

拡張した2次有理 Bézier 曲線の性質と その曲線近似法への応用†

齊 藤 剛†† 穂 坂 衛††

与えられた線図形を、拡張した2次有理 Bézier 曲線を用いて区分近似する新しい方法を提案する。拡張2次有理 Bézier 曲線は、通常、正に定義されている Bézier 式中の重み範囲を拡張し、0と負の場合も含めるようにしたものである。これにより近似曲線として、楕円、放物線等円錐曲線全般を一つの形式で扱えるばかりでなく、曲線セグメントの利用できる範囲が拡大される。さらに、一つの曲線セグメントで近似される区分は、動的に、円錐曲線で近似可能な最大の大きさの区分となる。また、座標変換に対しては制御点の変換のみで済む。

1. はじめに

本論文では、拡張した2次有理 Bézier 曲線¹⁾を用いて近似曲線を生成する新しい方法を述べる。

文字輪郭線などの線図形を座標値の列として表現すると、一般に多くの記憶領域を必要とする。さらに、affine 変換に多くの処理時間を必要とし、面積や曲率など図形の形状や性質を表す量の計算も複雑になる。そのため、元の図形を精度良く、しかも少ない情報量で近似表現する方法が求められ、様々な方法が報告されてきた^{2),9)}。

特に、スプライン関数による近似は滑らかな曲線や曲面が近似ができるため、平滑化や CAD/CAM において広く用いられている^{2)-5),8),9)}。しかし、近似に用いる節点の配置がその近似度を大きく左右する。節点の配置については種々の方法が報告されているが、最適配置法は理論的には解決されていない。さらに、高々2次式である円錐曲線の正確な表現ができない。

2次有理 Bézier 曲線は、円錐曲線を表現することができ、しかも、制御点の持つ有利さを備えている。この2次有理 Bézier 曲線を再検討して、有効な性質を取りだし、拡張したのは著者の一人である¹⁾。

本論文で提案する近似法は区分有理式近似であり、各区分を、拡張した2次有理 Bézier 曲線で近似する。拡張2次有理 Bézier 曲線は、通常、正に定義されている Bézier 式中の重みを、0と負の場合も含めるようにしたものである。これを近似曲線として用いる特

長は以下のとおりである。(1)楕円、放物線等円錐曲線全般を一つの形式で扱える。(2)制御点を利用したパラメトリックな表現と陰関数表現との両方の特徴を利用できる。例えば、affine 変換に対して不変である。近傍点との距離や直線とのまたは曲線同士の交点が容易に求められる等。(3)特に負の重みを含めることにより一つの曲線セグメントが表現できる範囲が拡大できる。

これを用いた近似法には以下の特長がある。(1)一つの曲線セグメントで近似される区分が、動的に、円錐曲線で近似可能な最大の大きさの区分となる。(2)「曲線の延長」という新しい手法(本文2.4節)を用いることにより、区分が、少ない計算量で求まる。(3)許容誤差を近似曲線と近似すべき点との距離という直観的で分かりやすく、計算しやすい量で指定できる。(4)得られた近似曲線は Bézier 曲線であるので制御点を持ち、後の人手による修正が容易である。

始めに、2次有理 Bézier 曲線の拡張について述べる。また、拡張した2次有理 Bézier 曲線を近似曲線として用いるときに有用な性質を示す。第3章では近似法を提案する¹⁰⁾。近似例により、本方法の有効性を示す。第4章はまとめである。

2. 2次有理 Bézier 曲線の諸性質

本章では、2次有理 Bézier 曲線の性質のうち、以後の議論に関係するものについてまとめて示す。

曲線を表現する方法として、その性質の良さから Bézier 曲線あるいはB-スプライン曲線がよく用いられる^{1),2),9)}。しかし、高々2次式である円錐曲線の正確な表現ができない。グラフィクスや CAD において円錐曲線の利用価値は高いが必ずしもそれが有効に利用されているとはいいがたい。それは、円錐曲線が陰

† On the Extended Rational Quadratic Bézier Curve and Its Use to Curve-Fitting Methods by TSUYOSHI SAITOH and MAMORU HOSAKA (Department of Electrical Communication Engineering, Faculty of Engineering, Tokyo Denki University).

†† 東京電機大学工学部電気通信工学科

関数表現され、かつ、座標系に独立でないために利用しにくいからである。

2次有理 Bézier 曲線は、この円錐曲線の部分を正しく表現でき、しかも、制御点を持つ有利さを備えている。2次有理 Bézier 曲線は、3次同次座標空間の2次元平面への射影という理解が普通である。2次元平面へ射影した曲線の形状については幾つか報告^{6),9)}されているが、文献1)において、より直観的かつ幾何学的に性質を求め、凸閉包性 (convex hull) の条件を除いて2次有理 Bézier 曲線の利用範囲を拡張した。

本章は、文献1) から2次有理 Bézier 曲線の拡張の部分を抜粋し、拡張した2次有理 Bézier 曲線を近似曲線として用いるときに有用な性質を加筆したものである。

2.1 一般形と表す形状¹⁾

2次有理 Bézier 曲線は、パラメトリックに次式により表現される。

$$r(t) = \frac{(1-t)^2 w_0 P_0 + 2t(1-t)w_1 P_1 + t^2 w_2 P_2}{(1-t)^2 w_0 + 2t(1-t)w_1 + t^2 w_2} \quad (2.1)$$

