, 171(8–9):535–567, 2007.

[16] T. Rahwan, T. P. Michalak, E. Elkind, P. Faliszewski, J. Sroka, M. Wooldridge, and N. R. Jennings. Constrained coalition formation. In *AAAI*, 2011.

[17] T. Rahwan, T. P. Michalak, and N. R. Jennings. Minimum search to establish worst-case guarantees in coalition structure generation. In *IJCAI*, pp. 338–343, 2011.

[18] T. Rahwan, T. P. Michalak, and N. R. Jennings. A hybrid algorithm for coalition structure generation. In *AAAI*, pp. 1443–1449, 2012.

[19] T. Sandholm, K. Larson, M. Andersson, O. Shehory, and F. Tohmé. Coalition structure generation with worst case guarantees. *Artificial Intelligence*, 111(1-2):209–238, 1999.

[20] L. S. Shapley and M. Shubik. Quasi-cores in a monetary economy with nonconvex preferences. *Econometrica*, 34:805–827, 1966.

[21] O. Shehory and S. Kraus. Methods for task allocation via agent coalition formation. *Artificial Intelligence*, 101(1-2):165–200, 1998.

[22] J. von Neumann and O. Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, 1944.

[23] Y. Zick, E. Markakis, and E. Elkind. Stability via convexity and LP duality in OCF games. In *AAAI*, pp. 1506–1512, 2012.