# 含意限定：非単調推論による高次推論の一形式†

有 馬 淳††

新たな事実が導入される可能性のある環境では，論理的飛躍のあるいかなる推論も，無矛盾性を保つために非単調な性質を持たざるをえない．非単調推論として研究が進められてきた暗黙推論 (default reasoning) のみならず，帰納的推論や類推等の高次の推論もまたその例外ではない．本研究は，様々な高次の推論を非単調推論としてとらえることによって，統一的に形式化することを目的とする．高次の推論の統一的形式化には，形式的な議論のもとで様々な推論の比較や考察を行える利点がある．形式言語を解釈する構造間にし好 (preference) を表す順序を導入することによって，非単調推論は与えられた論理式を満たす「もっとも好ましい」モデル上での演えきとして形式化される．ここで提案する含意限定 (ascription) は離散的なし好順序に基づいた形式化で，『$P$ であることが記されているものがすべて $\Psi$ の性質を持っているならば，$P$ の性質を持つものはすべて $\Psi$ の性質を持つ．また逆に，$P$ ではないことが記されているものが，すべて $\Psi$ の性質を持っていないならば，$P$ の性質を持たないものはすべて $\Psi$ の性質を持たない』との考えを表したものである．含意限定は知的システムによる仮説生成などの高次の推論の形式化に適していると考えられる．

## 1. まえがき

人間の行う推論は必ずしも論理的（演えき的）なものではなく，いわば“論理的飛躍”が見られる場合がある．論理的飛躍のある推論，つまりある仮説，前提なしには演えきできない結論を導く“高次の推論”は，類推や帰納[1),2)]，暗黙推論(default reasoning)[3),12),14)]，発想[5)] 等，いくつかの分類が行われ個別に研究されてきた．しかし，このような論理的飛躍のあるいかなる推論結果も，新たに導入される事実と矛盾を起こす可能性があり，無矛盾性を保つためには以下の共通した性質を持たざるをえない．すなわち，かつて定理だったもの（推論結果）が必ずしも新しい知識のもとで定理とならないという性質である．知識（公理）の増加が必ずしも定理の増加につながらないこのような推論の性質をわれわれは非単調性 (nonmonotonicity) と呼んでいる[12)]．

一方，非単調推論の形式としては McCarthy の提案した極小限定 (circumscription)[9)~11)]があげられる．極小限定は，閉世界仮説的な考え方，『ある性質を満たすものは，述べられているもの以外存在しない』との考えを定式化したものである．しかし，こういった考え方は知識の一般化が本質である推論，例えば帰納，類推等を表してはいない．

本論文では，以上の見解に立ち，高次の推論を細分化して論ずるのではなく，（時には演えきさえも含めて）無矛盾性を保つ非単調推論としてとらえる新しい見方を示し，さらにその視点に立った統一的な形式化を試みる☆．

2章では演えきから高次推論までとらえることのできる非単調推論の一般的な形式化の手法について述べる．この手法ではモデル間に順序構造を導入するが，実際にどういった順序を採用するかが主要な問題となる．そこで，3章以降では，高次の推論を一般的にとらえることを目的とした特殊な順序を導入し，含意限定 (ascription) と呼ぶ論理的枠組みを提案する．直観的に言うと，含意限定は『$P$であることが記されているものがすべて$\Psi$の性質を持っているならば，$P$の性質を持つものはすべて$\Psi$の性質を持つとする．また逆に，$P$ではないと記されているものがすべて$\Psi$の性質を持っていないならば，$P$の性質を持たないものはすべて$\Psi$の性質を持たないもとする』との考え，すなわち，概念間の含意関係に着目した帰納的な考えを定式化したものである．3章で含意限定の厳密な定義を与える．4章では極小限定との比較をモデル論に即して説明し，含意限定に適した応用について述べる．

## 2. 非単調推論の形式

本稿で使用するいくつかの記法について説明する．ボールドで書かれた英文字は，有限個の記号組を表す．例えば $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$ は，適当な数の引数を持つ有限個の述語組，$P^1(x_1^1, \cdots, x_{n_1}^1), \cdots, P^m(x_1^m, \cdots, x_{n_m}^m)$を表す．また，ここで“述語”とは一般に，$P$または $\lambda \boldsymbol{x}.(W(\boldsymbol{x}))$ で表されるものを考える．ここで，$P$は述語記号，$W(\boldsymbol{x})$ は整式(well-formed formula)であり，$\boldsymbol{x}$ は個体変数の組で，$W(\boldsymbol{x})$ 中で自由に現れているとする．

† Ascription: A Form of Various Types of Conjectural Reasoning as Nonmonotonic Reasoning by JUN ARIMA (Institute for New Generation Computer Technology).

†† (財)新世代コンピュータ技術開発機構

☆ 本研究は文献 4) で紹介した研究を発展，修正したものである．

他の自由な現れは定数と見なす．そのほかの記法は一般的なものに準ずる．

次に一つの一般的な非単調推論の形式を与え，それをもとに今後の議論を進めることにする．

述語，関数間にし好 (preference) を表す擬順序 (pseudoorder) "≧" を導入し，この関係を "し好順序" と呼ぶことにする（擬順序は反射律，推移律は成り立つが，反対称律は必ずしも成り立たない）．$\boldsymbol{K}_1$, $\boldsymbol{K}_2$ を同数項の述語または関数の組とするとき，「$\boldsymbol{K}_1$ が $\boldsymbol{K}_2$ より好ましい ($\boldsymbol{K}_1$ is preferred over $\boldsymbol{K}_2$)」ことを "$\boldsymbol{K}_1 \geqq \boldsymbol{K}_2$" で表すことにする．このとき，ある述語定数または関数定数からなる組 $\boldsymbol{K}$ の要素が現れる述語論理式 $A$ において，先のし好順序に従って「最も好ましい」解釈を $\boldsymbol{K}$ に与える．これは，次の式により表すことができる☆．

$$A \wedge \neg \exists \boldsymbol{p}.(A(\boldsymbol{p}) \wedge \boldsymbol{p} > \boldsymbol{K}). \qquad \text{(A1.1)}$$

ここで，$\boldsymbol{p}$ は述語または関数変数の組であり，$A(\boldsymbol{p})$ は $A$ における $\boldsymbol{K}$ の要素の現れを同時にすべて対応する $\boldsymbol{p}$ の要素に置き換えたものである．また，"$>$" は次の略記法である．すなわち，$\boldsymbol{K}_1 > \boldsymbol{K}_2$ は $\boldsymbol{K}_1 \geqq \boldsymbol{K}_2$ であってかつ $\boldsymbol{K}_2 \geqq \boldsymbol{K}_1$ でないことを意味するものとする．

さて，(A1.1)の意図的な意味は，与えられた論理式 $A$ に対し，それ以下の論理式によって次の制限を加えることである．すなわち，$A$ を満足する述語（または関数）で $\boldsymbol{K}$ より好ましい述語（または関数）は存在しないという制限である．言い換えると，$\boldsymbol{K}$ がし好順序に関して極大の値をとるということを宣言的に表したものにすぎない．したがって，$A$ とし好順序の組合せによっては(A1.1)は極大値が存在せず充足不能になる．

しかし，この形式は多くの推論を形式的にとらえる手段として有効であることをここで指摘したい．し好順序によって与えられた知識のもとで，もっとも好ましい解釈を述語に与えることは，まさに，与えられた知識のモデルの集合のうちから，好ましい解釈を持つモデルを選択していることにほかならない．$A$ と無矛盾ないかなる式も $A$ のいくつかのモデル上での論理的帰結となるから，どんな無矛盾な推論も，$A$ のモデル集合の空でないある部分集合上での論理的帰結としてとらえることができるはずである．その部分集合が $A$ のモデル集合全体と一致するとき，すなわち，$A$ のモデルすべてが極大的に好ましくなる順序構造を導入すると，その推論は演えきを表すことになり，そうでないとき，なんらかの論理的飛躍のある非演えき的な推論となる．

もちろん，このような一般的な形式化がすべての問題を解決しているわけではない．人間の行うような非演えき的推論の定式化を試みる理論では，何を好ましいとするか，その好ましさをどう形式化するかが主要な問題となる．次章以降では実際にある順序構造を与え，含意限定と呼ぶ論理式を提案しその性質について議論を行う．

