代数方程式に対する高次大域的解法と数値的非収束性†

五十嵐 正夫††

初めに代数方程式に対する Newton-Raphson 系の高次反復解法の容易な導出法を示す．それに対応づけて6次までの大域的解法を導く．そのことにより局所的解法と大域的解法の差異を明確にする．つぎに 4, 5, 6次の大域的解法に Aberth の初期値を与えた場合，その減少率を示す．最後に高次大域的解法は数値的に収束しない場合が多いがその原因を考察する．いくつかの問題について数値例を示す．

1. はじめに

代数方程式

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots a_{n-1}x+a_n=0 \tag{1.1}$$

の数値解を1つ1つ求める Newton-Raphson 系解法をここでは局所的解法と呼ぶ．それに対して全数値解を同時に求める解法を Durand[3] に従って大域的解法と呼ぶ．

Newton-Raphson 系高次反復解法の導出法としては Euler[5] や Traub[13] の方法が比較的よく知られているがここでは Frame[6] による3次局所的解法 (Halley と呼ばれることが多い) の導出法を一般化して m 次収束する局所的解法の容易な導出法を示す．

次にその局所的解法に対応づけて6次までの大域的解法を具体的に導くことにより局所的解法と大域的解法との関係を明らかにする．また 4, 5, 6次の大域的解法に対して Aberth の初期値を与えた場合，2, 3次に対するのと同様な近似を行いそれらの減少率を計算する．

最後に 2, 3, 4, 5 次の大域的解法をヤコビ型とガウス-ザイデル型に分けて数値実験を行う．良条件，悪条件の方程式にかかわらず高次大域的解法は非収束となることがほとんどである．その原因について考察する．

2. 高次局所的解法

J. S. Frame[6] の Halley 法の導出法を拡張して高次局所的解法を反復的に導きだし具体的な反復公式を与える．基本的には低次公式を与えられた方程式のテーラー展開式に順次繰り込む手法である．

† High Order Global Methods for Algebraic Equations and Numerical Divergence of the Methods by MASAO IGARASHI (Mathematical Laboratory, College of Agriculture and Veterinary Medicine, Nihon University).

†† 日本大学農獣医学部数学研究室

$f(x)=0$ の厳密解を α，近似解を x，$\varepsilon=\alpha-x$ とする．

$$\begin{aligned}0&=f(\alpha)=f(x+\alpha-x)\\&=f(x)+f'(x)\varepsilon+f''(x)\varepsilon^2/2!+f'''(x)\varepsilon^3/3!+\cdots\\&\quad+f^{(n)}(x)\varepsilon^n/n!+O(\varepsilon^{n+1})\end{aligned}$$

簡単のため変数 x を省略して，

$u=f/f'$, $A_k=f^{(k)}/(f'k!)$ とおくと

$$u=-A_1\varepsilon-A_2\varepsilon^2-A_3\varepsilon^3-\cdots-A_n\varepsilon^n-O(\varepsilon^{n+1})$$

となる．初めに

$$u=-A_1\varepsilon-O(\varepsilon^2)=-\varepsilon-O(\varepsilon^2)=x-\alpha-O(\varepsilon^2),$$

$O(\varepsilon^2)+\alpha=x'$ とおけば

$$x'=x-u=x-\frac{f}{f'} \tag{2.1}$$

となり Newton-Raphson 法となる．ここで $\varepsilon_1=-u$ とおく．

$$\begin{aligned}u&=-A_1\varepsilon-A_2\varepsilon^2-O(\varepsilon^3)=-(1+A_2\varepsilon)\varepsilon-O(\varepsilon^3)\\&=-(1+A_2\varepsilon_1)\varepsilon-O(\varepsilon'^3)=-(1-A_2u)\varepsilon-O(\varepsilon'^3),\\&\varepsilon'=\mathrm{MAX}(|\varepsilon_1|,\ |\varepsilon|)\end{aligned}$$

