

図的思考支援を目的とした複合グラフの階層的描画法について†

三 末 和 男** 杉 山 公 造**

人間の発想活動の支援を目的とする発想支援系においては、断片的情報群の整理・組織化のための高度でかつ柔軟な機能を持つマン・マシン・インタフェースが重要である。そのなかでも特に、図的機能が不可欠であり、情報の関連構造を可読性に富んだ図として直接的に人間に提示し発想を刺激するような機能を持たせることが望ましい。本稿では、KJ法に代表されるカードを用いた発想技法を図的思考展開の方法として捉え、それを計算機により支援するための基礎技法の一つとして、カード間の包含関係と隣接関係を持つ図（数学的には複合グラフとして抽象化される）の可読性基準による自動描画法について述べる。本描画法は、LSI配線のように物理的なレイアウトを求めるのではなく、情報構造やモデル構造などの概念の表現や伝達を主な目的とするもので、ごく基本的な図的要素と配置に着目し、階層的な配置を行うことを特色とする。本稿は描画問題に対するアルゴリズムを中心に述べるものであるが、それらはカード間の隣接関係だけからなる有向グラフの階層的描画法の拡張であり、基本的な考え方もそれを踏まえている。

1. はじめに

人間の知的活動のうち発想活動の計算機支援に関する研究が盛んになってきた^{1)~4)}。このような発想支援系においては断片的情報群の整理・組織化のための高度でかつ柔軟な機能を持つマン・マシン・インタフェースが特に重要である。

KJ法⁵⁾に代表される発想技法を総称してカード・システムと呼ぶ。そこでは、情報群の整理・組織化は、言語情報を書き込んだカード間に様々な関係を与え、それらの関係によって木構造やネットワーク構造を形成することを基礎としてなされる。また、その過程においては図的表現を実際に用いたり、あるいはそれを意識において行うことが多い。したがって、発想支援系のインタフェースには図的機能が不可欠であり、情報の関連構造を可読性に富んだ図として直接的に人間に提示し発想を刺激するような機能を持たせることが望ましい。

本稿では、カード・システムを図的思考展開の方法として捉え、それを計算機により支援するための基礎技法の一つとして、カード間の包含関係と隣接関係を持つ図（数学的には複合グラフとして抽象化される）の可読性基準による自動描画法について述べる。本描画法は、LSI配線のように物理的なレイアウトを求めるのではなく、情報構造やモデル構造などの概念の表現や伝達を主な目的とするもので、ごく基本的な図的

要素と配置に着目し、階層的な配置を行うことを特色とする。このような観点からの研究は、有向グラフと無向グラフ（特に平面グラフ）に関しては詳細に行われているが^{6),7)}、複合グラフの自動描画法に関してはこれまでなされていない。我々は、カード間の隣接関係だけからなるグラフ（通常の有向グラフ）の階層的描画法については既に報告している^{8)~10)}。本描画法はその拡張であり、基本的な考え方もそれを踏まえている^{11),12)}。本描画法の応用としては、カード・システムの計算機援用における図解整理や複雑なリンク構造を持つハイパertext¹³⁾の地図の自動生成等を考えている。

以下、第2章では準備として描画対象である複合グラフの定義を行い、第3章では可読性の基準を描画規約・規則として定める。第4章では処理順序に沿って処理内容を説明する。最後に第5章で、我々が実現したプロトタイプによる出力例を示す。なお、本研究の背景をなす考え方や概念、用語については文献14)を参照されたい。

2. 描画対象

描画対象はカード・システムで用いられる図表現を抽象化した複合グラフである。ただしカード等に書かれた言語情報はそれらを書き込むスペースとして扱い、内容は問題にしない。まず有向グラフを定義し、その拡張として複合グラフを定義する。

定義 2.1

有向グラフ D を次のように定義する。

$$D = (V, E, \Psi^+, \Psi^-)$$

V : 節点集合

† On Automatic Drawing of Compound Graphs for Computer Aided Diagrammatical Thinking by KAZUO MISUE and KOZO SUGIYAMA (International Institute for Advanced Study of Social Information Science, Fujitsu Limited).

** 富士通(株)国際情報社会科学研究所

E : 枝集合

$\Psi^+, \Psi^-: E \rightarrow V$ (E の結合関数)

枝 $e \in E$ は始点 $\Psi^+(e)$ から終点 $\Psi^-(e)$ に向いているとする。 □

定義 2.2

複合グラフ G を次のように定義する。

$G = (V, E, C, \Psi^+, \Psi^-, \Phi^+, \Phi^-)$

V : 節点集合

E : 隣接枝集合

C : 包含枝集合

$\Psi^+, \Psi^-: E \rightarrow V$ (E の結合関数)

$\Phi^+, \Phi^-: C \rightarrow V$ (C の結合関数)

隣接枝 $e \in E$ は始点 $\Psi^+(e)$ から終点 $\Psi^-(e)$ に向いているとする。包含枝 $c \in C$ は節点 $\Phi^+(c)$ が節点 $\Phi^-(c)$ を包含することを表す。 □

複合グラフの節点がカードに、隣接枝が隣接関係に、包含枝が包含関係に対応している。

複合グラフに関連して、以下の用語の定義を行う。また、描画問題の簡単化のために複合グラフに二つの制約を設ける。

定義 2.3

複合グラフ $G = (V, E, C, \Psi^+, \Psi^-, \Phi^+, \Phi^-)$ に対し、 $G_c = (V, C, \Phi^+, \Phi^-)$ を G の包含グラフと呼ぶ。 □

制約 1

包含グラフ G_c は木である。 □

定義 2.4

制約 1 を満たすとき G_c を包含木と呼ぶ。包含木 $G_c = (V, C, \Phi^+, \Phi^-)$ において、根を R で表す。2 節点間の接続する節点・包含枝の系列を路と呼ぶ。路に含まれる包含枝の数を路の長さ、根までの路の長さを深さという。節点 $v \in V$ の、親、祖先、子、子孫をそれぞれ $Mo(v)$, $An(v)$, $Ch(v)$, $De(v)$ で表す。親は節点であり、祖先、子、子孫は節点の集合である。祖先、子孫は自分を含むとする。 □

制約 2

任意の隣接枝 $e \in E$ に対して、

$\Psi^+(e) \notin An(\Psi^-(e)) \cup De(\Psi^-(e))$ □

祖先や子孫との間に隣接枝は存在しない。

3. 図的可読性

可読性として図的可読性と概念的可読性を考えることができる。図的可読性は図のレイアウトだけに関係する可読性で、概念的可読性は図にする以前の概念整理に関係する可読性である。ここでは、図的可読性だ

表 1 採用した描画規約, 描画規則, 優先関係
Table 1 Drawing conventions, drawing rules and their priority.