## 3. 含意限定

### 3.1 含意限定の形式

人間の知的活動で重要な役割をはたしているように思える一般的な知識，経験的知識や因果関係の知識，『…であれば…となる』，概念知識，『…は…である』等の多くの知識は含意関係によって表現されている．また，人間が行う高次の推論がこの含意関係の推定と深く関係しているのは十分予想できる．例えば，含意関係は帰納によって与えられ，また類推は含意関係からの演えきであると考えられる．このことから，含意関係の推定を形式化することが高次推論の重要な側面を形式化することにつながると考えた．ここでは，非単調推論の一形式として含意関係の推定を形式化する．そのために含意関係の帰納的な言明に基づいてし好順序を特定し，それによって形式化を行う．

含意関係の帰納的な言明，すなわち，『現在の知識から $P$ であることが証明されるものがすべて $\Psi$ の性質を持っているならば，$P$ の性質を持つものはすべて $\Psi$ の性質を持つ．また逆に，$P$ ではないと証明されるものがすべて $\Psi$ の性質を持っていないならば，$P$ の性質を持たないものはすべて $\Psi$ の性質を持たない』との考えを形式的に表現するために導入したし好順序は以下のとおりである．

もし $P$ の解釈を $P$ でありかつ $\Psi$ である解釈とできる場合はその解釈を好む，すなわち，$P$ の解釈を $P$ と $\Psi$ の外延の共通部分（積集合）とする解釈が可能ならば，その解釈を好む．また，$P$ でない解釈を $P$ でなくかつ $\Psi$ でない解釈とできる場合はその解釈を好むとする．これは $P$ の解釈を $P$ と $\Psi$ の外延の和集合とする解釈が可能ならば，その解釈を好むということと等価である．

☆ このアイデア自身は新しいものではなく，もともとは J. McCarthy の極小限定[10]にさかのぼる．し好順序の導入による非単調推論の一般的な形式化はそれぞれ多少の差異はあるが文献 6), 8), 15)でも報告されている．

以上のし好順序を持つ非単調推論の一形式を含意限定（ascription）と名づける．次に，含意限定の形式的定義を与える．

$\boldsymbol{P}$を述語記号の $n$ 個組，$\boldsymbol{Z}$を述語記号または関数記号の $k$ 個組（混じってよい），どんな記号も，$\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Z}$に高々一度しか現れないとし，$\boldsymbol{\Psi}$を，$\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Z}$のいかなる述語記号も現れない$n$個組の述語とする．以下，本論文中で現れる$\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{\Psi}$はこの条件を満たすものとする．このとき，$\boldsymbol{Z}$を可変とした$\boldsymbol{P}$の$\boldsymbol{\Psi}$への含意限定は，(A1.1)において，次のし好順序を入れたものである．

$$\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{Z}_1 \geqq \boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{Z}_2 \text{ iff}$$
$$(\forall \boldsymbol{x}.(P_1^1(\boldsymbol{x}) \equiv P_2^1(\boldsymbol{x}) \wedge \Psi^1(\boldsymbol{x})) \vee \forall \boldsymbol{x}.(P_1^1(\boldsymbol{x}) \equiv P_2^1(\boldsymbol{x}) \vee \Psi^1(\boldsymbol{x})))$$
$$\wedge \cdots$$
$$\wedge (\forall \boldsymbol{x}.(P_1^n(\boldsymbol{x}) \equiv P_2^n(\boldsymbol{x}) \wedge \Psi^n(\boldsymbol{x})) \vee \forall \boldsymbol{x}.(P_1^n(\boldsymbol{x}) \equiv P_2^n(\boldsymbol{x}) \vee \Psi^n(\boldsymbol{x}))),$$

ただし，$\boldsymbol{P}_1 = P_1^1, \cdots, P_1^n$, $\boldsymbol{P}_2 = P_2^1, \cdots, P_2^n$, $\boldsymbol{Z}_1 = Z_1^1, \cdots, Z_1^k$, $\boldsymbol{Z}_2 = Z_2^1, \cdots, Z_2^k$, $\boldsymbol{\Psi} = \Psi^1, \cdots, \Psi^n$.

特に，このし好順序を“$\geqq_{\boldsymbol{\Psi}}^{\boldsymbol{P};\boldsymbol{Z}}$”で表すことにし，この順序が$\boldsymbol{Z}$に無関係なものであることを考慮にいれると，$\boldsymbol{Z}$を可変とした$\boldsymbol{P}$の$\boldsymbol{\Psi}$への含意限定は，

$$A \wedge \neg \exists \boldsymbol{p}, \boldsymbol{z}.(A(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{z}) \wedge \boldsymbol{p} >_{\boldsymbol{\Psi}}^{\boldsymbol{P};\boldsymbol{Z}} \boldsymbol{P}) \qquad \text{(A2.1)}$$

と書けることになる．この式を Asc $(A; \boldsymbol{P} \sim \boldsymbol{\Psi}; \boldsymbol{Z})$ と表すことにし，“$A$のもとで（$\boldsymbol{Z}$を可変として）$\boldsymbol{P}$を$\boldsymbol{\Psi}$に含意限定する”ということにする．

含意限定のモデル論として，次に“$\boldsymbol{P}$; $\boldsymbol{Z}$に関する（$\boldsymbol{Z}$が空のときは単に，$\boldsymbol{P}$に関する）$\boldsymbol{\Psi}$-極大モデル”を定義する．$\boldsymbol{P}$; $\boldsymbol{Z}$に関する$\boldsymbol{\Psi}$-極大モデルとは，$\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Z}$以外の述語や関数の解釈がおなじモデルにおいて，先のし好的順序“$\geqq_{\boldsymbol{\Psi}}^{\boldsymbol{P};\boldsymbol{Z}}$”に関し，$\boldsymbol{P}$の解釈が極大となるモデルのことである．すなわち，形式的に言うと以下のようになる．

$M$をある構造とし，$|M|$によって$M$の個体領域（domain），$K$を述語（または関数）定数とするとき，$M[K]$によって構造$M$での$K$の外延を表すことにすると，任意の構造 $M_1$, $M_2$ において，$M_1 \geqq_{\boldsymbol{\Psi}}^{\boldsymbol{P};\boldsymbol{Z}} M_2$ が成立するのは，次の1)～3)の関係が成り立つことが必要十分である．1) $|M_1| = |M_2|$, 2) $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Z}$に現れない任意の述語（または関数）定数$K$に対して，$M_1[K] = M_2[K]$, 3) $\boldsymbol{P}$のすべての要素 $P^i$ に対して，$M_1[P^i] = M_2[P^i] \cap M_2[\Psi^i]$ か，$M_1[P^i] = M_2[P^i] \cup M_2[\Psi^i]$.

このとき，$M$が与えられた論理式$A$の$\boldsymbol{P}$; $\boldsymbol{Z}$に関する$\boldsymbol{\Psi}$-極大モデルであるとは，$M$が$A$のモデルであって，$N >_{\boldsymbol{\Psi}}^{\boldsymbol{P};\boldsymbol{Z}} M$ なる$A$のモデル$N$が存在しないことである（ただし，$M_1 \geqq_{\boldsymbol{\Psi}}^{\boldsymbol{P};\boldsymbol{Z}} M_2$ であって $M_2 \geqq_{\boldsymbol{\Psi}}^{\boldsymbol{P};\boldsymbol{Z}} M_1$ でないときに限って $M_1 >_{\boldsymbol{\Psi}}^{\boldsymbol{P};\boldsymbol{Z}} M_2$ と書くことにする）．

$f$を任意の論理式とする．このとき，Asc $(A; \boldsymbol{P} \sim \boldsymbol{\Psi}; \boldsymbol{Z}) \vdash f$ であることを，$A \vdash_{\boldsymbol{\Psi}}^{\boldsymbol{P};\boldsymbol{Z}} f$ で表し，$A$の$\boldsymbol{P}$; $\boldsymbol{Z}$に関するすべての$\boldsymbol{\Psi}$-極大モデルにおいて$f$が成り立つことを，$A \models_{\boldsymbol{\Psi}}^{\boldsymbol{P};\boldsymbol{Z}} f$ で表すことにする．（ただし，‘$\vdash$’は演えき体系による推論を表す．）

$\boldsymbol{\Psi}$-極大モデルが含意限定の適切なモデルであることを次の命題で示す．

［命題1］

構造$M$が Asc $(A; \boldsymbol{P} \sim \boldsymbol{\Psi}; \boldsymbol{Z})$ のモデルであるための必要十分条件は構造$M$が$A$の$\boldsymbol{P}$; $\boldsymbol{Z}$に関する$\boldsymbol{\Psi}$-極大モデルであることである． ■