ここで、 t ($0 \leq t \leq 1$) はパラメータ、 P_0, P_1, P_2 は制御点の位置ベクトル、 w_0, w_1, w_2 は各制御点に付される重みである。すべての重みが等しいときが通常の(非有理) Bézier 式である。(2.1)式のように三つの重みでは、その曲線の形状や性質が考えにくい。そこで、形状を変えずに変換して一つの重みで表現する。 $w_0 \cdot w_2 > 0$ のとき、 $w = \sqrt{w_0 w_2}$ とおいて、

$$t = \omega t' / ((\omega - 1)t' + 1) \quad (2.2)$$

なるパラメータ変換を施すことにより、(2.1)式は、 t' ($0 \leq t' \leq 1$) をパラメータとした次式となる。

$$r(t') = \frac{(1-t')^2 P_0 + 2t'(1-t')w P_1 + t'^2 P_2}{(1-t')^2 + 2t'(1-t')w + t'^2} \quad (2.3)$$

ただし、 $w = w_1 / \sqrt{w_0 w_2}$ 。

したがって、第2制御点 P_1 にのみ重みが付されている(2.3)式の形式であっても一般性は失われない。そこで、以後の議論は、曲線を(2.3)式の形式で表現し、第2制御点 P_1 に付された重みを単に w と書く。また、重み w を明示し、(2.3)式の形式の曲線を $r(t; w)$ と書く。

次に、重み w と曲線 $r(t; w)$ の形状との関係を示す。そのために、まず、(2.3)式の陰関数表現を求める。(2.3)式で、制御点を、

$$P_0 = (x_0, y_0), P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2) \quad (2.4)$$

に取り、 $t = u/(1+u)$ と置く。これを xy 座標系で書き直すと次に示す $x(u)=0, y(u)=0$ なる u の2次式が二つ得られる。

$$\begin{aligned} x(u) &= u^2(x-x_2) + 2uw(x-x_1) + (x-x_0), \\ y(u) &= u^2(y-y_2) + 2uw(y-y_1) + (y-y_0). \end{aligned} \quad (2.5)$$

これらを連立させ、例えばシルベスタ (Sylvester) の消去法¹¹⁾等を利用して u を消去する。

一般性を失わずに分かりやすい形にするために、制御点を図1のように

$$P_0 = (-c, 0), P_1 = (b, h), P_2 = (c, 0) \quad (2.6)$$

に取る。このとき、(2.3)式の陰関数表示は、

$$h^2 x^2 - 2bhxy + (c^2(1/w^2 - 1) + b^2)y^2 + 2c^2by - c^2h^2 = 0 \quad (2.7)$$

となる。これは、円錐曲線の式である。この判別式は、 $-4c^2(1/w^2 - 1)h^2$ である。したがって、 $w^2 < 1$ のときは楕円、 $w^2 > 1$ のときは双曲線となる。また、 $w^2 = 1$ の場合、放物線となる。特に、 $b=0, w^2 = c^2/(c^2 + h^2)$ とすると真円となる。図2に、 $|w| > 1, w = 1, |w| < 1$ の各重みを持つ曲線を例示する。

(2.3)式では、従来は $w > 0$ と定義されていた。しかし、(2.7)式から分かるように曲線の形状は w^2 で定まり、 w の符号はその形状に影響を及ぼさない。した

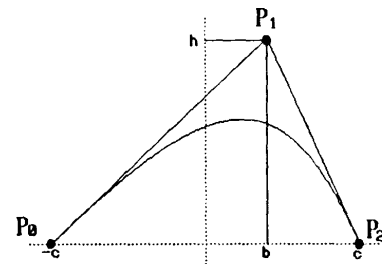


図1 制御点の配置と曲線の例
Fig. 1 Positions of control points and example of curve.

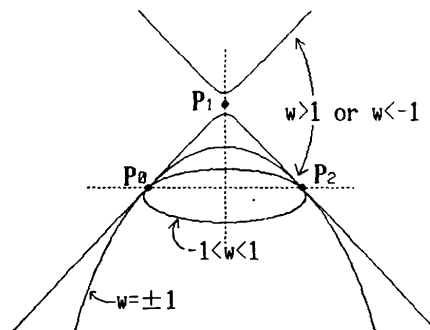


図2 重みと曲線形状の関係
Fig. 2 Relations between curve shapes an its weight.

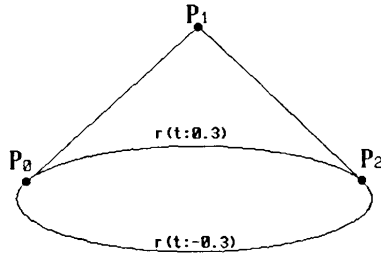


図3 重みの符号と形状の関係
Fig. 3 Relation between curve shapes and the sign of its weight.