描画のスタイルに関する基本的約束	
描画規約	C1 節点は2辺が水平線に並行な長方形の領域として描く
	C2 包含枝は領域の包含関係で表現する
	C3 隣接枝は直線または折れ線として描く
	C4 階層表現をとる(並行な層上に節点を配置)
描画に際し考慮された見やすさの基準	
描画規則	R1 隣接枝の交差数の最小化
	R2 隣接枝と節点の交差数の最小化
	R3 長い隣接枝の直線性
	R4 隣接節点の近接性
	R5 隣接枝の対称性
描画規則間の優先関係	
R1 > R2 > R3 > R4 > R5	

けを扱う。図的可読性に影響する要因としては、(1)描画規約、(2)描画規則、(3)規則間の優先関係、(4)描画アルゴリズムがある¹⁴⁾。本章では(1)-(3)について、次章で(4)について述べる。

複合グラフの描画において、我々が採用した規約、規則、優先関係を表1に示す。規約 C1-C4 は、必ず満たされなければならない制約条件であり、形状や配置に関する条件からなる。規則 R1-R5 は、見難さの要因を排除するための、また高い可読性を得るための目標である。描画規則は相互に矛盾が起こり得るので規則間に優先関係を導入した。規約、規則、優先関係はすべて経験則として選択されたものである。

C4 が本描画法の最も特徴的な規約である。これは、階層表現が図の可読性を著しく高めるという考え方で採用された。C4 によって、隣接枝は始点の長方形の下辺上の1点から、終点の長方形の上辺上の1点へ接続する下向きで矢付きの直線または折れ線で描かれる。

描画規約に基づいて描いた複合グラフの例を図1(a)に、同じ複合グラフを描画規則も考慮して描いた例を(b)に示す。(b)の方が、隣接枝の交差が少なく対称性も高く、可読性の向上がみられる。

4. 自動描画処理

自動描画処理の入力は複合グラフ、出力は階層表現された複合グラフの全体図である。処理は図2に示されるように、複合階層化、正規化、順序決定、座標決定の四つのフェーズからなり、この順に行われる。

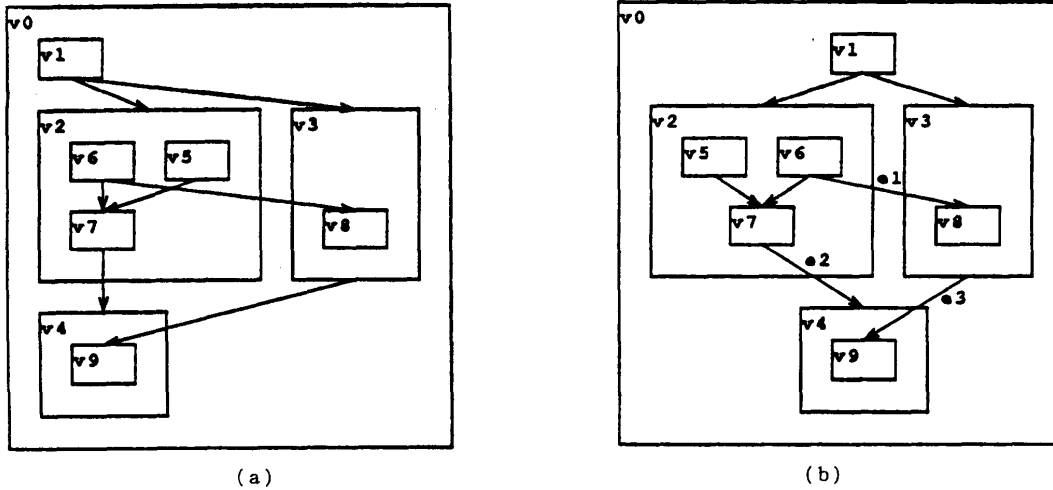


図 1 複合グラフの描画例
 (a) 描画規約だけを考慮. (b) 描画規約・規則の両方を考慮.

Fig. 1 Drawings of a compound graph. (a) Considering conventions only. (b) Considering both conventions and rules.

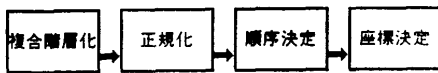


図 2 自動描画処理の流れ
 Fig. 2 The flow of automatic drawing process.

各フェーズとも有向グラフの自動描画における概念やアルゴリズムの拡張になっている。包含木を基にした再帰的処理の各段階において、節点ごとに適当な有向グラフを構成し、有向グラフのための手法を利用する。ただし、包含枝と隣接枝の複合性のため全体の処理は相当複雑になる。

各フェーズについて処理の順に述べていくが、特に順序決定、座標決定については、まず問題の定式化を行い問題の性質を明らかにし、そして実際に用いた発見的方法について述べる。

4.1 複合階層化

描画規約 C4 に定められた階層表現のために、各節点がある条件の下で階層へ割り当てなければならない。

有向グラフの場合には、階層は水平な複数の直線である。これを隣接階層と呼び、上から順に 1, 2, ... と隣接階層値と呼ぶ整数を与える。有向グラフの場合のように隣接枝だけによる階層化、つまり隣接階層化は、隣接枝の始点と終点の間に定義される順序関係を満足するように各節点に隣接階層値を割り当てる。これはトポロジカル・ソート¹⁵⁾で、アルゴリズムは単純である。

複合グラフの場合には、描画規約 C2 に従って節

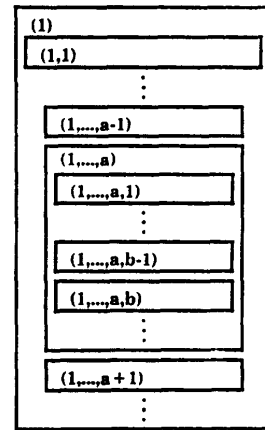


図 3 複合階層と複合階層値
 Fig. 3 Compound levels and compound level values.