このことから次の健全性定理が成り立つ．

［定理1］：健全性

$A \vdash_{\boldsymbol{\Psi}}^{\boldsymbol{P};\boldsymbol{Z}} f$ ならば，$A \models_{\boldsymbol{\Psi}}^{\boldsymbol{P};\boldsymbol{Z}} f$. ■

定理1は，Asc $(A; \boldsymbol{P} \sim \boldsymbol{\Psi}; \boldsymbol{Z})$ から導かれる結論は，$A$の$\boldsymbol{P}$: $\boldsymbol{Z}$に関するすべての$\boldsymbol{\Psi}$-極大モデルにおいて成り立つことを保証している．定理1の逆（完全性定理）は，‘$\vdash$’が高階の演えきにならざるをえないため一般に成り立たない．さらに充足可能性について次の定理が成り立つ．

［定理2］：充足可能性

$A$を充足可能な任意の論理式とすると，Asc $(A; \boldsymbol{P} \sim \boldsymbol{\Psi}; \boldsymbol{Z})$ は充足可能． ■

すなわち，演えき体系のもとで無矛盾な論理式$A$が与えられたとき，$A$におけるどんな含意限定も無矛盾であることが保証されている．

含意限定は高階の論理式で表現されているが，いくつかの高階の限量子を落とすことができる．簡単な述語計算により次の結果を得る．

［命題2］

$$\text{Asc}(A; \boldsymbol{P} \sim \boldsymbol{\Psi}; \boldsymbol{Z}) \equiv$$
$$A \wedge \left( \bigwedge_{j=0}^{2^n-1} ((\exists \boldsymbol{z}.A(K_j^1, \cdots, K_j^n, \boldsymbol{z})) \supset L_j^1 \wedge \cdots \wedge L_j^n) \right) \qquad \text{(A1.2)}$$

ここで，$j$を2進数で表した場合，1) 第 $i$ けたが0のとき $K_j^i$ は $\lambda \boldsymbol{x}.(P^i(\boldsymbol{x}) \wedge \Psi^i(\boldsymbol{x}))$, $L_j^i$ は $\forall \boldsymbol{x}.(P^i(\boldsymbol{x}) \supset \Psi^i(\boldsymbol{x}))$ を，また，2) 第 $i$ けたが1のとき $K_j^i$ は $\lambda \boldsymbol{x}.(P^i(\boldsymbol{x}) \vee \Psi^i(\boldsymbol{x}))$, $L_j^i$ は $\forall \boldsymbol{x}.(\Psi^n(\boldsymbol{x}) \supset P^n(\boldsymbol{x}))$ を表す $(i=1, \cdots, n)$. ■

### 3.2 例　　題

含意限定は様々な高次の推論を非単調推論として形式化する上で，一つの足がかりとなることが期待できる．例題を使って含意限定を説明する．

［例題１］「ある寒い日，となかいさん（Mr. "reindeer"）は赤い鼻をしていた」という事実を次のように表す．

$$\mathrm{Rednosed(reindeer,\ oneday)} \wedge \mathrm{Cold(oneday)} \qquad (\mathrm{E\,1.1})$$

これを$A$としよう．今，となかいさんがいつ赤い鼻をしているかに興味があるとしよう．われわれはいくつもの仮説を持つことができるが，その一例として「となかいさんが赤い鼻をしている日」と「寒い日(Cold)」になにか関係があるのではないかと仮定してみる．この場合，$\lambda x.(\mathrm{Rednosed(reindeer},\ x))$ を Cold に含意限定してみればよい．すなわち，$\mathrm{Asc}(A;\ \lambda x.(\mathrm{Rednosed(reindeer},\ x))\sim\mathrm{Cold})$ からの演えきを考える．命題２より，含意限定は次の二文の積と等価である．

$$A(\lambda x.(\mathrm{Rednosed(reindeer},\ x)\wedge\mathrm{Cold}(x))) \supset \forall x.(\mathrm{Rednosed(reindeer},\ x)\supset\mathrm{Cold}(x)), \qquad (\mathrm{E\,1.2})$$

$$A(\lambda x.(\mathrm{Rednosed(reindeer},\ x)\vee\mathrm{Cold}(x))) \supset \forall x.(\mathrm{Cold}(x)\supset\mathrm{Rednosed(reindeer},\ x)). \qquad (\mathrm{E\,1.3})$$

(E 1.2)の条件部 $A(\lambda x.(\mathrm{Rednosed(reindeer},\ x)\wedge\mathrm{Cold}(x)))$ は$A$における $\lambda x.(\mathrm{Rednosed(reindeer},\ x))$ の現れをすべて $\lambda x.(\mathrm{Rednosed(reindeer},\ x)\wedge\mathrm{Cold}(x))$ に置き換えたものである．したがって，

$$A(\lambda x.(\mathrm{Rednosed(reindeer},\ x)\wedge\mathrm{Cold}(x))) \equiv (\mathrm{Rednosed(reindeer,\ oneday)}\wedge\mathrm{Cold(oneday)}) \wedge\mathrm{Cold(oneday)}. \qquad (\mathrm{E\,1.4})$$

これは$A$そのものであって，$\mathrm{Asc}(A;\ \lambda x.(\mathrm{Rednosed(reindeer},\ x))\sim\mathrm{Cold})$ から導けるから，(E 1.2)の結論部，

$$\forall x.(\mathrm{Rednosed(reindeer},\ x)\supset\mathrm{Cold}(x)) \qquad (\mathrm{E\,1.5})$$

が得られる．まったく同様に(E 1.3)を使って，

$$\forall x.(\mathrm{Cold}(x)\supset\mathrm{Rednosed(reindeer},\ x)) \qquad (\mathrm{E\,1.6})$$

も導けるから，含意限定によって，「となかいさんが赤い鼻をしている日は寒い日であり，寒い日にはとなかいさんは赤い鼻をしている（$\forall x.(\mathrm{Rednosed(reindeer},\ x)\equiv\mathrm{Cold}(x))$）」ことが推論され帰納的な結果を導くことができる．

定理２より含意限定は無矛盾な一階述語論理式から矛盾した結果を導くことはないことが保証されている．例えば(E 1.6)に矛盾する事実「今日は寒い日であるが，となかいさんは赤い鼻をしていない」ことがさらにわかったとしよう．これを$A'$とする．すなわち，$A'$は

$$A \wedge\neg\mathrm{Rednosed(reindeer,\ today)} \wedge\mathrm{Cold(today)} \qquad (\mathrm{E\,1.7})$$

で表せる．現在の知識は$A$でなく$A'$に変わっているので，$\mathrm{Asc}(A';\ \lambda x.(\mathrm{Rednosed(reindeer},\ x))\sim\mathrm{Cold})$ からの演えきを考える．すると，(E 1.2)に対応する式から $\forall x.(\mathrm{Rednosed(reindeer},\ x)\supset\mathrm{Cold}(x))$ は同様に導くことができるが，(E 1.3)に対応する

$$A'(\lambda x.(\mathrm{Rednosed(reindeer},\ x)\vee\mathrm{Cold}(x))) \supset \forall x.(\mathrm{Cold}(x)\supset\mathrm{Rednosed(reindeer},\ x)) \qquad (\mathrm{E\,1.8})$$

の条件部 $A'(\lambda x.(\mathrm{Rednosed(reindeer},\ x)\vee\mathrm{Cold}(x)))$ は矛盾するので，その結論部，$\forall x.(\mathrm{Cold}(x)\supset\mathrm{Rednosed\ (reindeer},\ x))$ は導かれないことになる．つまり，新しい事実に矛盾する結果であった「寒い日にはとなかいさんは赤い鼻をしている」が取り下げられてしまい無矛盾性が保たれる．このことは含意限定による推論が非単調なものとなること，すなわち，知識の増加が定理の減少を招くことがあることを示している．

次にある述語を可変とした例を示す．

［例題２］「'hector' は怪我をしたり火傷すると痛みを感ずる．'brutus' も火傷すると痛みを感ずる．」は次のように書けるだろう．

$$\mathrm{Burnt(hector)}\supset\mathrm{Painful(hector)} \qquad (\mathrm{E\,2.1})$$

$$\wedge\mathrm{Injured(hector)}\supset\mathrm{Painful(hector)} \qquad (\mathrm{E\,2.2})$$

$$\wedge\mathrm{Burnt(brutus)}\supset\mathrm{Painful(brutus)} \qquad (\mathrm{E\,2.3})$$