がって、 w は負であってもいいことになる。一般に、ある円錐曲線を二つの部分に分け、その一方を $r(t:w)$ とすれば、他方は $r(t:-w)$ となる。図3に、 $w = \pm 0.3$ の曲線を例示する。図に示したように、 $w > 0$ の場合は、曲線は制御点が構成する3辺形の内側に位置し、凸閉包性が成り立つ。 $w < 0$ のときは、凸閉包性は成り立たないが、その端点で制御辺 $\overline{P_0P_1}$ 、 $\overline{P_1P_2}$ に接する。

このように、負の重みを持つ曲線の形状や性質が明らかになると、その性質が利用できるようになる。そこで、2次有理 Bézier 式を拡張し、凸閉包性の条件を取り除き、重みを負の領域まで含めることにする。

これにより、従来からの重みを正に限定した場合に比して、一つの2次有理 Bézier 式で表現できる範囲が広がられた。次章で述べる近似法では、このように拡張された2次有理 Bézier 曲線を用いる。これにより、円錐曲線を用いる限り最少のセグメント数で近似できる。

また、(2.2)式で $w_0 \cdot w_2 > 0$ を仮定したが、 $w_0 \cdot w_2 < 0$ の場合は、付録Aに示す。この曲線は、その途中に無限遠点を含むので近似曲線としてうまく扱えない。本論文では、 $w_0 \cdot w_2 > 0$ の曲線のみ扱う。

2.2 重みとパラメータの算定

2次有理 Bézier の場合、制御点と制御点以外の一点を与えると、その点を通る曲線は一意に定まる。すなわち、重みが一意に定まる。ここでは、制御点以外の一点を与え、その点を通る曲線の重みとその点に対応するパラメータ値の算定法を示す。これらの算定法は Piegl⁶⁾ も示しているが、 $w \geq 0$ の場合しか扱っていない。

図4のように、制御点を P_0, P_1, P_2 とし、与えられた点 P_c を通る曲線の重みと P_c に対応するパラメータを算定する場合を考える。ここで、 P_c を通る曲線の重みを w 、 P_c に対応するパラメータの値を t_0 、

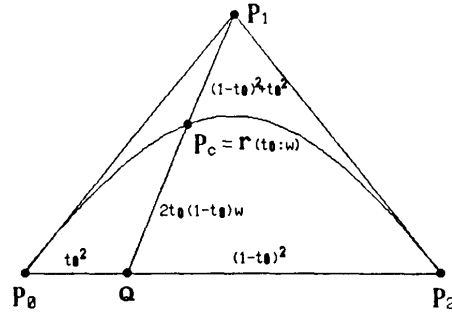


図4 重みとパラメータの幾何学的な関係
Fig. 4 Geometric relations among weight, parameter and control polygon.

すなわち、 $P_c = r(t_0:w)$ と仮定する。このとき、 P_c 、 w 、 t_0 の間には、(2.3)式を変形することにより、次の関係が成り立つ。

$$P_c = \frac{(1-t_0)^2 + t_0^2}{(1-t_0)^2 + 2t_0(1-t_0)w + t_0^2} \cdot \frac{(1-t_0)^2 P_0 + t_0^2 P_2}{(1-t_0)^2 + t_0^2} + \frac{2t_0(1-t_0)w}{(1-t_0)^2 + 2t_0(1-t_0)w + t_0^2} P_1 \quad (2.8)$$

(2.8)式の第1項のベクトル

$\{(1-t_0)^2 P_0 + t_0^2 P_2\} / \{(1-t_0)^2 + t_0^2\}$ を Q と置く。 Q は線分 $\overline{P_0P_2}$ を

$$t_0^2 : (1-t_0)^2 \quad (2.9)$$

に分割した点である。また、(2.8)式の第1項および第2項の係数は、それらを加え合わせると1になる。したがって、 P_c は P_1 と Q を通る直線上にあり線分 $\overline{P_1Q}$ を、

$$(1-t_0)^2 + t_0^2 : 2t_0(1-t_0)w \quad (2.10)$$

に分割した点である。

ここで線分 $\overline{P_0Q}$ および線分 $\overline{QP_2}$ の長さの比を $n:m$ とする。また、線分 $\overline{P_1P_c}$ および線分 $\overline{P_cQ}$ の長さの比を $h:k$ とすれば、

$$t_0 = \sqrt{n} / (\sqrt{n} + \sqrt{m}), \quad (2.11)$$

$$w = k (\sqrt{n/m} + \sqrt{m/n}) / (2h), \quad (2.12)$$

である。ただし、 h は Q から P_1 に向かう方向を正に、 k はその反対に符号を付ける。このように符号を付けることにより、重みが負のときでも算定できる。

Q が線分 $\overline{P_0P_2}$ の外側となる場合は、ここでは扱わない。

2.3 曲線と近傍点との距離の算定

曲線あてはめにおいて、与えられた点と近似曲線との距離は、近似曲線の評価する上で重要な量である。しかし、例えばパラメトリックな曲線の場合、その距離を厳密に求めることは困難である³⁾。しかし、陰関

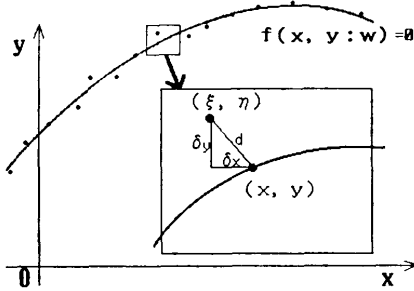


図 5 曲線との距離

Fig. 5 Illustrative interpretation of distance between curve and given points.