点間の包含関係を表すため、階層は図 3 に示す水平でネストになった帯状の層となる。これを複合階層と呼び、各階層に複合階層値と呼ぶユニークな数列を与える。根 R が割り当てられる複合階層は複合階層値 (1) が与えられ、複合階層値 $(1, \dots, a, b)$ は、 $(1, \dots, a)$ が与えられた複合階層に直接含まれる複合階層の内、上から b 番目の複合階層に与えられる。各節点に複合階層値を割り当てることを複合階層化と呼ぶ。以後、単に階層(化)と記した場合は複合階層(化)を表すとする。

階層化において満たすべき条件は描画規約の C2 と C4 に関するものである。C2 により、節点 v には $Mo(v)$ が属す階層に直接含まれる階層の階層値が割

り当てられなければならない。C4により、隣接枝が常に下向きになる（始点が終点より上に位置する）よう階層値が割り当てられなければならない。以上の条件の下で割当可能な複合グラフを複合階層化可能な複合グラフと呼び、割当の完了した複合グラフを複合階層グラフと呼ぶ。ここで扱う複合グラフはすべて複合階層化可能であるとする。

以下、複合階層化可能な複合グラフ $G=(V, E, C, \Psi^+, \Psi^-, \phi^+, \phi^-)$ についての議論とする。

まず、隣接枝に関する節点間の順序関係を定義する。この順序関係を節点の上下関係とみなすことで隣接枝は常に下向きに描かれる。この順序関係は深さの等しい節点間においてだけ定義される。

定義 4.1

隣接枝 $e \in E$ に対して、包含木における $\Psi^+(e)$ から $\Psi^-(e)$ への路上の節点の系列が、

$$\Psi^+(e) = p_m, p_{m-1}, \dots, p_1, t, q_1, q_2, \dots, q_n = \Psi^-(e)$$

であるとする。ただし、 t は系列上で深さ最小の節点とする。このとき、 e に関する節点間の順序関係 ($<, \leq$) を次のように定める。

$$m > n \text{ のとき } p_i < q_n, p_i \leq q_i \quad (i=1, \dots, n-1)$$

$$m \leq n \text{ のとき } p_m < q_m, p_i \leq q_i \quad (i=1, \dots, m-1)$$

□

たとえば、図1(b)において節点 v_2, v_3, v_4 の間には隣接枝はないが、隣接枝 e_1, e_2, e_3 により、 $v_2 \leq v_3, v_2 < v_4, v_3 < v_4$ の順序関係が定められる。

複合階層化は、等しい複合階層値を持つ節点の子集合に対する定義4.1の順序関係を用いた隣接階層化を根から葉へ再帰的に行うこととされる。

たとえば図1(b)において、まず根の複合階層値を(1)とし、その子の集合 $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ に対して隣接階層化を行うと、 v_1, v_2, v_3, v_4 の隣接階層値はそれぞれ 1, 2, 2, 3, 複合階層値はそれぞれ(1, 1), (1, 2), (1, 2), (1, 3)となる。次は複合階層値(1, 1)を持つ節点集合 $\{v_1\}$ に子がないので、(1, 2)を持つ節点集合 $\{v_2, v_3\}$ の子集合 $\{v_5, v_6, v_7, v_8\}$ の隣接階層化を行う…、というように再帰的に処理を行う。

アルゴリズム 4.1

隣接階層化アルゴリズムは関数 LA として下のよう表される。 LA は、複合グラフ G と、親の複合階層値が等しい節点の集合 W を引数とする。 LA は定義4.1の順序関係を保存するよう、節点 $w \in W$ に対して隣接階層値 $AL(w)$ を割り当て、関数の値とし

て総階層数 $TL(W)$ を返す。(関数 LA は G が複合階層化可能なときだけ停止する。)

```
function LA(G: 複合グラフ; W: 節点集合):
integer;
begin
   $\forall v \in W$  に対して,  $AL(v)=0$  とする;
   $\forall v \in \{x \in W | (\exists (y < x) \text{ for } \forall y \in W, \forall e \in E)\}$  に対して,  $AL(v)=1$  とする;
  repeat
    for ( $\forall v \in \{x \in W | AL(x) \geq 1\}$ ) do
      for ( $\forall w \in W, \forall e \in E$ ) do begin
        if ( $(v < w)$  and ( $AL(v) \geq AL(w)$ )) then
           $AL(w) = AL(v) + 1$  とする;
        if ( $(v \leq w)$  and ( $AL(v) > AL(w)$ )) then
           $AL(w) = AL(v)$  とする;
      end
    until (隣接階層値  $AL$  が変化しなくなるまで);
  LA :=  $\max_{w \in W} AL(w)$  (=  $TL(W)$ )
end;
```

G が複合階層化可能なら、関数 LA の repeat-until の部分は高々 $|W|$ 回の繰り返しのので計算時間は $O(|W|^3 \times |E|)$ でおさえられる。ただし、あらかじめ順序関係 ($<, \leq$) によるトポロジカル・ソートを行い、その順に隣接階層値を決定していけば、ソート時間 $+O(|W| \times |E|)$ で計算できることが分かっている。

アルゴリズム 4.2

複合階層化アルゴリズムは手続き LLA として次のように表される。 LLA は、複合グラフ G と、親の複合階層値が等しい節点の集合 W を引数とする。再帰的に関数 LA を適用し、節点 $w \in De(W)$ に対して複合階層値 $CL(w)$ を割り当てる。

```
procedure LLA(G: 複合グラフ; W: 節点集合);
begin
  level := LA(G, W);
  for i := 1 to level do begin
     $\forall w \in \{x \in W | AL(x) = i\}$  に対して,
      CL(w) = append (CL(Mo(w)), AL(w));
      X := Ch( $\{x \in W | AL(x) = i\}$ );
      if (X  $\neq \phi$ ) then LLA(G, X)
    end
  end;
```

手続き LLA を、引数 $G, \{R\}$ に適用することで、全節点の複合階層値が求まる。ただし $CL(Mo(R))$ は

空列, *append* は第 1 引数の列の後ろに第 2 引数の値を追加した列を返す関数とする。

4.2 正規化

節点の配置決定後も隣接枝の配線には多くの自由度が残る, そのままでは処理が複雑である. そこで, 節点の配置により隣接枝の配線が一意に決定できる正規複合階層グラフと呼ばれる複合階層グラフのクラスを定義する. そして, 複合階層グラフを正規複合階層グラフへ変換, つまり正規化する.

定義 4.2

複合階層グラフ $G=(V, E, C, \Psi^+, \Psi^-, \Phi^+, \Phi^-)$ において, 隣接枝 $e \in E$ が次の条件を満たすとき正規隣接枝と呼ぶ.

- (i) $CL(Mo(\Psi^+(e)))=CL(Mo(\Psi^-(e)))$
- (ii) $AL(\Psi^+(e))=AL(\Psi^-(e))-1$ □

正規隣接枝は同じ深さで一つ下の階層に属する節点と接続し, 他の階層を飛び越えない. したがって, 隣接枝を直線分で描く場合, 隣接枝同士の交差は階層内の節点の順序だけに依存する.

定義 4.3

すべての隣接枝が正規隣接枝である複合階層グラフを正規複合階層グラフと呼ぶ. □

定義 4.4

複合階層グラフ $G=(V, E, C, \Psi^+, \Psi^-, \Phi^+, \Phi^-)$ にお

いて, 節点 $v \in V$ の正規後者とは, 次の条件のどれかを満たす節点 $w \in V$ である.

