

## デジタルスパイク位相マップの分岐現象

Bifurcation phenomena of a digital spike phase map

的場昭男<sup>1</sup>  
Matoba Akio

堀本成俊<sup>1</sup>  
Horimoto Narutoshi

斉藤利通<sup>1</sup>  
Toshimichi Saito

法政大学 理工学部 電気電子工学科<sup>1</sup>  
Faculty of Engineering and Science, Hosei University<sup>1</sup>

あらまし

様々な周期スパイク列を生成できるデジタルスパイク位相マップを紹介し、簡素なアナログスパイクニューロンと関連する例題を対象に、その基本動作を考察する。

### 1 まえがき

スパイク信号は、ニューラルシステムにおける情報処理や様々な工学系において重要な役割を担っている [1]-[4]。スパイク信号は低電力であり、画像処理、UWB 通信、人工内耳などへの応用も検討されている [2]-[4]。

本論文では、様々な周期的スパイク系列を生成できるデジタルスパイク位相マップ (DSM [5]-[7]) を考察する。DSM は格子点上で定義されるマップであり、格子点数、初期値、パラメータに依存して、その動作は多様に化する。DSM には様々な例題があるが、本論文では簡単のため、分岐ニューロン (BN [5]) の動作を記述するアナログスパイク位相マップ (ASM) を離散化して得られる DSM を考える [7]。BN はしきい値とベース信号の間で積分と発火を繰り返して様々なスパイク列を出力し、様々な分岐現象を呈する [5]。

DSM の現象は多彩であるが、特に 2 つの例を紹介する: 1) ASM が単純な周期スパイク列を呈するとき、対応する DSM には複数のスパイク列が共存し、初期値に依存してそのいずれかを呈することとなる。2) ASM が単純なカオスのスパイク列を呈するとき、対応する DSM には様々な周期スパイク列が共存する状態となる。本論文の結果は、DSM に基づく力学系理論の発展とその工学的応用の基礎となると思われる。

### 2 分岐ニューロン

図 1 に BN の基本動作を示す。内部状態  $x$  が傾き  $s$  で増加していき、しきい値  $Th = 0$  に達すると、スパイクを出力し、内部状態  $x$  はベース信号  $b(\tau)$  にリセットさ

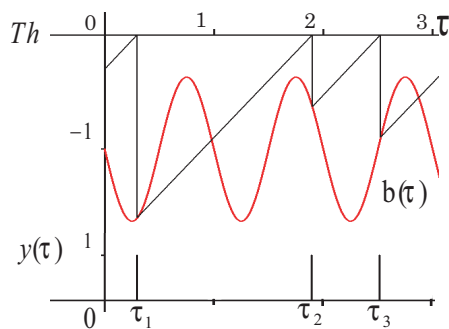


図 1 分岐ニューロンの動作

れる。この積分発火動作を繰り返すことにより、BN はスパイク列  $y$  を出力する。動作は次式で記述される。

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau}x = s & y(\tau) = 0 \quad \text{for } x \leq 0 \\ x(\tau_+) = b(\tau_+) & y(\tau_+) = 1 \quad \text{if } x(\tau) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$b(\tau) = -k \sin 2\pi\tau - 1, \quad 0 < k < 1$$

ただし、 $k$  は振幅パラメータである。BN の動作は  $b(\tau)$  の形状に大きく依存するが、本論文では簡単のため、正弦波信号とする。スパイク列はスパイク位置で特徴づけられる。いま、 $n$  番目のスパイク位置を  $\tau_n$  とする。 $n+1$  番目のスパイク位置  $\tau_{n+1}$  は  $n$  番目のスパイク位置  $\tau_n$  で決まるので、スパイク位置写像  $f$  を定義することができる。これは、次式で記述される。

$$\tau_{n+1} = \tau_n - \frac{1}{s}b(\tau_n) \equiv f(\tau_n) \quad (2)$$

簡単のため、以下では  $s = 1$  とする。スパイク位置写像の例を図 2 に示す。

ここで、スパイク位相、 $\theta_n = \tau_n \bmod 1$ , を導入する。これを用いると、ASM を定義することができる:

$$\theta_{n+1} = F(\theta_n) \equiv f(\theta_n) \bmod 1, \theta_n \in [0, 1) \quad (3)$$