さて，『怪我をすると悲しむ($\lambda x.(\mathrm{Injured}(x)\supset\mathrm{Painful}(x))$)』ことを『火傷すると痛みを感ずる($\lambda x.(\mathrm{Burnt}(x)\supset\mathrm{Painful}(x))$)』ことに何か関係があるとして，前者を後者に含意限定してみよう．含意限定はある述語記号を述語に含意限定することで行われているので，述語を述語に含意限定する場合には工夫が必要である．しかし，この問題は次のような方法☆をとることにより簡単に解決することができる．与えられた論理式$A$のもとで，述語$\Phi$を述語$\Psi$に含意限定したいと

☆ この方法は基本的に文献 13) で提案された方法による．

する．このとき，論理式 $A$ に現れない述語記号 $P_0$ を導入し，$A \wedge \forall x.(P_0(x) \equiv \Phi(x))$ を扱う．$P_0$ は含意限定により解釈が変わるようにしたいから，$P_0$ に従って $\Phi$ も変化するよう変数化する．すなわち，$\Phi$ に現れてかつ $\Psi$ に現れない述語すべてを可変とする（含意限定の定義から，$\Psi$ には可変とされる述語記号を含んではいけない）．さて，例題に戻ると，(E2.1)～(E2.3)に現れない述語記号 $P_0$ を導入し，

$$\forall x.P_0(x) \equiv (\mathrm{Injured}(x) \supset \mathrm{Painful}(x)) \quad \text{(E2.4)}$$

と(E2.1)～(E2.3)との論理積を扱うことになる．この論理式をあらためて $A$ で表す．$P_0$ には Injured と Painful の二つの述語を含むが，Painful は $\Psi$（つまり，$\lambda x.(\mathrm{Burnt}(x) \supset \mathrm{Painful}(x))$）にも現れるため，Injured のみを可変とし $P_0$ の $\lambda x.(\mathrm{Burnt}(x) \supset \mathrm{Painful}(x))$ への含意限定を考える．すなわち，Asc ($A$; $P_0 \sim \lambda x.(\mathrm{Burnt}(x) \supset \mathrm{Painful}(x))$; Injured) からの導出を考える．命題2を使うと，

$$((\exists z.A(\lambda x.(P_0(x) \vee (\mathrm{Burnt}(x) \supset \mathrm{Painful}(x))), z)) \supset \forall x.((\mathrm{Burnt}(x) \supset \mathrm{Painful}(x)) \supset P_0(x))) \quad \text{(E2.5)}$$

が得られることになる．さて，条件部 ($\exists z.A(\lambda x.(P_0(x) \vee (\mathrm{Burnt}(x) \supset \mathrm{Painful}(x))), z)$) についてまず調べると，

$$\begin{aligned}
&\exists z.A(\lambda x.(P_0(x) \vee (\mathrm{Burnt}(x) \supset \mathrm{Painful}(x))), z) \\
&\equiv \exists z.( \\
&\quad \mathrm{Burnt}(\mathrm{hector}) \supset \mathrm{Painful}(\mathrm{hector}) \\
&\quad \wedge z(\mathrm{hector}) \supset \mathrm{Painful}(\mathrm{hector}) \\
&\quad \wedge \mathrm{Burnt}(\mathrm{brutus}) \supset \mathrm{Painful}(\mathrm{brutus}) \\
&\quad \wedge \forall x.((P_0(x) \vee (\mathrm{Burnt}(x) \supset \mathrm{Painful}(x))) \\
&\qquad\qquad \equiv (z(x) \supset \mathrm{Painful}(x))). \\
&\quad ). \qquad \text{(E2.6)}
\end{aligned}$$

ここで，$z$ に $\lambda x.(\mathrm{Burnt}(x) \wedge \mathrm{Injured}(x))$ を代入すると，この条件部は $A$ から求められる．よって，確かに $A(\lambda x.(P_0(x) \vee (\mathrm{Burnt}(x) \supset \mathrm{Painful}(x))), z)$ を満足する述語 $z$ が存在することが証明される☆．すなわち，含意限定により (E2.5) 結論部 $\forall x.((\mathrm{Burnt}(x) \supset \mathrm{Painful}(x)) \supset P_0(x))$ が得られることになる．これは(E2.4)より，

$$\forall x.((\mathrm{Burnt}(x) \supset \mathrm{Painful}(x)) \supset (\mathrm{Injured}(x) \supset \mathrm{Painful}(x))), \quad \text{(E2.7)}$$

つまり「火傷すると痛みを感ずるものは，怪我をしても痛みを感ずる」ことを表している．このことから「火傷すると痛みを感ずる ‘brutus’ は，やはり怪我をしても痛みを感ずる」といった類推の結果を得ることになる．すなわち，

$$\mathrm{Injured}(\mathrm{brutus}) \supset \mathrm{Painful}(\mathrm{brutus}) \quad \text{(E2.8)}$$

が導かれる．

含意限定による類推は次のように行える．例えば二者が『似ている』とは両者がある共通の性質($\Psi$)を有することを意味する．そこで一方の持つある性質($P$)をその共通する性質に含意限定すると，矛盾しない限り他方もその性質($P$)を持つと推論することができる．このような定式化は類推の帰納的側面を明確にしたものとなる．上の例題において，「怪我をすると痛みを感ずる」性質を共通する「火傷すると痛みを感ずる」性質に含意限定することによって(E2.7)式「“火傷すると痛みを感ずる” ものは “怪我をしても痛みを感ずる”」を帰納することができた．(E2.8)式「Brutus も怪我をすると痛みを感ずる」はその帰納の結果から（演えきによって）得られたものである．

## 4. 考察：極小限定との比較と応用

常識による推論の非単調な側面を形式的にとらえるために McCarthy は極小限定 (circumscription) を提案した．極小限定は「ある性質を満たすものは，述べられているもの以外存在しない」との考えを定式化したものになっている．これは，与えられた論理式を満足する範囲で，ある性質を外延的に極小化することによって実現している．(A1.1)において，し好順序を，

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{Z}_1 \geqq \boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{Z}_2 \text{ iff} \\
&\quad \forall x.(P_1{}^1(\boldsymbol{x}) \supset P_2{}^1(\boldsymbol{x})) \wedge \cdots \wedge \forall \boldsymbol{x}.(P_1{}^n(\boldsymbol{x}) \\
&\qquad \supset P_2{}^n(x)),
\end{aligned}$$

ただし，$\boldsymbol{P}_1 = P_1{}^1, \cdots, P_1{}^n$, $\boldsymbol{P}_2 = P_2{}^1, \cdots, P_2{}^n$ で，$P_i{}^j$ は述語記号とする ($i=1, 2, j=1, \cdots, n$)，としたものが（並列）極小限定 ((parallel) circumscription)[9]である．すなわち，ある述語の組 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{Z}_1$ および $\boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{Z}_2$ が，第 $n+1$ 番以降の述語（$\boldsymbol{Z}_1$, $\boldsymbol{Z}_2$ に相当）には無関係に，第1番から第 $n$ 番までのすべての述語（$\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$ に相当）において，前者の外延が後者の外延に含まれるとき，前者の述語の組($\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{Z}_1$)のほうが後者の組($\boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{Z}_2$)より好ましいとするのが極小限定である．

含意限定と極小限定の相違は，モデル論と考えるとわかりやすい．直観的な言い方をすると，含意限定の

☆ 一般に高階論理式の自動証明は困難であるが，やはり高階論理式で表される極小限定の研究で，与えられた論理式がある形で書ける場合には極小限定と等価な一階述語論理式が機械的に得られることが示された[7),9)]．本稿ではそれについて触れないが，まったく同様の手法で含意限定と等価な一階述語論理式を得ることができるクラスを考えることができる．実際，例題2はそのクラスに属し，この場合，$z$ を $\lambda x.(\mathrm{Burnt}(x) \wedge \mathrm{Injured}(x))$ とすればよいことが機械的に決められる．