- (i) $Mo(v)=w$ and $AL(v)=TL(Ch(\{u \in V | CL(u)=CL(w)\}))$
- (ii) $w \in Ch(v)$ and $AL(w)=1$
- (iii) $CL(Mo(v))=CL(Mo(w))$ and $AL(v)=AL(w)-1$ □

たとえば図 4 においては, (i) の例として $d2$ に対して $d3$ (最下層の子に対する親), (ii) の例として $d4$ に対する $d5, d5$ に対する $d6$ (親に対する最上層の子), (iii) の例として $v3$ に対する $d1$ (正規隣接枝の始点に対する終点) が正規後者である.

定義 4.5

複合グラフ $G=(V, E, C, \Psi^+, \Psi^-, \Phi^+, \Phi^-)$ において, ある節点から別の節点へ, 隣接枝の向きには従い包含枝の向きとは無関係に, 接続する節点・隣接枝・包含枝をたどることによって得られる節点・隣接枝・包含枝の系列を複合路と呼ぶ. □

定義 4.6

系列上の任意の節点の直後の節点が, もし存在すれば, 正規後者であるような複合路を正規複合路と呼ぶ. □

正規化とは, 図 4 の例に示すように, 与えられた複合階層グラフのすべての非正規枝をそれぞれ正規複合路で置き換えることである.

正規複合路を構成する際に必要なすべての節点・隣接枝・包含枝はダミーとして加えられ, 以後必要があれば区別して処理される. ここで構成された正規複合路は描画時には一つの隣接枝として描かれる.

正規化は隣接枝だけに関する処理であるので, 次に示すように, 隣接枝ごとに正規性のチェック・正規複合路の構成を繰り返すことで行われる.

アルゴリズム 4.3

正規化アルゴリズムは手続き *PR* として次のように表される. *PR* は複合グラフ $G=(V, E, C, \Psi^+, \Psi^-, \Phi^+, \Phi^-)$ を引数とし, *G* を正規化する.

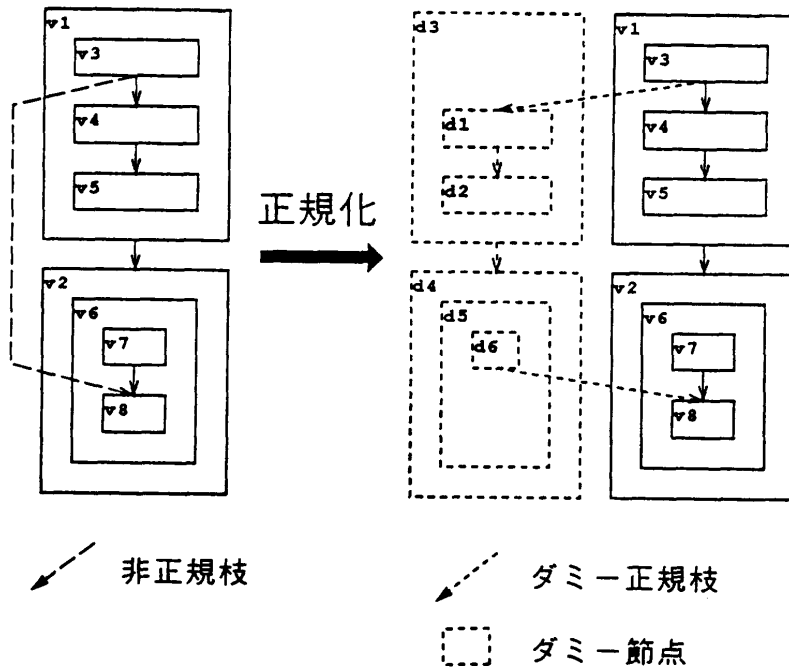


図 4 正規化の例

Fig. 4 Conversion into a proper compound graph.

procedure PR(G: 複合グラフ);

begin

for ($\forall e \in E$) do

if (e が非正規枝) then begin

e を正規複合路で置き換え,
必要なダミー節点・隣接枝・包含枝をそれ
ぞれ V_e, E_e, C_e とする;

$V := V + V_e$;

$E := (E - \{e\}) + E_e$;

$C := C + C_e$;

$\Psi^+, \Psi^-, \Phi^+, \Phi^-$ の修正

end

end;

複合階層の総数は高々 $|V|$ なので、非正規枝 e の正規複合路での置き換え時間は $O(|V|)$ でおさえられる。したがって、すべての枝に対して同じ処理を繰り返しても計算時間は $O(|V| \times |E|)$ でおさえられる。

4.3 順序決定

このフェーズでは複合階層化により各階層に割り当てられた節点の階層内での順序を決定する。その際に描画規則 R1, R2 を考慮する。つまり、階層間での隣接枝の交差数と、階層内での隣接枝と節点の交差数が最小になるような節点の順序を求めることが目的となる。

順序決定は、包含木を根から葉へ向かって再帰的にたどりながら、節点ごとにその子の集合から順序決定用局所グラフと呼ばれる有向グラフを構成し、それを対象に処理を進める。

定義 4.7

複合階層グラフ $G = (V, E, C, \Psi^+, \Psi^-, \Phi^+, \Phi^-)$ において、節点 $v \in V$ に関する順序決定用局所グラフ G_v^o を次のように定義する。ただし、 v の割り当てられた階層における節点の順序はすでに決定していると、その階層内で、 v の左側に位置する節点の集合を A 、右側に位置する節点の集合を P とする。

$$G_v^o = (V_v^o, E_v^o, \Psi_v^{o+}, \Psi_v^{o-})$$

$$V_v^o = Ch(v) \cup \{\lambda, \rho\}$$

$$E_v^o = E_v^{o1} \cup E_v^{o2} \cup E_v^{o3} \cup E_v^{o4}$$

$$E_v^{o1} = \{e \in E \mid \Psi^+(e), \Psi^-(e) \in V_v\}$$

$$E_v^{o2} = \{e \in E \mid \Psi^+(e) \in De(x) \text{ and } \Psi^-(e) \in De(y) \\ \text{for } \forall x, y \in V_v^o, x \neq y\}$$

$$E_v^{o3} = \{e \in E \mid (\Psi^+(e) \in De(A) \text{ and } \Psi^-(e) \in De(V_v^o)) \\ \text{or } (\Psi^+(e) \in De(V_v^o) \text{ and } \Psi^-(e) \in De(A))\}$$

$$E_v^{o4} = \{e \in E \mid (\Psi^+(e) \in De(P) \text{ and } \Psi^-(e) \in De(V_v^o))\}$$

or $(\Psi^-(e) \in De(V_v^o) \text{ and } \Psi^-(e) \in De(P))\}$

$$\Psi_v^{o+}(e) = \begin{cases} \Psi^+(e) & \text{if } e \in E_v^{o1} \\ x & \text{if } e \in E_v^{o2} \\ \lambda & \text{if } e \in E_v^{o3} \\ \rho & \text{if } e \in E_v^{o4} \end{cases}$$

$$\Psi_v^{o-}(e) = \begin{cases} \Psi^-(e) & \text{if } e \in E_v^{o1} \\ y & \text{if } e \in E_v^{o2} \\ z & \text{if } e \in E_v^{o3} \cup E_v^{o4} \end{cases}$$