数表現の場合これを求めることができる。

xy 座標系での点 (ξ, η) と曲線 $r(t; w)$ との距離 d を以下のように定義する (図 5 参照). (x, y) を $r(t; w)$ 上の点とすると、

$$d = \min(\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}). \quad (2.13)$$

距離 d は以下のように求められる. (2.3) 式の陰関数表現 $f(x, y; w)$ を用いる. 任意の点 (ξ, η) に対して、

$$D = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + \lambda f(x, y; w) \quad (2.14)$$

と置く. (2.14) 式は、条件付き最小 2 乗法の誤差算定式である. したがって、 D を最小とする (x, y) が、 (ξ, η) に最も近い、曲線 $f(x, y; w) = 0$ 上の点となる. また、距離 d の 2 乗が D である. これを求めるために、

$$\delta_x = x - \xi, \quad \delta_y = y - \eta \quad (2.15)$$

と置く (図 5). このとき、(2.14) 式は、

$$D = \delta_x^2 + \delta_y^2 + \lambda f(\delta_x + \xi, \delta_y + \eta; w) \quad (2.16)$$

となる. d を最小化するためには、

$$\partial D / \partial \delta_x = 0, \quad \partial D / \partial \delta_y = 0, \quad \partial D / \partial \lambda = 0 \quad (2.17)$$

とすればよい. ここで、点 (ξ, η) が曲線 $f(x, y; w) = 0$ の近傍にあると仮定できれば、 $f(x, y; w)$ を 1 次項まで展開することにより、(2.17) 式は以下の 3 式となる.

$$\begin{aligned} \partial D / \partial \delta_x &= 2\delta_x + \lambda f_x(\xi, \eta; w) = 0, \\ \partial D / \partial \delta_y &= 2\delta_y + \lambda f_y(\xi, \eta; w) = 0, \\ \partial D / \partial \lambda &= f(\xi + \delta_x, \eta + \delta_y; w) = 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

第 1, 2 式を第 3 式に代入することにより、第 3 式は、 λ の 2 次式となる.

また、(2.12) 式で重みの算定式を示したが、これは、(2.16) 式において、

$$D = 0, \quad \delta_x = 0, \quad \delta_y = 0 \quad (2.19)$$

と置くことにより、

$$f(\xi, \eta; w) = 0 \quad (2.20)$$

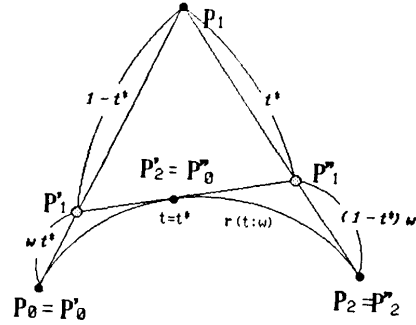


図 6 曲線の分割と分割後の制御点の位置

Fig. 6 Division of curve and positions of new control points.

として w を求めることもできる。

2.4 曲線の分割と延長

従来から、次数を変えずに Bézier 曲線を分割することはできた. しかし、延長することはできなかった. 拡張した 2 次有理 Bézier 曲線では延長ができ、延長した曲線を定義する新しい制御点は容易に求まる. 次章で述べる曲線近似の特長は、この性質を利用し、近似区分を求めるための計算量を減少させたことである.

本節では、まず、2 次有理 Bézier 曲線の分割について述べる. 次に、分割を利用して、延長した曲線を定義する新しい制御点と重みを求める方法を示す.

図 6 を例にする. 曲線 $r(t; w)$ を $t = t^*$ で分割する. $0 \leq t \leq t^*$ の部分は、(2.3) 式に対して、 $t = \tau t^*$ なるパラメータ変換を施すことにより、 τ ($0 \leq \tau \leq 1$) をパラメータとした次式となる.

$$\begin{aligned} r^*(\tau) &= \frac{(1-\tau t^*)^2 P_0 + 2\tau t^*(1-\tau t^*)w P_1 + (\tau t^*)^2 P_2}{(1-\tau t^*)^2 + 2\tau t^*(1-\tau t^*)w + (\tau t^*)^2} \end{aligned} \quad (2.21)$$

(2.21) 式を、(2.3) 式の形式で表す. 分割した前半部の曲線を $r'(\tau; w')$ とする. その制御点 P'_i ($i = 0, 1, 2$) と重み w' は、次のようにして分割前の制御点および重みから求まる.

$$\begin{aligned} P'_0 &= P_0, \\ P'_1 &= \frac{(1-t^*)}{(1-t^*) + t^*w} P_0 + \frac{t^*w}{(1-t^*) + t^*w} P_1, \\ P'_2 &= r(t^*; w), \\ w' &= \frac{(1-t^*) + t^*w}{\sqrt{(1-t^*)^2 + 2t^*(1-t^*)w + t^{*2}}}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

一方、 $t^* \leq t \leq 1$ である分割後半部の曲線 $r''(\sigma; w'')$ は、(2.3) 式に対して、 $t = \sigma(1-t^*) + t^*$ なるパラメー

タ変換を施すことにより得られる。曲線 $r''(\sigma:w'')$ の制御点 P''_i および重み w'' は以下ようになる。

$$\begin{aligned} P''_0 &= r(t^*:w), \\ P''_1 &= \frac{t^*}{(1-t^*)w+t^*} P_2 + \frac{(1-t^*)w}{(1-t^*)w+t^*} P_1, \\ P''_2 &= P_2, \\ w'' &= \frac{(1-t^*)w+t^*}{\sqrt{(1-t^*)^2+2t^*(1-t^*)w+t^{*2}}} \end{aligned} \quad (2.23)$$