ここで上式の両辺を $-(1-A_2u)$ で割り算し $O(\varepsilon'^3)+\alpha=x'$ とおくと

$$x'=x-\frac{u}{1-A_2u} \tag{2.2}$$

となり Halley 法となる．これが Frame による Halley 法の導出法である．

ここで $\varepsilon_2=-u/(1-A_2u)$ とおく．

$$\begin{aligned}u&=-A_1\varepsilon-A_2\varepsilon^2-A_3\varepsilon^3-O(\varepsilon^4)\\&=-((A_3\varepsilon+A_2)\varepsilon+1)\varepsilon-O(\varepsilon^4)\\&=-((A_3\varepsilon_1+A_2)\varepsilon_2+1)\varepsilon-O(\varepsilon'^4),\\&\varepsilon'=\mathrm{MAX}(|\varepsilon_1|,\ |\varepsilon_2|,\ |\varepsilon|)\end{aligned}$$

とすると前と同様にして

$$x'=x-\frac{(1-A_2u)u}{1-2A_2u+A_3u^2} \tag{2.3}$$

を得る．これは Kiss[9] の4次の公式と言われているが R. W. Snyder[12] も同様な公式を導いている．上式

の補正項 ε_3 とおき

$$u=-A_1\varepsilon-A_2\varepsilon^2-A_3\varepsilon^3-A_4\varepsilon^4-O(\varepsilon^5)$$
$$=-(((A_4\varepsilon+A_3)\varepsilon+A_2)\varepsilon+1)\varepsilon-O(\varepsilon^5)$$
$$=-(((A_4\varepsilon_1+A_3)\varepsilon_2+A_2)\varepsilon_3+1)\varepsilon-O(\varepsilon'^5)$$

ただし $\varepsilon'=\mathrm{MAX}\,(|\varepsilon_1|,|\varepsilon_2|,|\varepsilon_3|,|\varepsilon|)$ とすると前と同様にして

$$x'=x-\frac{(1-2A_2u+A_3u^2)u}{1-3A_2u+(2A_3+A_2^2)u^2-A_4u^3} \quad (2.4)$$

この5次の公式も Kiss[9] が示している．しかし同様にして導かれる次の6次収束する公式はいまだ発表されてないようである．

$$x'=x-\{(1-3A_2u+(2A_3+A_2^2)u^2-A_4u^3)u\}/\{1-4A_2u+(3A_3+3A_2^2)u^2-(2A_2A_3+2A_4)u^3+A_5u^4\} \quad (2.5)$$

このようにして前の補正値を順次繰り込むことにより Euler や Traub と異なる方法で容易に高次収束する局所的公式が得られる．

3. 高次大域的解法

大域的解法は収束の次数に従い1次収束の解法，2次収束の解法，一般に m 次収束の解法に分類される．さらに各解法はヤコビ型とガウス-ザイデル型[10]に分類される．それらのうちでも Durand-Kerner 法[3),8)]（または Dochev 法[2)]と言われるが解法の源泉は K. Weierstrass[14)] とされる）と呼ばれる2次収束の解法と Ehrlich-Aberth 法[1),4),10)]（または単に Aberth 法）と呼ばれる3次収束の解法は有名である．ここでは局所的解法に対応づけて高次大域的解法を容易に導く方法を示す．最初に Newton-Raphson 法と Durand-Kerner 法の局所誤差について考察してみる．

$f(x)=0$ の厳密解を α_i，対応する近似解を x_i，$\alpha_i=x_i+\varepsilon_i$ とする．

$$\begin{aligned}f(x)&=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)\\&=(x-x_1-\varepsilon_1)(x-x_2-\varepsilon_2)\cdots(x-x_n-\varepsilon_n)\\&=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)\\&\quad-(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)\varepsilon_1\\&\quad-(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_n)\varepsilon_2\\&\quad\cdots\\&\quad-(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})\varepsilon_n\\&\quad+(x-x_3)(x-x_4)\cdots(x-x_n)\varepsilon_1\varepsilon_2\\&\quad+(x-x_1)(x-x_4)\cdots(x-x_n)\varepsilon_2\varepsilon_3\\&\quad\cdots\\&\quad+(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-2})\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n\\&\quad+\cdots+(-1)^n\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n.\end{aligned}$$