ASM の典型例を図 3 に示す。図 3(a) は 2 周期の軌道を呈し、図 3(b) はカオスを呈している。パラメータ  $k$  を

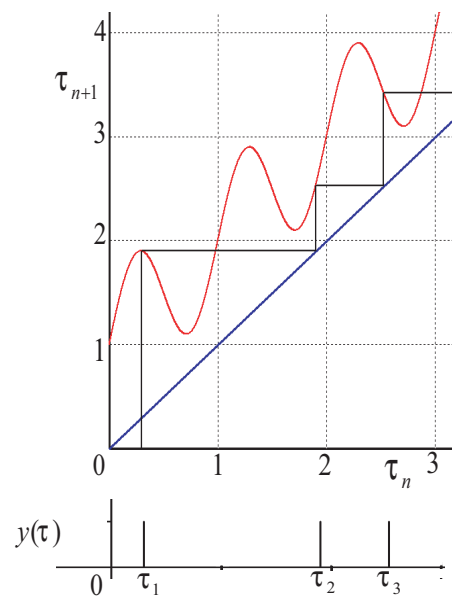


図 2 スパイク位置写像

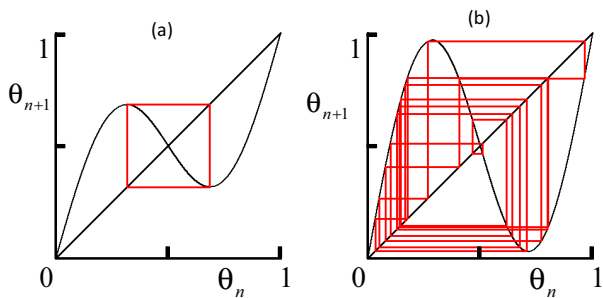


図 3 アナログスパイク写像. (a)  $k = 0.4$ , (b)  $k = 0.7$  変化させると、ASM は様々な分岐現象を呈する. その解析例や対応する回路実験例は [5] で議論されている.

### 3 デジタルスパイクマップ

BN の ASM を離散化して DSM を構築する. 図 4 に示したように、ASM の  $y$  軸方向を量子化して得られる格子点を考える. 格子点数を  $N$  とする. 各格子点  $P_j$  は、その  $x$  座標と  $y$  座標で記述する.

$$\begin{aligned} P_1 \cdots P_N, P_j &= (x_j, y_j) \\ x_j \in L_x &\equiv \{l_1, \cdots, l_N\} \\ y_j \in L_y &\equiv \{m_1, \cdots, m_D\} \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、 $L_x$  と  $L_y$  は、格子点の  $x$  成分と  $y$  成分の集合である.  $D$  は  $y$  方向の量子化数であり、 $0 \leq y < 1$  に対する量子化間隔は  $1/D$  となる. 格子点数とその  $x$  成分の数は  $N$  であるが、写像が 1:1 でない場合は、 $y$  成分の数  $D$  は  $N$  以下になりうることに注意する. この格子点に基づき、DSM を定義する.

$$y = y_c = Q(x), |x - x_c| = \min_i |x - l_i| \quad (5)$$

ただし、 $x \in [0, 1)$ ,  $y \in L_y$  である. すなわち、 $x$  を入力したとき、それと  $x$  成分が最も近い格子点  $P_c = (x_c, y_c)$  が選ばれ、その  $y$  成分  $y_c$  が DSM の出力となる. ここで、ある点  $p$  に ASM あるいは DSM を  $k$  回施してはじめて元の点  $p$  に戻るとき、 $p$  を  $k$  周期点と定義する.