各制御点と制御辺との関係は、図6に示した。

(2.22) および (2.23) 式では、

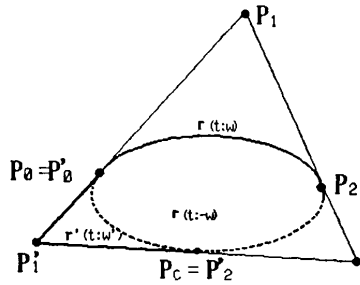
$$(1-t^*)^2+2t^*(1-t^*)w+t^{*2} > 0 \quad (2.24)$$

が仮定されている。したがって、 $w < -1$ かつ

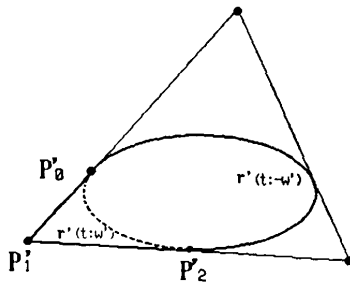
$$1 - \sqrt{(w+1)/(w-1)} < t^* < 1 + \sqrt{(w+1)/(w-1)} \quad (2.25)$$

の場合、分割はできるが(2.3)式の形式で表現できない。これは制御辺と接しない方の双曲線(図2で P_1 の上方にある曲線)上で分割する場合であり、分割の結果は付録Aの場合となるからである。

次に、延長であるが、延長した曲線を定義する制御点および重みは以下のように求まる。図7(a)の実線で示した曲線 $r(t:w)$ を考える。 $r(t:w)$ を円錐曲線



(a) 端点 P_2 を P_c へ延長する。
 (a) grow the end_point P_2 to P_c .



(b) 新しい制御点を求める。
 (b) obtain new control points.

図7 曲線の延長と延長した曲線の制御点
 Fig. 7 Growth of curve and position of control points of grown curve.

としての形状を変えずに延長すると破線の曲線となる。この曲線は、 $r(t:-w)$ である。ここで、 $r(t:-w)$ を P_c で分割したとする。その前半を $r'(t:w')$ とし、その制御点を $P'_0(=P_0)$, P'_1 , $P'_2(=P_c)$ とする。このとき、 $r'(t:w')$ は弧 P_0P_c の短い方の曲線を、また、重みの符号を反対にした $r'(t:-w')$ は弧 P_0P_c の長い方の曲線 (P_2 を通る曲線) を表す。この $r'(t:-w')$ は、もとの曲線 $r(t:w)$ の端点 P_2 を P_c にまで延長した曲線を定義していることになる。したがって、延長した曲線の制御点は P'_0 , P'_1 , P'_2 、重みは $-w'$ となる(図7(b))。

上記の方法で曲線を延長すると、 P'_0 と P'_2 における各々の接線が平行になることもある。この場合 P'_1 は無限遠となる。しかし、無限遠になったとしても差し支えなく、「第2制御点が無限遠である」という情報さえ持てばよい。

3. 2次有理 Bézier 曲線による曲線近似

本論文で述べる近似法では、与えられた点列を区分に分け、各々の区分を拡張した2次有理 Bézier 曲線で近似する。本章では、その方法を示す。以後、一つの区分を近似する一つの曲線を(近似)曲線セグメントと呼ぶことにする。

2次有理 Bézier 曲線による近似は、Piegl⁶⁾ も論じている。本論文の方法との大きな違いは次の3点である。第1点は近似に用いる曲線の範囲である。Piegl は、重みが正である曲線の部分を用いた。本論文は、重みを $w > -1$ とした。 $w \leq -1$ の曲線は、図2に示したように、その途中に無限遠点が含まれている。したがって、無限遠点が含まれ点列を近似する場合には必要であるが、そのような点列の近似は現実的ではない。しかし、重みを $w > -1$ とすることにより、一つの曲線セグメントで、より広い区分が近似可能となり、より少ないセグメント数で近似できる(後に図10で例示する)。第2は近似の評価法にある。Piegl は、近似する各々のデータ点に対して、そのデータ点を通過するときの重みを求め、求められた重みの最大値と最小値の差から評価している。本論文では、近似するデータ点との実際の距離で評価している。この方が、実際に人が把握しやすい量である。第3点は、一つの曲線セグメントで近似する区分の求め方にある。Piegl は、近似するデータ点列を繰り返し分割して、近似できる最大の区分を求めている。本論文の方法では、3.1節で述べる「区分の拡大」という方法によ

り、より少ない計算量で最大の区分が定められる。本近似法は、与えられた点が多く、密である場合に特に有効な方法である。

以後、近似するデータ点を $\{S_i : 1 \leq i \leq n\}$ とする。また、近似の評価基準は近似する点と近似曲線との距離とし、許容距離を δ と書く。

3.1 区分の拡大

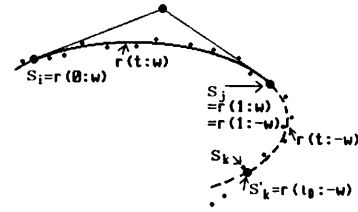
本節では、本論文で述べる近似法の特長の一つである「区分の拡大」について述べる。

例えばスプライン関数による近似では、まず、一つの多項式で近似すべき区分を定め、その区分内のデータ点を許容誤差以内で近似する曲線を求める。多くの場合、角 (corner) を区分の分け目としている。与えられた点列から角を検出するアルゴリズム⁴⁾も開発されているが、点列に含まれる誤差により、安定して検出できるとは限らない。また、節点の選択やスプライン係数を求めるのに最小2乗法が用いられる^{3), 4)}。これを行うのは簡単ではなく、しかも、収束しない場合があることが指摘されている^{3), 9)}。