ここで $g(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$

$\varepsilon=\mathrm{MAX}\{|\varepsilon_k|\},\ k=1,2,\cdots,n$

とおくと

$$f(x)=g(x)+O(\varepsilon).$$

$$f'(x_i)=\prod_{j=1,\,j\neq i}^{n}(x_i-x_j)+O(\varepsilon) \quad (3.1)$$

であるから Newton-Raphson 法と Durand-Kerner 法の局所誤差を比較するために式(3.1)を Newton-Raphson 法の補正項の部分に代入する．

$$\begin{aligned}\varepsilon_i&=\alpha_i-x_i\\&=-f(x_i)/f'(x_i)+O(\varepsilon_i^2)\\&=-f(x_i)\Big/\Big\{\prod_{j=1,\,j\neq i}^{n}(x_i-x_j)+O(\varepsilon)\Big\}+O(\varepsilon_i^2)\\&=-f(x_i)\Big/\Big\{\prod_{j=1,\,j\neq i}^{n}(x_i-x_j)\Big\}\\&\quad+(\alpha_i-x_i)O(\varepsilon)+O(\varepsilon_i^2)\\&=-f(x_i)\Big/\Big\{\prod_{j=1,\,j\neq i}^{n}(x_i-x_j)\Big\}+O(\varepsilon^2)\end{aligned}$$

となる．これより $x=x_i$ に対する Newton-Raphson 法の局所誤差を $O(\varepsilon_i^2)$ とすれば Durand-Kerner 法の局所誤差は $O(\varepsilon^2)$ となる．すなわち Durand-Kerner 法

$$x_i'=x_i-f(x_i)\Big/\prod_{j=1,\,j\neq i}^{n}(x_i-x_j) \quad (3.2)$$

の局所誤差は厳密解から最も離れた近似解の誤差で計られると解釈できるからよく知られているように[15),16)] 1つの近似解でも厳密解から遠く離れていると収束はかなり遅くなることになる．このことは高次公式になっても変わらないことを注意しておく．

次に3次の Halley 法から3次の大域的解法を導いてみる．まず局所誤差を調べる．

$$g'(x)=g(x)\sum_{j=1}^{n}(x-x_j)^{-1},$$

であるから

$$\begin{aligned}\sum_{j=1,\,j\neq i}^{n}(x_i-x_j)^{-1}&=\lim_{x\to x_i}\{g'(x)/g(x)-1/(x-x_i)\}\\&=g''(x_i)/\{2g'(x_i)\}\end{aligned}$$

となる．また $f''(x)/\{2f'(x)\}=g''(x)/\{2g'(x)\}+O(\varepsilon)$ であるから

$$A_2(x_i)=f''(x_i)/\{2f'(x_i)\},$$

$$T_1(x_i)=\sum_{j=1,\,j\neq i}^{n}(x_i-x_j)^{-1}$$

とおくと

$$A_2(x_i)=T_1(x_i)+O(\varepsilon) \tag{3.3}$$

となる．この関係式を式(2.2)に代入し $O(\varepsilon^3)$ を無視すれば

$$x_i'=x_i-\frac{u(x_i)}{1-T_1(x_i)u(x_i)} \tag{3.4}$$

となり3次大域的解法となる．

次に 4, 5, 6 次の大域的解法を導く．一般に

$$T_k(x_i)=\sum_{j=1,\,j\neq i}^{n}(x_i-x_j)^{-k},$$

$$A_k(x_i)=f^{(k)}(x_i)/\{k!f'(x_i)\},\quad k=1,2,\cdots$$

とおくと

$$\sum_{j=1}^{n}(x-x_j)^{-2}=\{g'^2(x)-g(x)g''(x)\}/g^2(x)$$

であるから

$$\begin{aligned}T_2(x_i)&=\sum_{j=1,\,j\neq i}^{n}(x_i-x_j)^{-2}\\&=\lim_{x\to x_i}\{[g'^2(x)-g(x)g''(x)]/\\&\quad g^2(x)-1/(x-x_i)^2\}\\&=\{6g''^2(x_i)-8g'(x_i)g'''(x_i)\}/\{24g'^2(x_i)\}\\&=A_2^2(x_i)-2A_3(x_i)+O(\varepsilon)\end{aligned}$$