モデル論は離散的な順序構造に基づくものであるのに対し，極小限定のモデル論は連続的な順序構造に基づくものであると言える．それぞれの順序構造について調べてみよう．ある二つのモデル，$M_1$, $M_2$ において，$M_1>M_2$ なる関係が成立したとする．順序列としてみたとき，$M_1$, $M_2$ の間にモデルはいくつ存在しえるであろうか？ 簡単のため，含意限定の対象となる述語組（そして，極小化の対象となる述語組）がただ一つの述語 $P$ からなる場合を考える．

含意限定の場合，$M_1>N$，かつ，$N>M_2$ なるモデルは高々一つしかない[☆]．それに対し，極小限定の場合，$M_1>M_2$ であることは，$M_1$ における $P$ の外延が $M_2$ における $P$ の外延に真に含まれることしか意味しないので，$M_1$, $M_2$ の間にモデルは一般に無限に存在する．その差違は，知識の増加を契機にして起こる定理の修正（信念の翻意 (belief revision) と呼ばれる）がなされるとき，特徴的に現れる．$\mathrm{Asc}(A\,;P\sim\Psi\,;\boldsymbol{Z})$ は，$\boldsymbol{Z}$ を可変にして $P$ の解釈を $\Psi$ の解釈に近づけるとも解釈できるので，これに相当する $\mathrm{Circum}(A\wedge\forall\boldsymbol{x}.(P_0(\boldsymbol{x})\equiv\neg(P(\boldsymbol{x})\equiv\Psi(\boldsymbol{x})))\,;P_0\,;P,\boldsymbol{Z})$ との比較によって説明する．

今，$A$ からの演えきだけでは得られない結論，$\forall\boldsymbol{x}.(P(\boldsymbol{x})\equiv\Psi(\boldsymbol{x}))$，「すべての $\boldsymbol{x}$ に対し，$(P(\boldsymbol{x})\equiv\Psi(\boldsymbol{x}))$ が成り立つ」が両者それぞれのし好順序において極大となる $A$ のモデルで成り立っていたとする．今，$A$ に新しい知識 $P(\boldsymbol{a})\wedge\neg\Psi(\boldsymbol{a})$ が加わったとしよう．この公理を $A'$ とする．この結果，両者の $A'$ の極大モデルは，$A$ のそれに比べ，新しい知識を満足する範囲までし好順序において後退したものとなる．極小限定における $A'$ の極大モデルでは，$\forall\boldsymbol{x}.(\neg(\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a})\supset(P(\boldsymbol{x})\equiv\Psi(\boldsymbol{x})))$ が成り立ち，「$\boldsymbol{a}$ 以外のすべての $\boldsymbol{x}$ に対し，$(P(\boldsymbol{x})\equiv\Psi(\boldsymbol{x}))$ が成り立つ」を主張することになる．これは言わば，極小限定における信念の翻意は，新しく判明した事実のみを例外として，それ以外の所ではあいかわらず元の信念を正しいとする一種“頑迷な”信念の翻意を表すことになる．これに対し，含意限定における $A'$ の極大モデルでは，$P$, $\Psi$ の同値関係のうち，$\forall\boldsymbol{x}.(P(\boldsymbol{x})\supset\Psi(\boldsymbol{x}))$ なる信念を取り下げ，$\forall\boldsymbol{x}.(\Psi(\boldsymbol{x})\supset P(\boldsymbol{x}))$ のみを，すなわち，「$\Psi$ を満足するものは $P$ を満足する」という主張のみをすることになる．これは，“頑迷な”信念の翻意に比べると，“拘泥のない”信念の翻意を表すことになる．（このことは $P$ を $\lambda x.\mathrm{Rednosed}(\mathrm{reindeer},x)$, $\Psi$ を Cold, $\boldsymbol{a}$ を today とすると例題1にてらしてみることができる．）

連続的な順序に基づく“頑迷な信念の翻意”の仕方と離散的な順序に基づく“拘泥のない信念の翻意”の仕方が，極小限定と含意限定のおもな相違であることを述べたが，二つの翻意の仕方は優劣がつくものではなく，ともに人間の行う信念の翻意の一面を表しているように思える．持っている信念が十分な経験に裏付けられている場合，その翻意の仕方は“頑迷な信念の翻意”を示すのが適当であろう．一方，われわれが未熟な経験を通して仮定する仮説に類する信念の場合は，誤りが判明したときには，“拘泥のない信念の翻意”をするのが適当であろう．両者の切替えをいつにするか？ あるいはもっと段階的に変わる信念の翻意の仕方を考えるべきか？ 等の問題は残された興味深い研究課題であるが，現在のところ以上の観点から次のように言うことができる．われわれの経験に基づいた知識（例えば常識的知識など）を知的システムが管理する場合には，“頑迷な信念の翻意”が適切であろう．一方，“拘泥のない信念の翻意”は，知的システム自らが帰納，類推，発想等の非演えき的な推論によって人間の介在なしに生み出す仮説の管理において適切であろう．

最後に，含意限定の応用について考える．非演えき的な高次の推論では無矛盾性の維持（無矛盾な知識から無矛盾な結論を導く）が大きな問題の一つとなる．無矛盾であるかどうかを調べることが一般に計算可能でないからである．しかし，含意限定はもともと与えられた論理式の無矛盾性を維持するよい性質があるため（定理2），この問題を避けることができる．

含意限定の応用で決定的に問題となるものは $P$ に対する $\Psi$ の選択であろう．$P$ と関係すると思われる $\Psi$ さえ与えれば，後は含意限定の理論の範囲内となる．$\Psi$ を与えることはし好順序を決定づけ，含意限定による推論が好ましいものであるかどうかを決定づけることになるため，応用上では有益な $\Psi$ を見つけることが特に重要である．一つの方法は，$P$ に対する $\Psi$ の候補として，$P$ の候補集合と呼ぶ述語の集合を与え，そこから適当な $\Psi$ を見つけ出す方法である．以下に，その手法に従った例題について考える．

［例題3］ 以下の論理式 $\Delta$ について考えよう．$\Delta$ は次の“**is-a 階層**” $H$ と各クラスに関する知識 $O$ からなる ($\Delta\equiv H\wedge O$)．

$$H\equiv\forall x.(\mathrm{Japanese}(x)\supset\mathrm{Human}(x))$$
$$\wedge\forall x.(\mathrm{American}(x)\supset\mathrm{Human}(x))$$

☆ 定理2の証明参照．

$\wedge \forall x.(\mathrm{Human}(x) \supset \mathrm{Animate}(x))$
$\wedge \forall x.(\mathrm{Dog}(x) \supset \mathrm{Animate}(x))$
$\wedge \forall x.\neg(\mathrm{Japanese}(x) \wedge \mathrm{American}(x))$
$\wedge \forall x.\neg(\mathrm{Human}(x) \wedge \mathrm{Dog}(x))$
$\wedge \mathrm{Japanese(koichi)}$
$\wedge \mathrm{American(john)}$
$\wedge \mathrm{Dog(pochi)}$ (E 3.1)

$O \equiv \mathrm{Laughs(koichi)}$ (E 3.2)

この *is-a* 階層をもとにあるクラスで得た知識をほかのクラスでも使えるよう，できるだけ一般化するように含意限定を使うことにしたい．この場合，一般化したい述語は Laughs で，Laughs の候補集合は$H$に現れる各クラスを表す述語 (Animate, Dog, Human, …) で構成される．そして，一般化したい性質 (Laughs) を階層の高いクラスから (Animate から) 順に優先的に含意限定すれば目的のものが得られる．すなわち，$A_0$ を $\Delta$ とし，$A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, $A_5$ を以下のように定義したとき，

$A_1 \equiv \mathrm{Asc}(A_0;\ \mathrm{Laughs} \sim \mathrm{Animate})$,
$A_2 \equiv \mathrm{Asc}(A_1;\ \mathrm{Laughs} \sim \mathrm{Dog})$,
$A_3 \equiv \mathrm{Asc}(A_2;\ \mathrm{Laughs} \sim \mathrm{Human})$,
$A_4 \equiv \mathrm{Asc}(A_3;\ \mathrm{Laughs} \sim \mathrm{American})$,
$A_5 \equiv \mathrm{Asc}(A_4;\ \mathrm{Laughs} \sim \mathrm{Japanese})$

$A_5$ からの演えきを考えればよい．$A_5$ は次のように単純化される．

$\Delta \wedge \forall x.(\mathrm{Laughs}(x) \equiv \mathrm{Animate}(x))$ (E 3.3)