ただし

$$\{x\} = An(\Psi^+(e)) \cap V_v^o$$

$$\{y\} = An(\Psi^-(e)) \cap V_v^o$$

$$\{z\} = (An(\Psi^+(e)) \cup An(\Psi^-(e))) \cap V_v^o$$

□

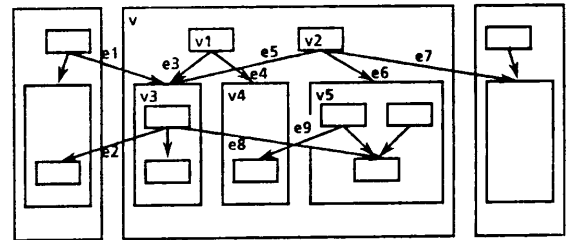


図 5 複合階層グラフ G

Fig. 5 A compound graph G.

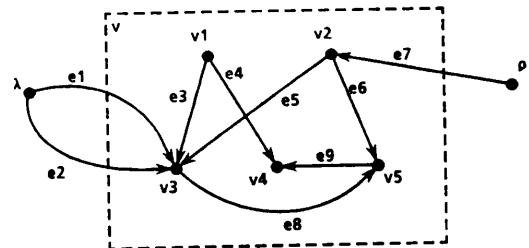
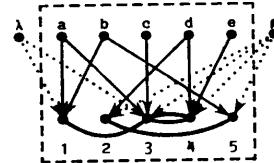


図 6 G_v^o (図 5) の節点 v に関する順序決定用局所グラフ G_v^o

Fig. 6 A local graph G_v^o for vertex v in G (Fig. 5) to determine an order of vertices.

$$E_v^{o1} = \{e3, e4, e5, e6\}, E_v^{o2} = \{e8, e9\}, \\ E_v^{o3} = \{e1, e2\}, E_v^{o4} = \{e7\}.$$

上段の節点集合を固定して、下記条件を満足する下段の節点の順序を求める。



- (1) 実線、点線のなす交差数を最小化する。
- (2) 太線と節点との交差を最小化する。
- (3) (1)を(2)より優先する。

図 7 基本的な順序決定問題

Fig. 7 Basic problem for the ordering of vertices.

順序決定用局所グラフは $Ch(v), A, P$ をすべて点と見なし, $Ch(v), A, P$ の各子孫と接続する隣接枝のうち自己閉路となるものを取り除いて作った有向グラフである. 例として, 図5に示される正規複合階層グラフの節点 v に関する局所グラフ G_s^0 を図6に示す.

局所グラフ G_s^0 において, 解決すべき問題を \mathcal{P}_1 と呼ぶ. これは図7に示されるようなもので, 次のように定式化できる.

$$G_s^0 = (V_s^0, E_s^0, \Psi_s^{0+}, \Psi_s^{0-}) \text{ において,}$$

$$V_s = \{w \in V_s^0 \mid AL(w) = s\}$$

$$E_{s,i} = \{e \in E_s^0 \mid \Psi_s^{0+}(e) \in V_s \cup \{\lambda, \rho\}$$

$$\text{and } \Psi_s^{0-}(e) \in V_s\}$$

$$E_s = \{e \in E_s^0 \mid \Psi_s^{0+}(e), \Psi_s^{0-}(e) \in V_s\}$$

とする. 第 s 階層 V_s の節点の順序を全単射関数

$$r_s: V_s \rightarrow \{1, \dots, |V_s|\}$$

で表す. また関数 r'_s を次のように定義する.

$$r'_s: V_s \cup \{\lambda, \rho\} \rightarrow \{0, 1, \dots, |V_s| + 1\}$$

$$r'_s(w) = \begin{cases} r_s(w) & \text{if } w \in V_s, \\ 0 & \text{if } w = \lambda \\ |V_s| + 1 & \text{if } w = \rho. \end{cases}$$

ただし, 以上において $1 \leq s, t \leq TL(V_s^0)$ とする.

このとき G_s^0 における枝の全交差数を f_1 , 枝の節点の交差数を f_2 とすると

$$f_1 = \sum_{1 \leq s \leq TL(V_s^0) - 1} |\{ \langle e_1, e_2 \rangle$$

$$\in E_{s,s+1} \times E_{s+1,s+1} \mid P(e_1, e_2) \}|$$

$$P(e_1, e_2) = ((r'_s(\Psi_s^{0+}(e_1)) < r'_s(\Psi_s^{0+}(e_2)))$$

$$\text{and } (r'_{s+1}(\Psi_s^{0-}(e_1)) > r'_{s+1}(\Psi_s^{0-}(e_2))))$$

$$f_2 = \sum_{1 \leq s \leq TL(V_s^0)} \sum_{e \in E_s} \{ |r'_s(\Psi_s^{0+}(e))$$

$$- r'_s(\Psi_s^{0-}(e))| - 1 \}$$

となる. つまり, 描画規則 R1 は f_1 を, R2 は f_2 を最小化する全単射関数 r_s ($1 \leq s \leq TL(V_s^0)$) を求めることであり, 両方を考慮する場合

$$c_1 f_1 + (1 - c_1) f_2 \quad (0 < c_1 \leq 1)$$

を最小化する r_s を求めることになる. c_1 は加重係数である.

R2 は各階層ごとに分割するとグラフの線形配置問題¹⁶⁾と等価である. 有向グラフに対する線形配置問題とは, 与えられた有向グラフ $D = (V, E, \Psi^+, \Psi^-)$ において節点を数直線上の $1, 2, \dots, |V|$ の位置にそれぞれ一つずつ配置し, 節点の位置を全単射関数 $r: V \rightarrow \{1, 2, \dots, |V|\}$ で表す場合に, 枝の総長

$$\sum_{e \in E} |r(\Psi^+(e)) - r(\Psi^-(e))|$$

を最小にする関数 r を求めるものである. また, R1,

R2 はどちらも NP-完全問題である.

R1 の解決には, 多段グラフの枝の交差数減少化のために開発された発見的解法, 重心法^{9), 17)}を用いる.

また, R2 の解決にも, 線形配置問題の枝の長さを2段グラフの枝の交差に置き換えて重心法を適用する方法を開発した. ここでは, 線形配置問題への重心法の適用の仕方についてだけ述べ, この方法の妥当性については付録で述べる.