$$f^k(p) = p, f^l(p) \neq p, 1 < l < k \quad (6)$$

この周期点の系列を  $k$  周期軌道と呼ぶ.  $D = 16$  の場合の典型例を図 4 に示す. これに対応する図 3 の ASM を考えると、以下のことが解る.  $k = 0.4$  のとき、ASM は 2 周期軌道を呈する. ほとんど全ての初期値から出発する軌道は、この周期軌道に収束する. これに対して、DSM には 2 つの 2 周期軌道が共存し、初期値に依存してそのいずれかを呈する.  $k = 0.7$  のとき、ASM はほとんどすべての初期値に対してカオスを呈する. これに対応する DSM には 4 つの周期軌道が共存している. 2 周期軌道が 3 つ、4 周期の軌道が 1 つ共存しており、初期値に依存していずれかの軌道を呈する. 量子化レベル  $D$  やパラメータ  $k$  が変化すると、DSM が持つ周期軌道の種類と個数は多種多様に変化する.

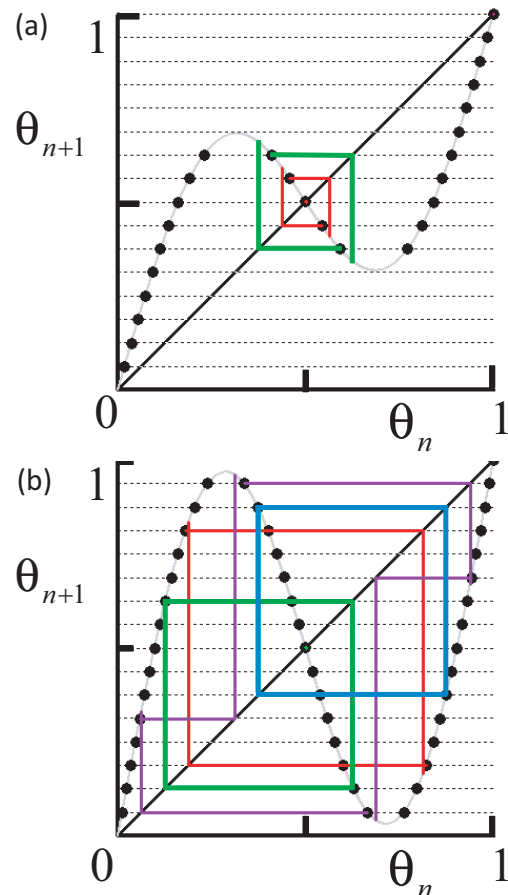


図 4  $D = 16$  の DSM. (a)  $k = 0.4$ , (b)  $k = 0.7$

### 4 むすび

分岐ニューロンのアナログ位相写像に基づく DSM を考察し、その多彩な現象の一端を紹介した. 様々な種類の DSM の分岐現象の解析、その工学的応用の検討、等が課題である.

#### 参考文献

- [1] E. M. Izhikevich, Simple model of spiking neurons, IEEE Trans. Neural Networks, 14, 6, pp. 1569-1572, 2003.
- [2] S. R. Campbell, D. Wang and C. Jayaprakash, Synchrony and desynchrony in integrate-and-fire oscillators, Neural computation, 11, pp. 1595-1619, 1999.
- [3] N. F. Rulkov, M. M. Sushchik, L. S. Tsimring and A. R. Volkovskii, Digital communication using chaotic-pulse-position modulation, IEEE Trans. CAS-I, 48, 12, pp. 1436-1444, 2001.
- [4] H. Torikai and T. Nishigami, An artificial chaotic spiking neuron inspired by spiral ganglion cell: parallel spike encoding, theoretical analysis, and electronic circuit implementation, Neural Networks, 22, pp. 664-673, 2009.
- [5] H. Torikai and T. Saito, Return map quantization from an integrate-and-fire model with two periodic inputs, IEICE Trans. Fund., E82-A, 7, pp. 1336-1343, 1999.
- [6] T. Ogawa and T. Saito, Self-organizing digital spike maps for learning of spike-trains, IEICE Trans. Fundamentals, E94-A, 12, pp. 2845-2852, 2011.
- [7] N. Horimoto and T. Saito, Analysis of digital spike maps based on bifurcating neurons, NOLTA, IEICE, E95-N, 10, 2012, in press.