すなわち，含意限定によって「動物であれば笑うし，笑えば動物である」という結果を得ることになる．

ここで，新しい事実として犬の 'pochi' は笑わないことが判明したとしよう．

$O' \equiv O \wedge \neg \mathrm{Laughs(pochi)}$ (E 3.4)

とする．これに従い $A_0$ における $\Delta$ も $\Delta'$ に変更する ($\Delta' \equiv H \wedge O'$)．すると，今度は

$\Delta' \wedge \forall x.(\mathrm{Human}(x) \equiv \mathrm{Laughs}(x))$ (E 3.5)

と単純化される．すなわち，先の結果 (E 3.3) は取り下げられ，階層上でもっとも一般化した無矛盾な知識 (E 3.5)，「人間であれば笑うし，笑えば人間である」，を得ることになる．

## 5. むすび

以上，非単調推論の一種である含意限定を提案し，類推や帰納などの高次の推論が非単調推論として形式化できる可能性を示した．含意限定は言わば "拘泥のない" 信念の翻意を行う性質があるが，これは知的システム自らが帰納，類推等の高次の推論によって導く仮説の管理の際に好ましいものであると考えられる．応用の際に問題となる，含意限定の対象となる述語 (特に$\Psi$) の決め方に関してはまだ研究の余地を多く残している．

高次の推論の研究を見通しよく建設的に進め，そのための健全な議論を支えるためには形式化が不可欠である．含意限定の考え方，手法が，高次の推論を形式化するうえで一つの足がかりになることを期待する．

**謝辞** 本研究を進めるに当たり，有益な御示唆を頂いた ICOT 研究の方々，特に佐藤健氏，長谷川隆三室長，古川康一研究次長に，また，本研究の機会を与えてくださった淵一博所長に感謝いたします．さらに，建設的な批判，激励を頂いた ATT ベル研究所の D. Etherington 氏，スタンフォード大 B. N. Grosof 氏に感謝いたします．

## 参考文献

1) 有川節夫，篠原 武，宮原哲浩：帰納推論の理論，大須賀節雄，佐伯 胖共編「知識の獲得と学習」，pp. 147-194，オーム社 (1987).
2) 有川節夫，原口 誠：類推の理論，大須賀節雄，佐伯 胖共編「知識の獲得と学習」，pp. 221-250，オーム社 (1987).
3) 有馬 淳，佐藤 健：非単調推論，淵 一博監修，古川康一，溝口文雄共編「知識プログラミング」，知識情報処理シリーズ 8，pp. 189-214，共立出版 (1988).
4) Arima, J.: A Form of Conjectural Reasoning on Equivalence—Ascription，日本ソフトウェア科学会第3回大会論文集，pp. 41-44 (1986).
5) 国藤 進：演えき・帰納・発想の推論機構化をめざして，淵 一博監修，古川康一，溝口文雄共編「知識プログラミング」，知識情報処理シリーズ 2，pp. 1-22，共立出版 (1986).
6) 佐藤 健：個人的議論 (1988年6月).
7) 中川裕志，森 辰則：論理型言語における Circumscription，情報処理学会論文誌，Vol. 28, No. 4, pp. 330-338 (1987).
8) Bossu, G. and Siegel, P.: Saturation, Non-monotonic Reasoning, and the Closed-world Assumption, *Artif. Intell.*, Vol. 25, pp. 13-65 (1985).
9) Lifschitz, V.: Computing Circumscription, *Proc. of the Ninth IJCAI*, Los Angeles, pp. 121-127 (1985).
10) McCarthy, J.: Circumscription—A Form of Nonmonotonic Reasoning, *Artif. Intell.*, Vol. 13, pp. 27-39 (1980).
11) McCarthy, J.: Application of Circumscription to Formalizing Common-sense Knowledge, *Artif. Intell.*, Vol. 28, pp. 89-116 (1986).
12) McDermott, D. and Doyle, J.: Non-monotonic Logic I, *Artif. Intell.*, Vol. 13, pp. 41-72 (1980).

13) Perlis, D. and Minker, J.: Completeness Results for Circumscription, *Artif. Intell.*, Vol. 28, pp. 29-42 (1986).
14) Reiter, R.: A Logic for Default Reasoning, *Artif. Intell.*, Vol. 13, pp. 81-132 (1980).
15) Shoham, Y.: Nonmonotonic Logics: Meaning and Utility, *Proc. of the Tenth IJCAI*, Milan, pp. 388-393 (1987).

## 付　録

$A$を与えられた論理式，$\boldsymbol{P}$を互いに独立な述語記号からなる有限組，$\boldsymbol{Z}$を$\boldsymbol{P}$に現れない互いに独立な述語記号または関数記号からなる有限組，$\boldsymbol{\Psi}$を$\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Z}$のいかなる述語記号も関数記号も現れない$\boldsymbol{P}$と同数個の述語からなる組とすると以下の性質が成り立つ．

［命題1］

構造$M$が $\mathrm{Asc}(A;\boldsymbol{P}\sim\boldsymbol{\Psi};\boldsymbol{Z})$ のモデルであるための必要十分条件は構造$M$が$A$の $\boldsymbol{P};\boldsymbol{Z}$ に関する $\boldsymbol{\Psi}$-極大モデルであることである． ■

［証明］

i）必要性．構造$M$が$\mathrm{Asc}(A;\boldsymbol{P}\sim\boldsymbol{\Psi};\boldsymbol{Z})$のあるモデルとする ($M\models A\wedge\neg\exists\boldsymbol{p},\boldsymbol{z}.A(\boldsymbol{p},\boldsymbol{z})\wedge\boldsymbol{p}>_{\boldsymbol{\Psi}}^{\boldsymbol{P};\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{P}$)．さて，このとき$M$が $\boldsymbol{P};\boldsymbol{Z}$ に関する $\boldsymbol{\Psi}$-極大モデルでないとしよう．すなわち，$N>_{\boldsymbol{\Psi}}^{\boldsymbol{P};\boldsymbol{Z}}M$ を満足する$A$のあるモデル$N$が存在する ($N\models A$)．さて，$'>_{\boldsymbol{\Psi}}^{\boldsymbol{P};\boldsymbol{Z}'}$ の定義より，$M$と$N$の領域は等しいので，$N$における，$\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Z}$のそれぞれの外延に等しい外延を持つ述語，関数を$M$で$\boldsymbol{P}1$, $\boldsymbol{Z}1$と名づけると，$N$が$A$のモデルであること，$\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Z}$ 以外の解釈が変わらないことから $M\models A(\boldsymbol{P}1,\boldsymbol{Z}1)$ が成り立つ．さらに，述語，関数組間の $'>_{\boldsymbol{\Psi}}^{\boldsymbol{P};\boldsymbol{Z}'}$ の定義より，明らかに$M\models\boldsymbol{P}1>_{\boldsymbol{\Psi}}^{\boldsymbol{P};\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{P}$．よって，$M\models A\wedge A(\boldsymbol{P}1,\boldsymbol{Z}1)\wedge\boldsymbol{P}1>_{\boldsymbol{\Psi}}^{\boldsymbol{P};\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{P}$ が成り立つ．これは$M$が $\mathrm{Asc}(A;\boldsymbol{P}\sim\boldsymbol{\Psi};\boldsymbol{Z})$ のモデルであることに反する．よって，背理法により，構造$M$が$\mathrm{Asc}(A;\boldsymbol{P}\sim\boldsymbol{\Psi};\boldsymbol{Z})$ のモデルならば構造$M$は$A$の $\boldsymbol{P};\boldsymbol{Z}$ に関する $\boldsymbol{\Psi}$-極大モデルであることが言えた．