定義 4.8

線形配置問題の対象となる有向グラフ $D = (V, E, \Psi^+, \Psi^-)$ から構成される2段グラフ D^B を次のように定義する.

$$D^B = (V^B, E^B, \Psi^{B+}, \Psi^{B-})$$

$$V^B = V \cup E$$

$$E^B = E \times \{0, 1\}$$

$$\Psi^{B+}(\langle e, i \rangle) = e \text{ for } \forall e \in E, \forall i \in \{0, 1\}$$

$$\Psi^{B-}(\langle e, 0 \rangle) = \Psi^+(e)$$

$$\Psi^{B-}(\langle e, 1 \rangle) = \Psi^-(e) \quad \square$$

つまり, 2段グラフ D^B は, 有向グラフ D の各枝を新しい節点で二つに分割し, 常に新しい節点が始点になるよう枝の向きを定めたものである.

このように構成した2段グラフ D^B において, E の要素を上段に, V の要素を下段に配置し, 重心法により枝の交差を減少させる. その結果得られた下段の節点の順序を線形配置問題の解とする.

実際には \mathcal{P}_1 は R1, R2 の複合した問題であるので, 優先関係 $R1 > R2$ の下で同時に考慮しなければならない. そこで各階層ごとに重心法を修正した次のような一連の処理を行う. 第 s 階層について下向きの場合,

(1) 第 $s-1$ 階層の要素に左から $1, 2, \dots, |V_{s-1}|$ の重さを与える.

(2) 第 s 階層の節点を枝 E_{s-1} で結合する第 $s-1$ 階層の節点の重心⁹⁾で並べ替え, 順序 r_s を求める. 順序 r_s から第 $s-1$ 階層の各節点の重心も求める.

(3) 有向グラフ $D_s = (V_s, E_s, \Psi_s^{0+} \mid E_s, \Psi_s^{0-} \mid E_s)$ から2段グラフ $D_s^B = (V_s^B, E_s^B, \Psi_s^{B+}, \Psi_s^{B-})$ を構成する.

(4) V_s の下段の節点の順序を r_s とし, 上段の節点の重心を求め, 適当に第 $s-1$ 階層中に挿入する.

(5) 第 s 階層の節点を枝 $E_s^B \cup E_{s-1}$ で結合する $V_s^B \cup V_{s-1}$ の節点の重心で並べ替え, 順序 r_s を求める.

以上の処理を重心法と同様に, 下向きと上向きを交

互に数回繰り返す. (1), (2)で描画規則 R1 に従って順序 r_i が求められ, その r_i を基に(3), (4), (5)で R2 に関して修正がなされるという意味でこの方法は $R1 > R2$ の優先関係があるとする.

アルゴリズム 4.4

順序決定アルゴリズムは手続き ORDER として次のように表される. ORDER は, 正規複合階層グラフ $G=(V, E, C, \Psi^+, \Psi^-, \Phi^+, \Phi^-)$ と, 節点集合 $W \subseteq V$ を引数とし, $De(W)$ の各階層内での順序を決定する.

```

procedure ORDER(G: 複合グラフ; W: 節点集合);
begin
  for ( $\forall v \in W$ ) do begin
    局所グラフ  $G_v^o$  を構成する;
     $G_v^o$  について問題  $\mathcal{P}_1$  を解き,  $V_v^o$  の
      全要素の順序を決定する;
    ORDER(G, Ch(v))
  end
end;
    
```

計算時間は階層数や各階層への節点の分布状況に強く依存するが, 最悪の場合でも $O(|V|^3)$ で計算できる.

4.4 座標決定

このフェーズでは, 階層および階層内における順序の決定した各節点の座標値を決定する. 垂直座標値は各節点の複合階層値から容易に決定できる. 水平座標値決定の際に描画規則 R3, R4, R5 を考慮する.

座標決定は, 順序決定とは逆に包含木を葉から根へ再帰的にたどりながら, 節点ごとにその子の集合から座標決定用局所グラフと呼ばれる有向グラフを構成し, それを対象に処理を進める.

定義 4.9

複合階層グラフ $G=(V, E, C, \Psi^+, \Psi^-, \Phi^+, \Phi^-)$ において, 節点 $v \in V$ に関する座標決定用局所グラフ G_v^o を次のように構成する.

$$\begin{aligned}
 G_v^o &= (V_v^o, E_v^o, \Psi_v^{o+}, \Psi_v^{o-}) \\
 V_v^o &= Ch(v) \\
 E_v^o &= \{e \in E \mid \Psi^+(e), \Psi^-(e) \in V_v^o\} \\
 \Psi_v^{o+} &= \Psi^+ \mid E_v^o \\
 \Psi_v^{o-} &= \Psi^- \mid E_v^o
 \end{aligned}$$

座標決定には領域外の情報は用いないで, 座標決定用局所グラフは節点に直接含まれる節点とそれに接続する隣接枝だけで構成する. 順序決定用局所グラフと同様に $Ch(v)$ をすべて点と見なし $Ch(v)$ の各子孫と接続する隣接枝から作られたものだが, A, P は考慮にいれず, また, 自己閉路だけでなく, 同階層内の節点

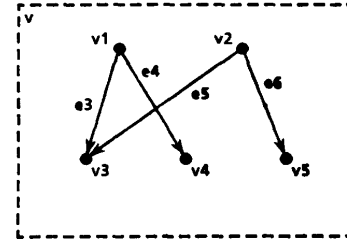


図 8 G (図 5) の節点 v に関する座標決定用局所グラフ G_v^o

Fig. 8 A local graph G_v^o for vertex v in G (Fig. 5) to determine places of vertices.

を接続する枝も取り除く. 例として, 図 5 に示される複合階層グラフの節点 v に関する局所グラフ G_v^o を図 8 に示す.

局所グラフ G_v^o において, 解決すべき問題を \mathcal{P}_2 と呼ぶ. これは文献 8) に従い, 次のように定式化できる.

$$G_v^o = (V_v^o, E_v^o, \Psi_v^{o+}, \Psi_v^{o-}) \text{ において, }$$

各節点の中心の x 座標を関数

$$x: V_v^o \rightarrow \mathbf{R}$$

で表す. $w \in V_v^o$ に対して, $E_w^L, E_w^U, g^L(w), g^U(w)$ を次のように定義する.

$$E_w^L = \{e \in E_v^o \mid \Psi_v^{o-}(e) = w\}$$

$$E_w^U = \{e \in E_v^o \mid \Psi_v^{o+}(e) = w\}$$

$$g^L(w) = \begin{cases} x(w) - \frac{\sum_{e \in E_w^L} x(\Psi_v^{o-}(e))}{|E_w^L|} & \text{if } |E_w^L| \geq 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$g^U(w) = \begin{cases} x(w) - \frac{\sum_{e \in E_w^U} x(\Psi_v^{o+}(e))}{|E_w^U|} & \text{if } |E_w^U| \geq 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

このとき, 隣接節点の近接性 f_4 , 隣接枝の対象性 f_6 は次のように表される.

$$f_4 = \sum_{e \in E_v^o} \{x(\Psi_v^{o+}(e)) - x(\Psi_v^{o-}(e))\}^2$$

$$f_6 = \sum_{w \in V_v^o} \{g^U(w)^2 + g^L(w)^2\}$$

描画規則 R4 は f_4 を, R5 は f_6 を最小化する関数 x を求めることである. ただし, 描画規則 R1, R2, R3 から次の制約条件が要求される.