となるから変数を省略して

$$T_2=A_2^2-2A_3+O(\varepsilon) \tag{3.5}$$

を得る．同様にして繰り返してロピタルの定理を用いると

$$T_3=3A_4-3A_2A_3+A_2^3+O(\varepsilon) \tag{3.6}$$

$$T_4=-2A_3^2-4A_2A_4+4A_5+4A_2^2A_3-A_2^4+O(\varepsilon) \tag{3.7}$$

を得る．このようにして得られた式(3.5)～(3.7)において $O(\varepsilon)$ を無視して，A_3, A_4, A_5 について解いて式(2.3)から(2.5)に代入すると 4, 5, 6 次収束する次の公式が得られる．添数や変数は省略し次の近似値を x' とする．

$$x'=x-(1-A_2u)u/\{1-2A_2u+0.5(A_2^2-T_2)u^2\} \tag{3.8}$$

(Farmer と Loizou の公式[7])

$$\begin{aligned}x'=x-(1-2A_2u+A_3u^2)u/\{&1-3A_2u\\&+(2A_3+A_2^2)u^2-(3A_2^2A_3-A_2^3+T_3)u^3/3\}\end{aligned} \tag{3.9}$$

(Farmer と Loizou の公式[7])

$$\begin{aligned}x'=x-\{&1-3A_2u+(2A_3+A_2^2)u^2-A_4u^3\}u/\\&\{1-4A_2u+(3A_3+3A_2^2)u^2-(2A_2A_3+2A_4)u^3\\&+(A_2^4-4A_2^2A_3+4A_2A_4+2A_3^2-T_4)u^4/4\}\end{aligned} \tag{3.10}$$

このようにして局所的解法に対応づけて高次収束する大域的解法を導くことができるが式(3.10)は初めての反復式と思われる．

高次大域的解法の補正項の分母の部分を見ればわかるように，異なった初期値を与えたとき数値解を分離する機能を持つ T_k は式が複雑になるに従い計算誤差の中に埋もれやすく，かつ役割が低下していることは注意を要する．そのことについては5章で考察する．

ところで例えば式(3.5)は $T_1(x)$ の両辺を2乗し展開することによっても得られる．Farmer ら[7]は式(3.5)，(3.6)をそのようにして求めていると思われる．ここではこれらの極限値を求めるのに muMATH を用いた．

4. 大域的解法の初期値の減少率

前の式(3.8)～(3.10)を用いて高次解法の初期値の減少率を求めてみる．方程式(1.1)について中心 $-a_1/n$，半径 ρ（十分大）の円周上の n 等分点

$$x_k=-a_1/n+\rho e^{(2\pi(k-1)/n+\theta)i},\quad k=1,2,\cdots,n \tag{4.1}$$

を初期値として反復を行う．2次の大域的解法の場合[17]よく知られているように初期値の減少率は

$$x'_k+a_1/n\approx(1-1/n)(x_k+a_1/n)$$

であるから数値解は初めのうちは減少率 $1-1/n$ で $-a_1/n$ に接近する．

3次大域的解法の場合[17]は

$$x'_k+a_1/n\approx\{1-2/(n+1)\}(x_k+a_1/n) \tag{4.2}$$

である．

4次の大域的解法の場合について調べる．

$w(k)=x_k+a_1/n$ とおき，u, A_2, A_3 をそれぞれ次のように近似する．

$$u=f/f'\approx w(k)/n,$$

$$A_2=f''/2f'\approx(n-1)/2w(k),$$

$$A_3\approx(n-1)(n-2)/\{6w^2(k)\}$$

A_2, A_3 を式(3.5)に代入して $O(\varepsilon)$ を無視して，それを(3.8)の4次の解法の式に代入すると

$$\begin{aligned}w'(k)&\approx w(k)-\frac{w(k)}{n}\times\frac{1-A_2u}{1-2A_2u+A_3u^2}\\&=w(k)\{1-3/(n+2)\}\end{aligned}$$

となるから4次の場合も減少率は $1-3/(n+2)$ で見積ることができる．

5次の大域的解法の場合は4次の A_2, A_3 の近似に加え

$$A_4\approx(n-1)(n-2)(n-3)/\{24w^3(k)\}$$

の近似を行い(3.9)の5次の式に代入すると

表 1 大域的解法の初期値の減少率
Table 1 The decreasing rate of initial values for global methods.

