ショートノート

代数方程式の大域的解法の初期値に対する一注意†

五十嵐 正夫††

代数方程式の大域的解法に対して初期値の改良を行った場合次のような問題が生じることがある．(a)反復回数の増加，(b)近似解の数値的発散，(c)近似解の精度の劣化．ここではその原因を調べ防止策を述べる．

1. はじめに

代数方程式

$$f(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\cdots a_{n-1}z+a_n=0 \quad (a_n\neq 0) \tag{1}$$

の数値解を同時に求める解法は一般に大域的解法[1]と呼ばれる．それらは収束の次数に従い1次から m 次の解法まで存在する．その大域的解法における初期値はすべての解を含むような半径 r の円の周上に等間隔にとられることが多い．その場合 m 次の大域的解法における近似解は最初のうちは減少率

$$1-(m-1)/(n-2+m) \quad m=2,3,4,5,6,7. \tag{2}$$

で解の中心に向かうことが知られている[2),3)]．それらの減少率は1次であるため半径の決定は解法の能率化（反復回数の減少）に大きな影響を与える．そのため初期値の改良に対する論文も多い[4),5)]．しかしながら初期値の改良を行った場合に生じる次の危険な兆候に対して言及している論文は見あたらない．

（a） 反復回数の増加

（b） 近似解の数値的発散

（c） 近似解の精度の劣化

本小論では上記の問題についてその原因を調べ，それを防止するアルゴリズムについて考察してみる．

2. 解の限界の評価

$f(z)=0$ の解で絶対値最大解の限界を

$$z^n-|a_1|z^{n-1}-\cdots-|a_{n-1}|z-|a_n|=0 \tag{3}$$

の正数解（一意的）R で評価する．R の数値解を求めるには(3)に対しては2分法が適当である．例えばNewton-Raphson 法を適用しようとすると初期値をうまく選ばないと目的の正数解がとらえ難い場合が多いからである．また(3)の正数解の限界，すなわち2分法のゼロ以外の初期値は

$$\max_k(n|a_k|)^{1/k} \quad k=1,2,3,\cdots,n \tag{4}$$

等で求めるものとする．(4)で機械的に正数解の限界を求めようとするとそれがゼロとなる場合があるから注意を要する．例えば $f(z)=(z-3)(z-3)$ の解の重心をゼロに移せばその方程式は $z^2=0$ となる．したがって正数解の限界もゼロとなる．

(3)で得られた正数解を $R(\sup)$ と書くことにする．さらに(1)の最大解の下側からの限界 $R(\inf)$ を

$$R(\inf)=R(\sup)\times(2^{1/n}-1) \tag{5}$$

で評価する[6)]．

次に(1)の最小解（絶対値）の限界は

$$|a_n|z^n+|a_{n-1}|z^{n-1}+\cdots+|a_1|z-1=0 \tag{6}$$

の正数解（一意的）で評価できる．その値を $r(\inf)$ とおくと $r(\inf)=1/R(\sup)$ であるから(6)は直接計算する必要はない．最小解のいわば上限 $r(\sup)$ を

$$r(\sup)=r(\inf)/(2^{1/n}-1)(=1.0/R(\inf)) \tag{7}$$

で評価する[6)]．

以上求めた解の限界 $R(\sup)$, $R(\inf)$, $r(\sup)$, $r(\inf)$ は数値解を解の存在する円環域に常に閉じこめておく指標として用いることができる．

ここでまた解の限界 $R(\sup)$, $R(\inf)$, $r(\sup)$, $r(\inf)$ の大きさについて一つの注意を与えておく．それらの値は一般には

$$R(\sup)>R(\inf)>r(\sup)>r(\inf)$$

を満足すると期待される．しかしながら実際には

$$R(\sup)=r(\inf) \text{ とか } r(\inf)>R(\inf)$$

となる場合があるから注意を要する．

例1 $z^{50}-1=0$ の解の限界を2分法によって求める場合，数値解として右側の値をとると

† A Note on the Initial Values for Global Methods of Algebraic Equations by MASAO IGARASHI (Mathematical Laboratory, College of Agriculture and Veterinary Medicine, Nihon University).