R1, R2 に関し,

$\forall v, w \in V_v$ に対して, $r_i(v) < r_i(w)$ のとき $x(v) + \alpha < x(w)$.

ただし $1 \leq i \leq TL(V_v^o)$. α は v, w の幅と間隔から決まる.

R3 に関し,

$\forall e \in E_i^p$ に対して, $\Psi_i^{p+}(e)$ と $\Psi_i^{p-}(e)$ が共にダミー節点のとき, $x(\Psi_i^{p+}(e)) = x(\Psi_i^{p-}(e))$.

問題 \mathcal{P}_2 は以上の制約条件の下で,

$$c_2 f_4 + (1 - c_2) f_5 \quad (0 < c_2 \leq 1)$$

を最小化する関数 x を求めることである. c_2 は加重係数である.

問題 \mathcal{P}_2 の解決には, 計算コストを下げるために, 有向階層グラフの自動描画のために開発された発見的解法, 優先度法⁹⁾ を利用する.

優先度法とは, ある規則に従って節点に優先度を定め, 優先度の高い順に座標を改善することを, 各階層ごとに何度か繰り返すことで節点の座標を決定する方法である. このとき, 順序決定のフェーズで決定した順序を保存することで $R_1, R_2 > R_3, R_4, R_5$ が成立する. 優先度法において, まず隣接枝の直線性 (R_3) を達成するように優先度を設定できるという意味で $R_3 > R_4, R_5$ である. さらに, 近接性 (R_4) を高めるための節点の座標の改善を主処理とし, それを接続次数の大きい順に行い, なるべく多くの隣接枝の対称性 (R_5) を目指すことで $R_4 > R_5$ であるとする.

アルゴリズム 4.5

座標決定アルゴリズムは手続き *PLACE* として次のように表される. *PLACE* は, 正規複合階層グラフ $G = (V, E, C, \Psi^+, \Psi^-, \Phi^+, \Phi^-)$ と, 節点集合 $W \subseteq V$ を引数とし, $De(W)$ の各節点の座標を決定する.

procedure *PLACE*(G : 複合グラフ; W : 節点集合);

begin

for ($\forall v \in W$) do begin

if ($Ch(v) \neq \phi$) *PLACE* ($G, Ch(v)$);

局所グラフ G_v^p を構成する;

G_v^p について問題 \mathcal{P}_2 を解き, V_v^p の

全要素の v に対する相対座標を決定する

end

end;

□

順序決定と同様に計算時間は階層数などに強く依存するが, 最悪の場合でも $O(|V|^2)$ で計算できる.

5. 出力例とまとめ

前章までに述べた方法に従って, 我々は複合階層グラフの自動描画システムを開発した. 図9に実際の出力例を示す. これは, 節点数 57, 隣接枝数 39, 包含枝数 56 の複合階層グラフである.

複合階層グラフ自動描画の手法は, 発想支援系の構築のための基礎技法として重要な位置を占め, また

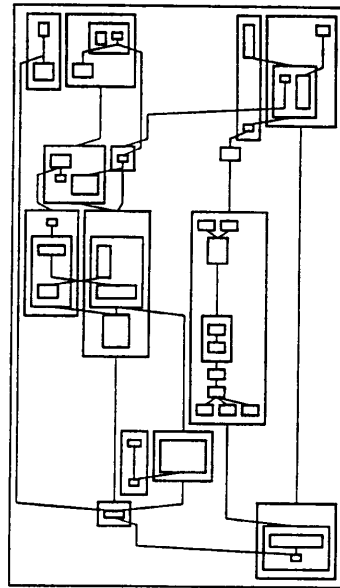


図9 自動描画システムによる複合グラフの描画例
Fig. 9 An example of automatic compound graph drawing.

ユーザ・インタフェース等にも幅広く応用できると考えられる.

今後の課題として以下の項目について検討している.

(i) 描画対象の拡張として, 制約 1, 2 の排除, および有向・無向隣接枝の混在する複合グラフについて.

(ii) 複合階層化可能性についての考察, および一般的な複合グラフの複合階層グラフへの変換について.

(iii) 手描き様曲線の利用やカラー化等を含めたより広い観点からの描画の認知的基準の見直し.

(iv) 言語情報の埋め込み, 取り扱いについて.

謝辞 本研究の機会を与えて頂きました北川敏男会長ならびに榎本肇所長に感謝致します.

参考文献

- 1) Kirchem, R. G.: *MORE User's Guide*, Living Videotext, Inc., California (1987).
- 2) プラン up 操作マニュアル, Dynaware Corporation, 大阪 (1986).
- 3) Goodman, D.: *The Complete HyperCard Handbook*, p. 720, Bantam Books, Toronto (1987).
- 4) 小山雅庸, 河合和久, 大岩 元: 発想支援ツール KJ エディタの設計, 第 34 回情報処理学会全国大会論文集, 5 K-9 (1987).

- 5) 川喜田二郎: 続・発想法, p. 316, 中央公論社, 東京 (1970).
- 6) Eades, P. and Tamassia, R.: Algorithms for Automatic Graph Drawing: An Annotated Bibliography, Technical Report No. 82, University of Queensland, Department of Computer Science (1987).
- 7) Tamassia, R., Di Battista, G. and Batini, C.: Automatic Graph Drawing and Readability of Diagrams, *IEEE Trans. SMC*, Vol. 18, No. 1, pp. 61-79 (1988).
- 8) Sugiyama, K., Tagawa, S. and Toda, M.: Methods for Visual Understanding of Hierarchical Systems, *IEEE Trans. SMC*, Vo. 11, No. 2, pp. 109-125 (1981).
- 9) Sugiyama, K.: A Cognitive Approach for Graph Drawing, *Cybernetics and Systems*, Vol. 18, pp. 447-488 (1987).
- 10) 杉山公造, 三末和男: ヒューマンインタフェースとしての図形言語 I, II, III, 第 1, 2, 3 回ヒューマン・インタフェース・シンポジウム論文集, pp. 127-132, pp. 479-484, pp. 303-308 (1985, 1986, 1987).
- 11) 三末和男, 杉山公造: 複合階層グラフとその描画法について—発想支援系の基礎技法の開発—, 第 36 回情報処理学会全国大会論文集, 5Z-5 (1988).
- 12) 三末和男, 杉山公造: カード・システムを抽象化した複合グラフとその階層的描画法について, 情報処理学会グラフィクスと CAD 研究会資料, CG-32 (1988).
- 13) Conklin, J.: Hypertext: An Introduction and Survey, *IEEE Computer*, Vol. 20, No. 9, pp. 17-41 (1987).
- 14) 杉山公造: 図的思考展開支援に関する基礎的研究—発想系情報学の構築に向けて—, 富士通(株)国際情報社会科学研究所研究報告, 第 24 号, 第 25 号 (1988).
- 15) Wirth, N.: *Algorithms+Data Structures=Programs*, p. 366, Prentice-Hall, New Jersey (1976).
- 16) Even, S.: *Graph Algorithms*, p. 249, Computer Science Press, Maryland (1979).
- 17) Mäkinen, E.: *Experiments on Drawing 2-Level Hierarchical Graphs*, Series of Publications A, A-1988-1, Department of Computer Science, University of Tampere (1988).