解法の次数	2	3	4	5	6
減 少 率	$1-1/n$	$1-2/(n+1)$	$1-3/(n+2)$	$1-4/(n+3)$	$1-5/(n+4)$

$$w'(k)\approx w(k)\{1-4(n^2+3n+2)/(n^3+6n^2+11n+6)\}$$
$$=\{1-4/(n+3)\}\,w(k)$$

となるから 5 次の場合の減少率は $1-4/(n+3)$ で見積ることができる．同様にして

$$A_5\approx(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)/\{120w^4(k)\}$$

と近似して式(3.10)に代入すると 6 次の場合は $1-5/(n+4)$ の減少率となる．

以上の初期値の減少率をまとめて**表 1** に示すがこれらの減少率は同様な近似を行えば局所的解法についても全く同様に成立する．

5. 高次大域的解法の非収束性の考察

大域的解法が非収束となる原因は計算のあふれと数値解の振動，癒着等が考えられる．ここでは計算のあふれと振動について考察をする．

（1） 計算のあふれ

計算のあふれには 2 つの要因がある．1 つは例えば Durand-Kerner 法において，初期値を対応する厳密解に対してごく小さく取ると補正項の分母が小さくな

2 個の出発値を与えると数値解は常に実数となり振動が起こるといった現象である．この例の場合反復式は Newton-Raphson 法と完全に一致している．

他の 1 つは計算式に内在する振動である．4 次の大域的解法を例にとり説明する．$x_k=2^k+2^ki$, $k=1,2,3,\cdots,10$ の数値結果を**表 2** に示す．10 の数値解のうち 5 個が非収束の数値解である．これらの非収束の数値解の精度桁数が計算桁数のほぼ半分となっていることから 2 重解の様相を呈していることがわかる．6 番目の非収束の数値解

$$16.00000008032123+16.00000017164771i$$

の次の数値解は

$$15.99999991968284+15.99999982835300i$$

となり以後交互にその値を取る．解の近傍で初期値に起因する数値解の振動現象とは別の反復解法に起因する振動が起こっている．式(3.8)を $x'=x-Hu$ とおいてみる．数値解が単根に十分接近すれば H の分子，分母は共に 1 に接近するから H の分母において

$$0.5|(A_2{}^2-T_2)u^2|\ll|2A_2u|\ll1$$

が成立する．しかしある厳密解に 2 つ以上の数値解が接近すると T_2 が大きくなり

$$1\approx0.5|(A_2{}^2-T_2)u^2|\gg|2A_2u|$$

となるため $|H|$ が 1 の前後をふらつくため振動が生じる．その場合 H はあたかも多重解に対して例えば

表 3　大域的解法の反復回数に対する数値結果
Table 3　The numerical results of iteration times for global methods.