ii）十分性．$A$の $\boldsymbol{P};\boldsymbol{Z}$ に関するすべての $\boldsymbol{\Psi}$-極大モデルにおいて，$\mathrm{Asc}(A;\boldsymbol{P}\sim\boldsymbol{\Psi};\boldsymbol{Z})$，すなわち，$\neg\exists\boldsymbol{p},\boldsymbol{z}.(A(\boldsymbol{p},\boldsymbol{z})\wedge\boldsymbol{p}>_{\boldsymbol{\Psi}}^{\boldsymbol{P};\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{P})$ が成り立つことを示す．さて，$\boldsymbol{P};\boldsymbol{Z}$ に関するある $\boldsymbol{\Psi}$-極大モデル$M$において，$\neg\exists\boldsymbol{p},\boldsymbol{z}.(A(\boldsymbol{p},\boldsymbol{z})\wedge\boldsymbol{p}>_{\boldsymbol{\Psi}}^{\boldsymbol{P};\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{P})$ が成り立たないとしよう．すなわち，ある述語または関数の組$\boldsymbol{P}1$, $\boldsymbol{Z}1$ があって，$M\models A(\boldsymbol{P}1,\boldsymbol{Z}1)\wedge\boldsymbol{P}1>_{\boldsymbol{\Psi}}^{\boldsymbol{P};\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{P}$ ということになる．ここで，$\boldsymbol{P}1;\boldsymbol{Z}1$ 以外の解釈は$M$と同じで，$\boldsymbol{P};\boldsymbol{Z}$ に関しては$M$における$\boldsymbol{P}1$, $\boldsymbol{Z}1$と同じ解釈をするモデル$N$を構成することができる．すると定義から明らかに，$N>_{\boldsymbol{\Psi}}^{\boldsymbol{P};\boldsymbol{Z}}M$ なるモデル$N$が存在することになり，$M$が $\boldsymbol{P};\boldsymbol{Z}$ に関する $\boldsymbol{\Psi}$-極大モデルであることに矛盾する．よって，背理法により，$A$の $\boldsymbol{P};\boldsymbol{Z}$ に関するすべての $\boldsymbol{\Psi}$-極大モデルにおいて，$\mathrm{Asc}(A;\boldsymbol{P}\sim\boldsymbol{\Psi};\boldsymbol{Z})$ が成り立つことが示せた．

［定理1］：健　全　性

$A\vdash_{\boldsymbol{\Psi}}^{\boldsymbol{P};\boldsymbol{Z}}f$ ならば，$A\models_{\boldsymbol{\Psi}}^{\boldsymbol{P};\boldsymbol{Z}}f$． ■

$A\vdash_{\boldsymbol{\Psi}}^{\boldsymbol{P};\boldsymbol{Z}}f$（すなわち，$\mathrm{Asc}(A;\boldsymbol{P}\sim\boldsymbol{\Psi};\boldsymbol{Z})\vdash f$）を仮定すると，演えき体系の健全性から，$\mathrm{Asc}(A;\boldsymbol{P}\sim\boldsymbol{\Psi};\boldsymbol{Z})\models f$ が成り立つ（すなわち，$\mathrm{Asc}(A;\boldsymbol{P}\sim\boldsymbol{\Psi};\boldsymbol{Z})$ の任意のモデルで$f$が真）．命題1から，$A$の$\boldsymbol{P};\boldsymbol{Z}$に関する任意の $\boldsymbol{\Psi}$-極大モデル$M$は，$\mathrm{Asc}(A;\boldsymbol{P}\sim\boldsymbol{\Psi};\boldsymbol{Z})$ のモデルであるから，$M\models f$ が成り立つ．よって $A\models_{\boldsymbol{\Psi}}^{\boldsymbol{P};\boldsymbol{Z}}f$． ■

［定理2］：充足可能性

$A$を充足可能な論理式とすると，$\mathrm{Asc}(A;\boldsymbol{P}\sim\boldsymbol{\Psi};\boldsymbol{Z})$ は充足可能である． ■

［証明］

命題1から，$A$の$\boldsymbol{P};\boldsymbol{Z}$に関する任意の $\boldsymbol{\Psi}$-極大モデルは $\mathrm{Asc}(A;\boldsymbol{P}\sim\boldsymbol{\Psi};\boldsymbol{Z})$ のモデルであることを示した．よって，任意の充足可能な論理式$A$に対して，$\boldsymbol{P};\boldsymbol{Z}$ に関する $\boldsymbol{\Psi}$-極大モデルが存在すれば，$\mathrm{Asc}(A;\boldsymbol{P}\sim\boldsymbol{\Psi};\boldsymbol{Z})$ のモデルが存在することになり，$\mathrm{Asc}(A;\boldsymbol{P}\sim\boldsymbol{\Psi};\boldsymbol{Z})$ が充足可能であることが証明される．

任意の充足可能な論理式$A$に対して，$\boldsymbol{P};\boldsymbol{Z}$に関する $\boldsymbol{\Psi}$-極大モデルが存在することの証明は，$\boldsymbol{\Psi}$-極大モデルの定義より，$'<_{\boldsymbol{\Psi}}^{\boldsymbol{P};\boldsymbol{Z}'}$ に関して無限上昇系列が存在しないことを証明すれば十分である．以下に，その証明を示す．

$\boldsymbol{P}$を$n$個の要素からなる述語記号の組，$M_i$ ($i=0,1,\cdots$)を$A$のモデルとしたとき，$M_j<_{\boldsymbol{\Psi}}^{\boldsymbol{P};\boldsymbol{Z}}M_{j+1}$ ($j=0,1,\cdots$) を満足する任意の上昇系列 $M_0, M_1,\cdots$ を考える．$'<_{\boldsymbol{\Psi}}^{\boldsymbol{P};\boldsymbol{Z}'}$ の定義から，$M_j<_{\boldsymbol{\Psi}}^{\boldsymbol{P};\boldsymbol{Z}}M_{j+1}$ なる各$j$に対して少なくともある一つの述語 $P^i$ があって，

$$M_{j+1}[P^i]=M_j[P^i]\cap M_j[\Psi^i] \text{ か，}$$
$$M_{j+1}[P^i]=M_j[P^i]\cup M_j[\Psi^i] \qquad (\mathrm{T}2.1)$$

であり，かつ，

$$M_j[P^i]\neq M_{j+1}[P^i]\cap M_{j+1}[\Psi^i] \text{ かつ，}$$
$$M_j[P^i]\neq M_{j+1}[P^i]\cup M_{j+1}[\Psi^i] \qquad (\mathrm{T}2.2)$$

を満たす．このとき，$M_j$, $M_{j+1}$ を「$P^i$ における上昇列」と言うことにする．

ある上昇系列において，$M_j$, $M_{j+1}$, および，$M_k$, $M_{k+1}$（$k$は $j<k$ を満たす最小の自然数）が $P^i$ にお

ける上昇列であったとすると，$\Psi^i$ には $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Z}$ のいかなる述語記号も関数記号も現れないことから

$$M_j[\Psi^i]=M_{j+1}[\Psi^i]=M_k[\Psi^i]=M_{k+1}[\Psi^i]. \qquad \text{(T2.3)}$$

さて(T2.1)から，一般性を失わず

$$M_{j+1}[P^i]=M_j[P^i]\cap M_j[\Psi^i] \qquad \text{(T2.4)}$$

が成り立つとしよう．また，$M_j, M_{j+1}$, および，$M_k$, $M_{k+1}$ は，同じ上昇系列で現れ，かつ，$k$ は $j<k$ を満たす最小の自然であるから，$j+1$ 番目から $k$ 番目までのモデルにおいて，$P^i$ の解釈は変わらない．すなわち，

$$M_{j+1}[P^i]=M_k[P^i]. \qquad \text{(T2.5)}$$

したがって，(T2.4)，(T2.5)，および，(T2.3)から，

$$M_k[P^i]=M_j[P^i]\cap M_j[\Psi^i] = M_j[P^i]\cap M_k[\Psi^i] \qquad \text{(T2.6)}$$

さて仮に，$j$ を $k$ に代えた(T2.1)より，

$$M_{k+1}[P^i]=M_k[P^i]\cap M_k[\Psi^i] \qquad \text{(T2.7)}$$

とすると，(T2.7)，(T2.6)および，(T2.3)から，

$$\begin{aligned}M_{k+1}[P^i]&=(M_j[P^i]\cap M_k[\Psi^i])\cap M_k[\Psi^i]\\&=M_j[P^i]\cap M_k[\Psi^i]\\&=M_k[P^i]\end{aligned} \qquad \text{(T2.8)}$$

となり，$P^i$ における上昇列であることに矛盾する．よって，

$$M_{k+1}[P^i]=M_k[P^i]\cup M_k[\Psi^i] \qquad \text{(T2.9)}$$

でなければならない．

すると，(T2.9)，(T2.6)から

$$\begin{aligned}M_{k+1}[P^i]&=(M_j[P^i]\cap M_k[\Psi^i])M_k[\Psi^i]\\&=M_k[\Psi^i].\end{aligned} \qquad \text{(T2.10)}$$