付録 線形配置問題に対する重心法の評価

有向グラフの線形配置問題に対する発見的解法としての重心法を評価する。

適用法

有向グラフ $D=(V, E, \Psi^+, \Psi^-)$ から構成された 2

段グラフを

$$D^B=(V^B=VUE, E^B, \Psi^{B+}, \Psi^{B-})$$

とし, E の要素を上段に, V の要素を下段に配置する。 D^B に重心法を適用するが, 重心法は結果が初期順序に依存するため, 下段の初期順序を与えて上向き処理(上段の並べ替え)から開始する。

評価法

いくつかのグラフを対象に, 線形配置問題の最適解, 最悪解, そして重心法による解(発見的解と呼ぶ)による枝の総長を比較する。

実験データの数を表 2 に示す。対象は節点数 4 以上 8 以下の単純連結グラフ。節点数 5 以下ではすべてのグラフを, 6 以上ではランダムに生成したいくつか(サンプル数)のグラフをサンプルとする。節点数 6 以下ではすべての順序を, 7 以上では無作意に抽出した複数(初期順序数)の順序を初期順序として重心法を適用した。繰り返し数は, 重心法において上向き下向きを 1 回とした繰り返しの数である。

ランダムなグラフの生成は, 完全グラフの各枝に 0

表 2 実験データのサンプル, 初期順序, 繰り返し数
Table 2 The number of samples, initial orders and iterations for experimentation of BC-method.

節 点	サンプル	初期順序	繰り返し
4	6 (全部)	24 (全部)	2
5	21 (全部)	120 (全部)	3
6	1000	720 (全部)	3
7	100	1000	3
8	100	1000	3

表 3 線形配置問題への重心法適用の評価結果
節点数 6, サンプル数 1000, 初期順序 720 (=6!) 通り, 繰り返し 3 回

Table 3 Evaluation of the application of BC-method to linear arrangement problem. 6 vertices, 1000 samples, 720 (=6!) initial orders and 3 times iteration.

rate	min	max	init	exp
0.200	3.000	9.000	7.000	3.000
0.267	4.200	13.800	9.000	5.096
0.333	5.847	17.068	11.000	7.169
0.400	8.053	19.973	14.000	9.532
0.467	10.217	22.401	16.000	12.013
0.533	12.487	24.584	18.000	14.796
0.600	14.937	26.889	21.000	17.645
0.667	17.590	28.760	23.000	20.684
0.733	20.273	30.568	25.000	23.717
0.800	23.200	31.733	28.000	26.618
0.867	26.333	30.000	30.000	29.597

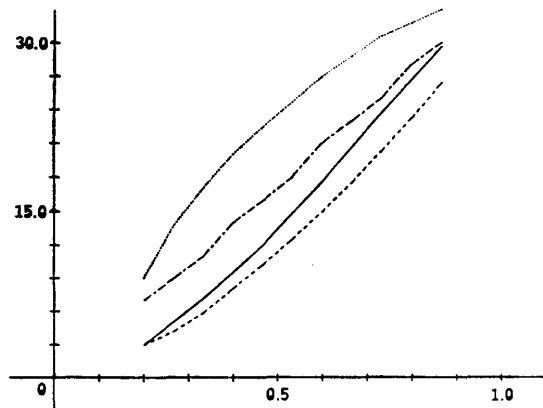


図 10 線形配置問題への重心法適用の評価結果
横軸：完全グラフの枝数に対する枝数の割合。
縦軸：枝の総線長。

..... 最悪解の平均, ----- 初期順序での平均,
—— 重心法による解の平均, -.-.-.- 最適解の平均。
Fig. 10 Evaluation of the application of BC-method
to linear arrangement problem.
horizontal axis: the density of edges.
vertical axis: mean of the total length of
edges.
..... the worst solutions,
----- initial orders,
—— heuristic solutions,
-.-.-.- the optimal solutions.

または 1 を等確率 0.5 で与え、0 の枝を完全グラフから取り除き単純連結グラフとなるものだけを採用することで行った。

評価結果

節点数 6 についての評価結果を表 3 に示す。左から完全グラフの枝数に対する枝数の割合 (edge)、枝数の割合の等しいグラフにおける最適解の平均 (min)、最悪解の平均 (max)、初期順序での平均 (init)、発見的解の平均 (exp) である。その他のデータについても発見的解の平均は最適解の高々 1.2 倍程度である。

表 3 をグラフにしたものが図 10 である。横軸が完全グラフの枝数に対する枝数の割合、縦軸が枝の総長である。上から、破線が最悪解の平均、一点又線が初期順序での平均、実線が発見的解の平均、点線が最適解の平均である。

対象としている問題（可読性を重視したグラフの自動描画）の性質から判断して枝数は比較的少ないと仮定できる。もし、これに反して枝数が完全グラフに近づくと最適解を得ても見やすさには余り貢献しない。したがって、本研究の問題に対しては十分実用になると判断できる。

(昭和 63 年 7 月 25 日受付)

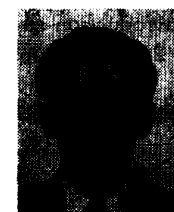
(平成 元年 7 月 18 日採録)

三末 和男 (正会員)



1962 年生。1984 年東京理科大学理工学部情報科学科卒業。1986 年同大学院理工学研究科修士課程（情報科学）修了。同年より富士通(株)国際情報社会科学研究所に勤務。発想支援系に関する研究に従事。他に、プログラミング言語、形式言語、形式意味論に興味を持つ。日本ソフトウェア科学会会員。

杉山 公造 (正会員)



昭和 20 年生。昭和 49 年名古屋大学大学院理学研究科博士課程修了。同年富士通(株)国際情報社会科学研究所入所。現在、第一研究部長。システム分析技法、構造情報の視覚化などの研究を経て、現在は個人/集団の思考展開支援環境の研究に従事。理学博士。計測自動制御学会会員。