EX	DEG	J2	G2	J3	G3	J4	G4	J5	G5
1	2	10	10	10	10	8	8	/	/
2	3	24	18	15	15	15	15	15	15
3	3	9	9	9	9	9	9	9	9
4	3	27	24	21	18	21	18	21	21
5	4	40	40	36	28	28	28	28	28
6	4	44	40	36	32	32	32	32	32
7	5	60	55	50	40	45	40	/	/
8	5	65	70	50	45	45	45	40	40
9	6	312	108	234	90	/	84	/	/
10	6	372	78	222	66	/	/	/	/
11	6	102	102	60	60	54	54	54	54
12	7	105	126	77	70	70	63	70	70
13	7	259	203	154	133	/	/	/	/
14	8	280	224	192	160	192	/	144	144
15	8	216	184	136	112	112	104	/	/
16	9	288	234	180	162	234	135	/	/
17	10	1020	830	580	460	/	400	/	/
18	10	650	320	420	190	/	/	/	/
19	10	650	330	410	190	/	/	/	/
20	11	407	330	264	220	209	187	209	209
21	12	804	708	456	384	/	336	360	360
22	13	1053	910	533	468	/	/	468	468
23	14	602	588	252	378	210	/	/	/
24	15	660	600	270	285	/	/	/	/
25	15	480	450	300	255	/	/	/	/
26	16	528	496	320	304	256	/	/	/
27	17	1666	1462	884	697	/	/	697	/
28	18	666	666	396	360	468	/	/	/
29	19	1216	779	950	608	/	/	/	/
30	19	760	722	608	608	/	/	/	/
31	20	940	960	500	440	/	/	/	/
32	20	820	860	500	420	/	/	/	/
33	20	900	940	440	400	/	360	/	/
34	20	2860	2640	1500	1280	/	/	1260	1260
35	20	820	860	500	480	/	/	/	/
36	23	1564	1403	851	736	713	644	759	759
37	25	525	475	350	300	350	400	/	/
38	28	1680	1652	896	784	/	/	/	/
39	30	840	750	510	420	/	/	/	/
40	30	10020	9540	4710	3960	/	/	/	/
41	35	3430	3360	1785	1435	/	/	/	/
42	38	7030	7334	4446	3686	/	/	/	/
43	40	1240	880	720	680	/	/	/	/
44	45	2835	3150	1440	1395	/	/	/	/
45	50	450	1050	300	250	250	250	250	250
46	55	2145	2145	1430	1045	/	/	/	/
47	60	540	2100	300	300	240	240	240	240
48	70	5530	3150	2030	1680	/	1120	/	/
49	80	6000	4640	2320	1920	/	1440	/	/
50	100	7800	7100	3500	2500	/	/	/	/
TOTAL		71344	65705	37153	30568	*	*	*	*

た数値解を直ちに次の数値解に用いる）に分け，2次から100次までの代数方程式で数値実験した結果を**表3**に示す．EXは数値例の番号，DEGは方程式の次数，Jはヤコビ型，Gはガウス-ザイデル型解法を示し／は非収束を表す．次の数字は大域的解法の収束の次数である．

ここで用いた方程式は

（a）　解のよく分離している方程式，

（b）　解が近接している方程式（実部と虚部あるいは一方），

（c）　多重解を持つ方程式，

（d）　係数差の激しい方程式（実部と虚部あるいは一方），

（e）　解の大きさの差が激しい方程式，

（f）　係数の変動に敏感な方程式

である．

2次と3次解法の数値例が全部収束しているのに対して4次と5次解法の非収束の場合が多いのは前にも指摘したように $T_k(x)$ の役割の低下による数値解の分離が悪くなるためである．

6. おわりに

本稿では非常に容易な高次局所的解法の導出法を示し，それに対応づけて高次大域的解法を導いた．それにより局所的解法と大域的解法の関係を明確にした．$f(x)=g(x)+O(\varepsilon)$ が両者の基本的関係である．

次に高次大域的解法の初期値の減少率を求めた．2次，3次の大域的解法は初期値の減少率に根拠をおくある種の大域的収束性を持つと言われているが，同様な根拠を持つ高次大域的解法は経験的には収束はしない場合が多かった．その原因が反復式自体にあることを数値的に明らかにした．

反復回数は初期値の選び方，反復停止則，計算のあふれを防ぐステートメント等によって大幅に異なる．が反復回数を目安として解法の能率を見てみると3次のガウス-ザイデル型が比較的好結果を与えた．一般的にはヤコビ型は解が密な場合に強く，ガウス-ザイデル型は解の大小関係がはなはだしい場合に強い傾向が見られた．

大域的解法の“ある種の大域的収束性”は文献11)では非収束となる出発値の領域の測度がゼロと定義されている．例えばDurand-Kerner法について大域的収束性は公開問題となって10年以上となるがいまだ解決されてないようである．最後にごく最近，櫻井，鳥居，杉浦[18]はPadé近似に基礎をおく高次局所的解法の興味深い導出法を示していることをつけ加えておく．

参考文献

1) Aberth, O.: Iteration Methods for Finding All Zeros of a Polynomial Simultaneously, *Math. Comp.*, Vol. 27, No. 122, pp. 339-344 (1973).