†† 日本大学農獣医学部数学研究室

$R(\sup) = 1.000002 \quad R(\inf) = 0.0139595$

$r(\sup) = 71.63603 \quad r(\inf) = 1.000002$

となることがある．これらの値を2次の大域的解法に適用したとしよう．出発値の円の半径として $R(\sup)$ や $r(\inf)$ をとるとうまく近似解に収束する．

問題点をはっきりさせるために簡単な例題を用いたがこのような事例はよく見られる．

3. 重心の移動

なるべく小さな半径 R を求めるために解の重心を原点に移してから $R(\sup)$ 等を計算する方法がある．(1)の方程式に $z=w-a_1/n$ の変換を施した後の方程式を

$$g(w)=w^n+b_2w^{n-2}+\cdots+b_{n-1}w+b_n \qquad (8)$$

とおく．この平行移動の後で半径を求めそれを利用して初期値を与えると，数値解に収束するまでの反復回数は平行移動しない場合に比べて一般には減少する．しかしながらそのような解の平行移動を行った場合には $g(w)=0$ のある数値解 w' を平行移動して $z'=w'-a_1/n$ とするときこれが $f(z)=0$ の近似解となっているかを常に検証する必要がある．数値例で調べてみる．

例2　10 次の方程式 $f(z)=0$ の解を

$$z(k)=2\times 10^{-k}+3\times 10^{-k}i, \quad k=1,2,\cdots,10$$

とする．解の重心をゼロとするような平行移動を行わなければほぼ計算桁と同程度の数値解が得られる（表1参照）．しかしながら解の重心をゼロとするために $w=0.02222222222+0.03333333333i$ の平行移動を行うと比較的大きな三つの数値解をのぞき原方程式の数値解とは言えないような近似解が出現する（表2参照）．ここでの反復は関数値が誤差のみとなったとき停止した．平行移動後の z^{n-1} の係数がゼロとなっていないが仮にここをゼロとおいてもほぼ同様の数値結果が得られる．この方程式はいわゆる悪条件の方程式ではない．平行移動前，および後の係数を比較すればわかるように解の平行移動によって解が平滑され（こ

表1　平行移動しない場合の数値結果
Table 1 Numerical results of given equation.

実　部 Real	虚　部 Imag.
.2000000000000000D+00	.3000000000000000D+00
.1999999999999999D−01	.2999999999999999D−01
.2000000000000001D−02	.3000000000000001D−02
.2000000000000001D−03	.2999999999999999D−03
.1999999999999999D−04	.3000000000000000D−04
.2000000000000000D−05	.3000000000000001D−05
.2000000000000000D−06	.3000000000000000D−06
.2000000000000000D−07	.2999999999999999D−07
.2000000000000000D−08	.3000000000000001D−08
.2000000000000001D−09	.2999999999999999D−09

(MS-DOS FORTRAN, Double Precision)

表2　平行移動した場合の数値結果
Table 2 Numerical results of translated equation.

実　部 Real	虚　部 Imag.
.2000000000000000D+00	.3000000000000000D+00
.1999999999999999D−01	.2999999999999999D−01
.1999999378349368D−02	.2999993148219852D−02
−.1856688228222304D−03	−.6859801581742125D−03
−.1155314564760118D−03	.8280239710093673D−03
−.5035985285634509D−03	−.2098110526974686D−03
−.5082790714755932D−03	.2880508777603069D−03
.4036422569843531D−03	−.4940273706377993D−03
.4880335827328122D−03	.5829827577273697D−03
.8168023020678310D−03	−.2742435795066722D−05

(MS-DOS FORTRAN, Double Precision)

表3　原方程式の係数（高次から）
Table 3 Coefficients of given equation from high order.

実　部 Real	虚　部 Imag.
.1000000000000000D+01	.0000000000000000D+00
−.2222222222000000D+00	−.3333333333000000D+00
−.5611672272166105D−02	.1346801345319865D−01
.5167906345110543D−04	−.1011112110999889D−04
−.1337048473477933D−07	−.1348284174935730D−07
−.1370767914774895D−12	.6707774140332891D−12
.2286465246661843D−17	−.9303160807056543D−18
−.7363143083881413D−24	−.4998264202042783D−24
−.2682379346095364D−33	.3205387201861279D−31
.9573111110153800D−40	−.6266999999373300D−40
−.3415250000000000D−49	−.1456679999999999D−49

表4　平行移動後の係数（高次から）
Table 4 Coefficients of translated equation from high order.