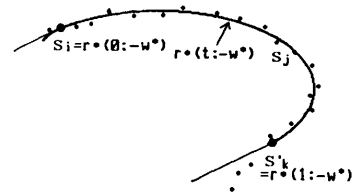
本論文で述べる近似法はスプライン近似等と異なり、あらかじめ区分は設定しない。2.4節で示したが拡張した2次有理 Bézier 曲線は延長ができる。この性質を利用した「区分の拡大」という手法により、一つの曲線セグメントが近似する区分は、円錐曲線で表すことができる最大の区分になる。以下で、区分の拡大の原理を述べる。

図8を例にする。近似する点の数を n とし、 i, j, k ($1 \leq i < j < k \leq n$) を点の添え数とする。いま、 S_i から S_j までの各点が一つの曲線 $r(t:w)$ で近似できたとする (図8(a))。このとき、2.1節および2.4節で述べたように、重みの符号を逆にした $r(t:-w)$ は、 $r(t:w)$ の曲線を延長した部分となる。ここで、さらに、 S_j から S_k までの各点が $r(t:-w)$ により近似できる、すなわち、 S_j から S_k までの各点と曲線 $r(t:-w)$ との距離が、与えられた評価基準 δ より少ないとき、 S_i から S_k までの点列が一つの曲線で近似できることになる。

そこで S_i から S_k までを近似する曲線を定義する制御点を求める。以下の方法により求まる。まず、 S_k に最も近い、 $r(t:-w)$ 上の点 S'_k を求め、そのパラメータ値を算定する。これを t_0 とする。ここで、 S'_k は (2.17) 式を満たす点である。またパラメータ t_0 の算定法は2.2節で述べた。このとき、曲線 $r(t:w)$ の端点 S_j を $r(t_0:-w)$ まで延長すれば、 S_i から S_k ま



(a) 区分を拡大する
(a) expand a span



(b) 拡大された区分を近似する曲線を求める
(b) obtain new curve fitting with the expanded span.

図8 近似する区分の拡大法

Fig. 8 A method of expansion of span fitted with one segment.

でを近似する曲線が得られたことになる。この方法は2.4節で示した。すなわち、 $r(t:-w)$ を $t=t_0$ で分割した前半の部分を $r^*(t:w^*)$ とすれば、 S_i から S_k までを最大距離 δ で近似する曲線は $r^*(t:-w^*)$ となる (図8(b))。2.4節で述べたように分割に、第2制御点が無限遠となる場合がある。このような場合、本近似法では、十分に遠方にある点で代用した。

本節で述べた曲線の延長により区分を拡大することの特長は、それが拡大された点列数のオーダーで実現できることにある。

3.2 曲線近似法

本節では、点列が与えられたときに、それらを近似する曲線セグメント列を求めるアルゴリズムを示す。本アルゴリズムの流れは以下のとおりである。 n は、近似すべき点の数、 p, k ($1 \leq p, k \leq n$) は近似する点の添え数とする。

[1] 初期値を設定する。

[1.1] 初期区分の開始座標 q を S_1 とする。

[1.2] S_1 における接線ベクトル a_1 を求める。

[1.3] $p=1$ と置く。

[2] 初期区分を近似するセグメント r を創成する。

[3] 近似曲線セグメントを求める。

[3.1] 区分を拡大する (S_k まで近似できたとする)。

[3.2] 重みを再計算する。

[3.3] 近似曲線セグメントと S_{k+1} との距離が、与

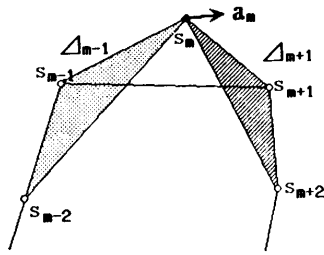


図9 接線方向の計算法と用いる記号

Fig. 9 A method of obtaining tangential direction, and meanings of symbols.

えられた許容誤差 δ より大きくなるまで 3.1, 3.2 を繰り返す。

[4] $k \neq n$ のとき, $p=k, q=r(1:w), a_p = \dot{r}(1:w)$ とし, [2] から繰り返す。

[5] 近似曲線セグメントの第2制御点を S_n にする。ここで, $\dot{r}(t:w) = dr(t:w)/dt$ とする。

上記アルゴリズムの [3] の繰り返しにより, 一つの近似曲線セグメントで近似される区分が, 円錐曲線で近似可能な最長の区分にまで広がる。上記アルゴリズムの中で, [3.1] は 3.1 節で述べた。以下では, [2] と [3.2] について述べる。

初期セグメントの創成

以下の p, q, a_p は, 前記アルゴリズムの [1] および [4] で設定される。ここでは, 次の曲線セグメント (これを初期セグメントと呼ぶ) を求める。まず, q を第1制御点, その接線ベクトルを a_p, S_{p+2} を第3制御点とする。次に, S_{p+2} の接線ベクトル a_{p+2} を以下の方法で求める⁶⁾ (図9参照)。ある $m (1 < m < n-1)$ に対して, S_{m-1}, S_m, S_{m+1} により囲まれた3辺形の面積を Δ_m と書く。