2) Dochev, K. and Byrnev, P.: Certain Modifica-

tions of Newton's Method for the Approximate Solution of Algebraic Equations, *U.S.S.R. Comput. Maths. Math. Phys.*, Vol. 4, No. 2, pp. 174-182 (1964).
3) Durand, E.: *Solutions Numériques des Équations Algébriques*, Tome 1, p. 327, Masson et Cie, Paris (1960).
4) Ehrlich, L. W.: A Modified Newton Method for Polynomials, *Comm. ACM*, Vol. 10, No. 2, pp. 107-108 (1967).
5) Euler, L.: Institutiones Calculi Differentialis, *Leonhardi Euleri Opera Omnia* (Kowalewski, G. ed. 1913), pp. 422-445, Academiae Imperialis Scientiarum Petropolitanae, St. Pétersbourg (1755).
6) Frame, J. S.: A Variation of Newton's Method, *Am. Math. Monthly*, Vol. 51. pp. 36-38 (1944).
7) Farmer, M. R. and Loizou, G.: A Class of Iteration Functions for Improving, Simultaneously, Approximations to the Zeros of a Polynomial, *BIT*, Vol. 15, pp. 250-258 (1975).
8) Kerner, I. O.: Ein Gesamtschrittverfahren zur Berechnung der Nullstellen von Polynomen, *Numer. Math.*, Vol. 8, pp. 290-294 (1966).
9) Kiss, I.: Uber eine Verallgemeinerung des Newtonschen Näherungsverfahrens, *Z. Angew. Math. Mech.*, Vol. 34, No. 1/2, pp. 68-69 (1954).
10) Nourein, Abdel-Wahab M.: An Iteration Formula for the Simultaneous Determination of the Zeros of a Polynominal, *J. Comput. Appl. Math.*, Vol. 1, No. 4, pp. 251-254 (1975).
11) Green, M. W., Korsak, A. J. and Pease, M. C.: Simultaneous Iteration towards All Roots of a Complex Polynomial, *SIAM Rev.*, Vol. 18, No. 8, pp. 501-502 (1976). (注. 解答は R. D. Small)
12) Snyder, R. W.: One More Correction Formula, *Am. Math. Monthly*, Vol. 62, pp. 722-725 (1955).
13) Traub, J. F.: On a Class of Iteration Formulas and Some Historical Notes, *Comm. ACM*, Vol. 4, No. 6, pp. 276-278 (1961).
14) Weierstrass, K.: *Neuer Beweis des Satzes, dass jede ganze rationale Function einer Veränderlichen dargestellt werden kann als ein Product aus linearen Functionen derselben Veränderlichen*, Mathematische Werke 3, Mayer & Müller, Berlin, pp. 251-269 (1903).
15) 伊理正夫：数値計算, p. 173, 朝倉書店, 東京 (1981).
16) 一松　信：数値解析, p. 163, 朝倉書店, 東京 (1982).
17) 山本哲朗, 古金卯太郎, 野倉久美：代数方程式を解く Durand-Kerner 法と Aberth 法, 情報処理, Vol. 18, No. 6, pp. 566-571 (1977).
18) 櫻井鉄也, 鳥居達生, 杉浦　洋：Padé 近似による代数方程式の反復解法, 情報処理学会論文誌, Vol. 31, No. 4, pp. 517-522 (1990).

(平成元年9月27日受付)
(平成2年2月13日採録)

五十嵐正夫（正会員）

1945年生．日本大学理工学部数学科卒業．同大学院修士課程修了，同博士課程中退，現在日本大学農獣医学部助教授．数値計算における誤差に興味，現在もなお代数方程式の数値解法に興味集中．日本数学会，AMS，SIAM 各会員．