よって，$k+1$ 番目以降 $P^i$ において上昇するどんなモデルも存在しないことは，定義から明らかである．

以上のことから，$P^i$ における上昇列が，ある上昇系列において現れるのは，高々2度までであることがわかった．一方，$P$の中に述語記号は $n$ 個しかないから，(最初のモデルを含めて) どんな上昇系列も高々 $2n+1$ の長さしかないことになる．すなわち，無限上昇系列は存在しない． ■

［命題2］

$$\mathrm{Asc}(A\,;\,\boldsymbol{P}\sim\boldsymbol{\Psi}\,;\,\boldsymbol{Z})\equiv A\wedge\left(\bigwedge_{j=0}^{2^n-1}((\exists \boldsymbol{z}.A(K_j^1,\cdots,K_j^n,\boldsymbol{z}))\supset L_j^1\wedge\cdots\wedge L_j^n)\right)$$

ここで，$j$ を2進数で表した場合，1) 第 $i$ けたが0のとき $K_j^i$ は $\lambda\boldsymbol{x}.(P^i(\boldsymbol{x})\wedge\Psi^i(\boldsymbol{x}))$, $L_j^i$ は $\forall\boldsymbol{x}.(P^i(\boldsymbol{x})\supset\Psi^i(\boldsymbol{x}))$ を，また，2) 第 $i$ けたが1のとき $K_j^i$ は $\lambda\boldsymbol{x}.(P^i(\boldsymbol{x})\vee\Psi^i(\boldsymbol{x}))$, $L_j^i$ は $\forall\boldsymbol{x}.(\Psi^n(\boldsymbol{x})\supset P^n(\boldsymbol{x}))$ を表す $(i=1,\cdots,n)$. ■

［証明］

$$\begin{aligned}&\mathrm{Asc}(A\,;\,\boldsymbol{P}\sim\boldsymbol{\Psi}\,;\,\boldsymbol{Z})\\&\equiv A\wedge\neg\exists\boldsymbol{p},\boldsymbol{z}.(A(\boldsymbol{p},\boldsymbol{z})\wedge\boldsymbol{p}>_{\boldsymbol{\Psi}}{}^{P;Z}\boldsymbol{P})\\&\equiv A\wedge\forall\boldsymbol{p},\boldsymbol{z}.(A(\boldsymbol{p},\boldsymbol{z})\wedge\boldsymbol{p}\geqq_{\boldsymbol{\Psi}}{}^{P;Z}\boldsymbol{P}\supset\boldsymbol{P}\geqq_{\boldsymbol{\Psi}}{}^{P;Z}\boldsymbol{p})\\&\equiv A\wedge\forall\boldsymbol{p},\boldsymbol{z}.(A(\boldsymbol{p},\boldsymbol{z})\wedge\boldsymbol{p}\geqq_{\boldsymbol{\Psi}}{}^{P;Z}\boldsymbol{P}\supset\boldsymbol{P}=\boldsymbol{p})\end{aligned}$$

(ここで，$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{p}$ は $\forall\boldsymbol{x}.(p^1(\boldsymbol{x})\equiv P^1(\boldsymbol{x}))\wedge\cdots\wedge\forall\boldsymbol{x}.(p^n(\boldsymbol{x})\equiv P^n(\boldsymbol{x}))$ を表す．)

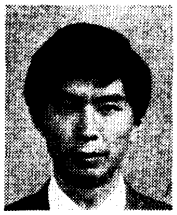
$$\begin{aligned}&\equiv A\wedge\forall\boldsymbol{p},\boldsymbol{z}.(A(\boldsymbol{p},\boldsymbol{z})\wedge\\&\qquad(\forall\boldsymbol{x}.(p^1(\boldsymbol{x})\equiv P^1(\boldsymbol{x})\wedge\Psi^1(\boldsymbol{x}))\\&\qquad\qquad\vee\forall\boldsymbol{x}.(p^1(\boldsymbol{x})\equiv P^1(\boldsymbol{x})\vee\Psi^1(\boldsymbol{x})))\\&\quad\wedge\cdots\\&\quad\wedge(\forall\boldsymbol{x}.(p^n(\boldsymbol{x})\equiv P^n(\boldsymbol{x})\wedge\Psi^n(\boldsymbol{x}))\\&\qquad\qquad\vee\forall\boldsymbol{x}.(p^n(\boldsymbol{x})\equiv P^n(\boldsymbol{x})\vee\Psi^n(\boldsymbol{x})))\\&\quad\supset\boldsymbol{P}=\boldsymbol{p})\end{aligned}$$

以下，述語の引数を略す．

$$\begin{aligned}&\equiv A\wedge\forall\boldsymbol{p},\boldsymbol{z}.(A(\boldsymbol{p},\boldsymbol{z})\wedge\\&\qquad((p^1\equiv P^1\wedge\Psi^1)\wedge\cdots\wedge(p^n\equiv P^n\wedge\Psi^n))\\&\quad\vee\cdots\\&\quad\vee(p^1\equiv P^1\vee\Psi^1)\wedge\cdots\wedge(p^n\equiv P^n\vee\Psi^n))\\&\qquad\supset(p^1\equiv P^1)\wedge\cdots\wedge(p^n\equiv P^n))\\&\equiv A\wedge\forall\boldsymbol{p},\boldsymbol{z}.(A(\boldsymbol{p},\boldsymbol{z})\wedge\\&\qquad(p^1\equiv P^1\wedge\Psi^1)\wedge\cdots\wedge(p^n\equiv P^n\wedge\Psi^n)\\&\qquad\qquad\supset(p^1\equiv P^1)\wedge\cdots\wedge(p^n\equiv P^n))\\&\quad\wedge\cdots\\&\quad\wedge\forall\boldsymbol{p},\boldsymbol{z}.(A(\boldsymbol{p},\boldsymbol{z})\wedge\\&\qquad(p^1\equiv P^1\vee\Psi^1)\wedge\cdots\wedge(p^n\equiv P^n\vee\Psi^n))\\&\qquad\qquad\supset(p^1\equiv P^1)\wedge\cdots\wedge(p^n\equiv P^n))\\&\equiv A\wedge\forall\boldsymbol{p},\boldsymbol{z}.(A(P^1\wedge\Psi^1,\cdots,P^n\wedge\Psi^n,\boldsymbol{z})\\&\qquad\qquad\supset(P^1\wedge\Psi^1\equiv P^1)\wedge\cdots\wedge(P^n\wedge\Psi^n\equiv P^n))\\&\quad\wedge\cdots\\&\quad\wedge\forall\boldsymbol{p},\boldsymbol{z}.(A(P^1\vee\Psi^1,\cdots,P^n\vee\Psi^n,\boldsymbol{z}))\\&\qquad\qquad\supset(P^1\vee\Psi^1\equiv P^1)\wedge\cdots\wedge(P^n\vee\Psi^n\equiv P^n))\\&\equiv A\wedge\left(\bigwedge_{j=0}^{2^n-1}((\exists\boldsymbol{z}.A(K_j^1,\cdots,K_j^n,\boldsymbol{z}))\right.\\&\qquad\left.\supset L_j^1\wedge\cdots\wedge L_j^n)\right)\end{aligned}$$

ここで，$j$ を2進数で表した場合，1) 第 $i$ けたが0のとき $K_j^i$ は $\lambda\boldsymbol{x}.(P^i(\boldsymbol{x})\wedge\Psi^i(\boldsymbol{x}))$, $L_j^i$ は $\forall\boldsymbol{x}.(P^i(\boldsymbol{x})\supset\Psi^i(\boldsymbol{x}))$ を，また，2) 第 $i$ けたが1のとき $K_j^i$ は $\lambda\boldsymbol{x}.(P^i(\boldsymbol{x})\vee\Psi^i(\boldsymbol{x}))$, $L_j^i$ は $\forall\boldsymbol{x}.(\Psi^n(\boldsymbol{x})\supset P^n(\boldsymbol{x}))$ を表す $(i=1,\cdots n)$. ■

(昭和63年10月17日受付)
(平成元年9月12日採録)



**有馬 淳**（正会員）

1959年生．1984年京都大学工学部情報工学科卒業．1986年同大学院修士課程修了．同年(株)富士通入社．同年より(財)新世代コンピュータ技術開発機構へ出向中．現在同所第一研究室研究員．人工知能全般に興味を持つが，特に常識推論，類推，帰納等の研究に従事．人工知能学会，ソフトウェア科学会各会員．