ここで,

$$\kappa = \Delta_{p+2} / (\Delta_{p+1} + \Delta_{p+3}) \quad (3.1)$$

と置き, S_{p+2} における接線ベクトル a_{p+2} を,

$$a_{p+2} = (1-\kappa)(S_{p+2}-S_{p+1}) + \kappa(S_{p+3}-S_{p+2}) \quad (3.2)$$

により求める。これと a_p の交点を第2制御点とする。次に, S_{p+1} を通るように重みを求める。これを初期セグメントとする。

$S_1 = S_n$ の場合, すなわち, 近似する点列が閉曲線を形成する場合, S_{n-1}, S_n, S_1, S_2 における接線は, (3.1) 式における各面積を,

$$\begin{aligned} S_0 = S_{n-1}, S_{-1} = S_{n-2}, S_{-2} = S_{n-3} \\ S_{n+1} = S_2, S_{n+2} = S_3, S_{n+3} = S_4 \end{aligned} \quad (3.3)$$

として求める。また, [1.2] における S_1 の接線も同様にして求める。これにより, 近似された閉曲線の端

点でも接線連続になる。

重みの再計算

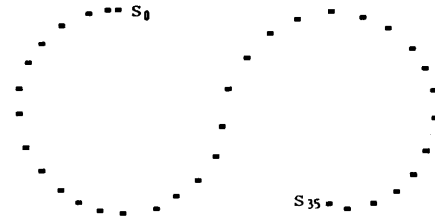
3.1 節での成長結果 $r^*(t:-w^*)$ は点 S_i から点 S_k を近似し, その途中にある点 S_j を通過する最大長の曲線である。したがって, 点 S_j を評価基準以内で近似できる曲線を構成すれば, さらに, 曲線を成長できる可能性がある。そこで, S_i から S_k を近似するための重みを求める。方法は以下のとおりである。

上記の曲線 $r^*(t:-w^*)$ の制御点をそのままにして, S_{i+1} から S_{k-1} までの各点を通る重み w_m を求める。すなわち, $i+1 \leq m \leq k-1$ とするとき,

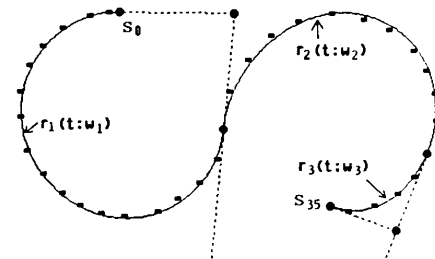
$$S_m = r^*(t_m : w_m) \quad (3.4)$$

となる w_m を, 2.2 節で示した方法で求める。

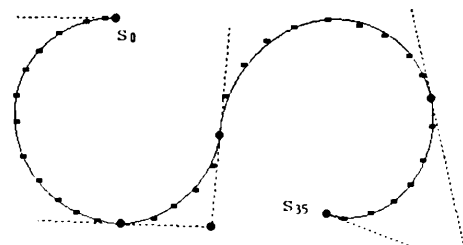
ここで, ある点 S_m に注目する。 w_m を少し変化さ



(a) 与えられた点列
(a) Given points



(b) 本論文の方法
(a) Result of our method.



(c) 重みが正である曲線の場合
(c) Result of the case using curves whose weights are positive.

図10 重みを正に制限した場合との比較
Fig. 10 Comparison with the case using only positive weight.

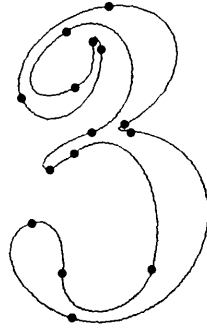


図 11 文字輪郭線近似へ適用した結果
(各セグメントの第1および第3制御点のみ示す)
Fig. 11 Result of application to fit with outlines
of character.
(In the figure, we indicate each segments
with only 1st or 3rd control point.)

せた場合、曲線 $r^*(t_m : w_m)$ と点 $S_m = (x_m, y_m)$ との距離は、

$$e_m = \left. \frac{\partial f(x_m, y_m : w)}{\partial w} \right|_{w=w_m} \quad (3.5)$$

に比例した分だけ増えると近似できる。これを加重として、(3.4)式により求めた重みの加重平均を求め、それを新しい重みとする。すなわち、新たな重み w' を $w' = \sum (e_m w_m) / \sum e_m$, ただし $i+1 \leq m \leq k-1$

(3.6)

とする。

3.3 近似の例

近似例を図 10 に示す。(a)は与えられた点列である。(b)は、本近似法による近似結果である。点線は制御辺を表すが、第2制御点がかかなり離れるときは、その途中で省略した。第1および第2セグメントは負の重みを持つ。3セグメントで全体が近似できる。(c)は、重みが正である曲線のみで近似した場合⁶⁾である。この場合、4セグメントを要している。負の重みを持つ曲線が近似に有効であることが分かる。

また、図 11 は、本近似法を用いて文字の輪郭点を近似した例である¹⁰⁾。図 11 では、近似セグメントの第1および第3制御点のみ、すなわち、区分の区切りを●印で示し、その制御辺は省略した。輪郭点数は695点であり、近似曲線セグメント数は15セグメントである。同じ文字を、正の重みのみで表現する、すなわち、Piegl⁶⁾の方法によると18セグメントを要する。文字輪郭線近似への応用については別に報告する。