実　部 Real	虚　部 Imag.
.1000000000000000D+01	.0000000000000000D+00
.2081668171172169D−16	−.4163336342344337D−16
.2216610550005612D−01	−.5319865320013469D−01
.1060661110082834D−01	−.2075206519727284D−02
.6913647516470719D−03	.6971745394760387D−03
−.1066229637825549D−04	.5217533555588961D−04
−.1693242294737730D−05	.6889457592348116D−06
−.3280813499343492D−07	−.2227088687607444D−07
.4305273245869366D−11	−.5144711460336186D−09
.2882501119749392D−11	−.1887018160324349D−11
.7059402864249453D−14	.3010992157029457D−14

(MS-DOS FORTRAN, Double Precision)

の場合には w を中心として)，原方程式の小さい解に対する情報が切り捨てられるために良条件の方程式が悪条件，すなわち近接解をもつ方程式になる例である（**表3**，**表4**参照）．このことは解の平行移動における係数のみを高精度計算したとしても避けられない現象である．一般には係数を高精度計算した上に反復計算の計算桁数を各 $z'=w'-a_1/n$ の桁落ち分は少なくとも増加させて行う必要がある．表2における第3番目以降の数値解7個の桁落ちがほぼ2桁であるから，全体で $2\times7=14$ 程度の桁落ちがある．よってこの例題では 30 桁計算して初めて表1と同じ 16(=30−14) 桁程度の精度が得られることになる．

解の平行移動によって数値解の精度桁が増加する特異例があることに触れておく．例えば $f(z)=(z-12.5)^3$ の場合解を平行移動すると（2倍長程度で）ほぼ計算桁と同程度の数値解が求まる．12.5 平行移動することにより $z^3=0$ となるからである．このようなことの起こる可能性があるのは $f(z)=(z-\alpha)^n$ といった形の方程式に限られる．

4. アルゴリズムについて

いままでの考察をもとに，与えられた代数方程式の解の重心をゼロに移すことによって数値解を求める場合の留意点についてまとめてみる．

(a) 平行移動した後 b_n はゼロか否か．
$b_n=0$ だと解法の途中で計算のあふれを起こす場合がある．

(b) $R(\sup)$, $R(\inf)$, $r(\sup)$, $r(\inf)$ の値の大きさのチェック．
我々の実験では出発値の円の半径として2番目に大きな値をとった場合が平均的に反復回数が少なかった．

(c) 各段階での各数値解 z は

$$r(\inf)/2<z<2R(\sup)$$

を満足しているか．
最大円，および最小円の半径にウエイトをつけたのは解の近傍での数値解のふらつきを考慮したためである．もし数値解が上の不等式を満足していない場合にはその数値解の大きさを改めて $R(\sup)$ とする．

(d) 平行移動量 w と数値解の大きさの比較．
w に対して得られた数値解が桁落ちを起こしていると原方程式は良条件でも，平行移動後は悪条件となっているため再度原方程式に戻り数値解をチェックする必要がある．

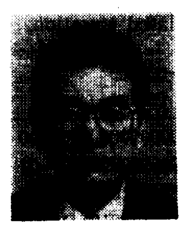
5. おわりに

解法の効率化を計るために解を平行移動したり，小さめの出発値を大域的解法に与えたりすると数値解の精度が大きく変化したり，近似解のユーターン現象が起きて反復回数が逆に増加したりする．初期値を改良することにより解法の効率化を計る場合，少なくとも上に述べたような点をチェックをする必要がある．

参考文献

1) Durand, E.: *Solutions Numériques des Équations Algébriques*, TOME 1, Paris (1960).
2) 山本哲朗，古金卯太郎，野倉久美：代数方程式を解く Durand-Kerner 法と Aberth 法，情報処理学会論文誌，Vol. 18, No. 6, pp. 566-571 (1977).
3) 五十嵐正夫：代数方程式と大域的解法，情報処理学会数値解析研究会報，Vol. 89, No. 25, pp. 1-8 (1989).
4) 長嶋秀世，長嶋祐二：Durand-Kerner 法に対する初期近似，電子通信学会論文誌，Vol. J 63-D, No. 8, pp. 611-617 (1980).
5) 中田多美，川本則行，名取　亮：代数方程式に対する Durand-Kerner 法の初期値の改良，情報処理学会論文誌，Vol. 29, No. 12, pp. 1200-1207 (1988).
6) Marden, M.: *The Geometry of the Zeros of a Polynomial in Complex Variable*, AMS (1949).

(平成元年4月11日受付)
(平成元年9月12日採録)



五十嵐正夫（正会員）
1945年生．日本大学理工学部数学科卒業．同大学院博士課程中退，現在日本大学農獣医学部助教授．数値計算における誤差に興味，現在は代数方程式の解法にも興味をもつ．AMS, SIAM, 日本数学会各会員．