4. おわりに

本論文では、まず、2次有理 Bézier 曲線を拡張し、

その有用な性質を明らかにした。また、この曲線を利用するときに必要となる、重みやパラメータの算定法を示した。さらに、曲線の延長という新しい考え方を示し、その方法を述べた。次いで、拡張した2次有理 Bézier 曲線を用いた曲線近似法を示し、近似結果を例示した。近似曲線は、Bézier 曲線であり、座標系から独立している。座標変換は容易である。

また、陰関数表現を用いることにより、直線との交点は2次式、2次有理 Bézier 曲線同士の交点は4次式を解くことで求められる。これらは、例えば、領域埋め処理にとって有用な性質である。

本文中で述べたが、本近似法は、与えられた点が密である場合に特に有効な方法である。しかし、点間距離の分散が大きいときに好ましくないうねりが生じることがある。このような点列を近似する方法も開発した。

また、本近似法の応用として、3.3節で例示したが、輪郭線を本近似法で近似したベクトル文字フォントの作成を試みた¹⁰⁾。

これらは、枚数の都合により別に報告する。

謝辞 本研究の遂行に際し、本学研究生久志本琢也氏から有用な助言を頂きました。また、本学大学院生佐藤龍君(現:(株)QUICK)には、各種の表示出力プログラムを作成して頂きました。ここに感謝いたします。

また、貴重なご助言を賜りました査読の方々に感謝いたします。

参考文献

- 1) 穂坂, 久志本, 権田: 曲線曲面の接続と干渉(続), 情報処理学会 G & CAD シンポジウム, pp. 121-132 (1988).
- 2) 大特集: コンピュータグラフィックス, 情報処理, Vol. 29, No. 10 (1988).
- 3) 石村, 橋本, 辻本, 有本: 修正動的計画法による線図形のスプライン近似, 信学論, Vol. J68-D, No. 2, pp. 169-176 (1985).
- 4) 寅市, 関田, 森: 高品位文字フォントの自動圧縮, 信学論, Vol. J70-D, No. 6, pp. 1164-1172 (1987).
- 5) 鳥島, 山崎: 文字輪郭線の区分的多項式による近似, 信学技報, PUR-87-107 (1988).
- 6) Piegl, L.: A Technique for Smoothing Scattered Data with Conic Sections, *Computer in Industry*, pp. 223-237, North Holland (1987).
- 7) Hosaka, M. and Kinura, F.: A Theory and Methods for Three Dimensional Free Form Shape Construction, *J. of IP*, Vol. 3, No. 3,

- pp. 140-151 (1980).
 8) Plass, M. and Stone, M.: Curve-Fitting with Piecewise Parametric Cubics, *Computer Graphics*, Vol. 17, No. 3, pp. 229-239 (1983).
 9) Farin, G.: *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design—A Practical Guide*, Academic Press, Inc. (1988).
 10) 齊藤, 穂坂: 文字輪郭線の2次有理 Bézier 式による近似, 信学全大, D-432 (1989).
 11) 佐武: 線形代数学, 裳華房 (1987).

付 録 A

分かりやすいように簡単化し, (2.1)式の制御点および重みを,

$$\begin{aligned} P_0 &= (0, 0), P_1 = (1, 1), P_2 = (a, 0), \\ w_0 &= 1, w_1 = w, w_2 = -1 \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

として, (2.1)式の陰関数表現を求める. 結果は,

$$4x^2 + (4(1-a) - a^2/w^2)y^2 + 4(a-2)xy - 4ax + 4a = 0 \quad (\text{A.2})$$

となる. ここで判別式は,

$$16a^2(1+1/w^2) > 0 \quad (\text{A.3})$$

となり, 双曲線である.

曲線の例を図 12 に示す.

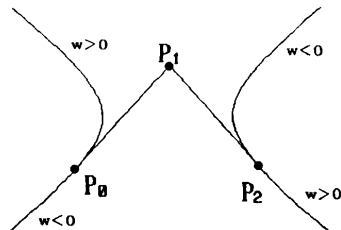


図 12 $w_1 < 0$ の場合の形状
 Fig. 12 The curve shape when $w_1 < 0$.

(平成元年5月8日受付)
 (平成元年9月12日採録)



齊藤 剛 (正会員)

昭和25年生. 昭和48年東京電機大学工学部電気通信工学科卒業. 昭和51年東京電機大学大学院修士課程修了. 昭和54年4月, 工学部電気通信工学科助手. 現在, グラフィックス, CAD に関する研究に従事. 電気情報通信学会, 日本 ME 学会など各会員.



穂坂 衛 (名誉会員)

大正9年生. 昭和17年9月東京大学工学部航空工学科卒業. 海軍. 運輸省, 国鉄を経て, 昭和34年10月より東京大学教授, 50年4月より東京工業大学教授兼任, 昭和56年3月東京大学, 東京工業大学定年. 工学博士. 東京大学名誉教授. 現, 東京電機大学教授, 当学会前会長, 調査研究運営委員会委員長. 学会論文賞 (当学会2編, 機械学会1編), 当学会功績賞, 紫綬褒章, 科学技術庁長官賞など. 昭和28年からコンピュータに関心を持ち実時間情報システム, グラフィックス, CAD などとその初期から取り扱う.