

全変動カラー画像復元問題とその近接勾配解法
Total-Variation Color-Image Restoration Problem and Its Proximal Gradient Solver

齊藤 隆弘[†]
Takahiro Saito

高垣 陽介[†]
Yousuke Takagaki

小松 隆[†]
Takashi Komatsu

1. まえがき

筆者らは、先に、三原色信号間の相互依存性をカラー画像の正則化に活用するため、カラー画像の全変動 (Total Variation) セミノルム (以下, TV セミノルム) を、1) 各原色信号の TV セミノルム, 2) 色差の TV セミノルム, 3) 色和の TV セミノルムの線形荷重和と定義し、これを正則化項として用いた変分問題としてカラー画像復元問題を定式化することで、雑音除去、ぼけ復元、画像拡大などの効果的なカラー画像処理が実現できることを明らかにした^[1]。これまで、個別に定義した等方性 TV セミノルムの線形荷重和としてカラー画像の TV セミノルムを定義していたが、本研究では原色・色差・色和を全て同時に考慮した 18 次元のカラー勾配作用素を新たに定義し、これを用いて等方性・半等方性・非等方性の計三種類のカラー TV セミノルムを定義し、さらにこれらのカラー TV セミノルムの双対定義を導入することで、全変動カラー画像復元問題を再定式化している。また、再定式化された全変動カラー画像復元問題を直接に解く代わりに、その双対問題を射影勾配解法 (Projected Gradient Solver) で、あるいはその主問題を近接勾配解法 (Proximal Gradient Solver) で解くことによって、比較的高速に最適解を求めることができる。

2. スカラ画像の勾配と発散

$n \times n$ のサイズの二次元配列として定義されたスカラ画像 u の画素値 $u_{i,j}$ をラスタ走査して縦に一列に書き並べた $N (= n^2)$ 次元ベクトルを $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$ と表記する。また、スカラ画像 u の空間をスカラ画像場 \mathbf{U} という。一方、スカラ画像 u の勾配 ∇u は、一般に $n \times n \times m$ のサイズの三次元配列 \mathbf{w} となる。ここで、 m は勾配 ∇u の次元数で、通常の微分幾何学における勾配の定義では、 $m = 2$ となる。各画素の m 次元勾配 ∇u をラスタ走査して縦に一列に書き並べた $M (= m \times n^2 = m \times N)$ 次元ベクトルを $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^M$ と表記する。また、三次元配列 \mathbf{w} の空間を勾配場 \mathbf{W} と表記する。このとき、スカラ画像 u の勾配作用素 ∇ に対応し、勾配場 \mathbf{W} に属している三次元配列 \mathbf{w} に対する発散作用素 div が、勾配作用素 ∇ の随伴作用素 (Adjoint operator) として次式にて定義される^[2]。

$$(\nabla u, \mathbf{w})_{\mathbf{w}} = (u, -\text{div } \mathbf{w})_{\mathbf{U}} \quad (1)$$

また、勾配作用素 ∇ は、 N 次元ベクトル \mathbf{y} に作用させる $M \times N$ のサイズの行列 \mathbf{A}^T としても定義できる。ここで、次式の関係が成立するので、

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{y}, \mathbf{p})_{\mathbb{R}^M} = \mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{p} = (\mathbf{y}, \mathbf{A} \mathbf{p})_{\mathbb{R}^N} \quad (2)$$

発散作用素 div は、 M 次元ベクトル \mathbf{p} に作用させる $N \times M$ のサイズの行列 $-\mathbf{A}$ としても定義できる。この関係を勾配

作用素 ∇ の定義に適用することで、勾配作用素 ∇ に対応した発散作用素 div の具体的な表現が求められる^{[2],[3]}。

図 1 には、水平・垂直・対角・反対角方向の勾配と発散の定義において採用される一階差分の方向を示した。スカラ画像 u の TV セミノルムの構成要素として用いられる“最も基本的な勾配”である水平勾配作用素 ∇_H と垂直勾配作用素 ∇_V は、水平・垂直方向の一階差分を用い、Neumann 境界条件を考慮することで、次式にて定義される。

$$[\nabla_H u]_{i,j} := \begin{cases} u_{i,j+1} - u_{i,j}, & 1 \leq j \leq n-1 \\ 0, & j = n \end{cases} \quad (3)$$

$$[\nabla_V u]_{i,j} := \begin{cases} u_{i+1,j} - u_{i,j}, & 1 \leq i \leq n-1 \\ 0, & i = n \end{cases} \quad (4)$$

また、式(1)と式(2)の発散作用素の定義を適用することで、水平・垂直方向の勾配作用素の随伴作用素として、水平・垂直方向の発散作用素の定義が次式にて一意に定まる。

$$[\text{div}_H \mathbf{w}]_{i,j} := \begin{cases} w_{i,j}, & j = 1 \\ -w_{i,j-1}, & j = n \\ w_{i,j} - w_{i,j-1}, & 2 \leq j \leq n-1 \end{cases} \quad (5)$$

$$[\text{div}_V \mathbf{w}]_{i,j} := \begin{cases} w_{i,j}, & i = 1 \\ -w_{i-1,j}, & i = n \\ w_{i,j} - w_{i-1,j}, & 2 \leq i \leq n-1 \end{cases} \quad (6)$$

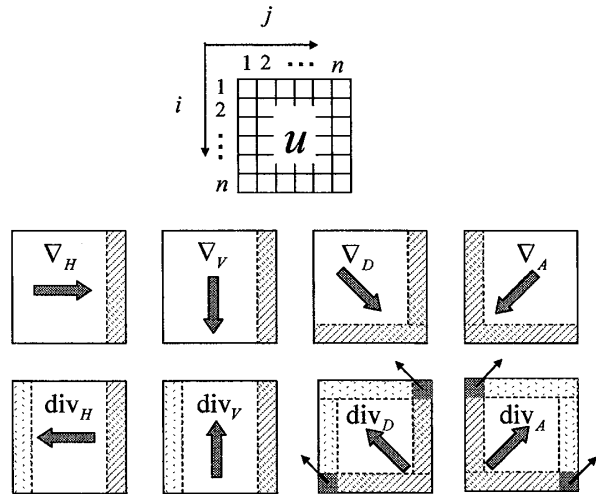


図 1 水平・垂直・対角・反対角方向の勾配と発散の定義において採用される一階差分の方向

さらに、対角・反対角方向の一階差分を用い、Neumann 境界条件を考慮し、次式にて対角勾配 ∇_D と反対角勾配 ∇_A を定義すると、

[†] 神奈川大学, Kanagawa University

$$[\nabla_D u]_{i,j} := \begin{cases} u_{i+1,j+1} - u_{i,j}, & 1 \leq i \leq n-1 \text{ and } 1 \leq j \leq n-1 \\ 0, & i = n \text{ or } j = n \end{cases} \quad (7)$$

$$[\nabla_A u]_{i,j} := \begin{cases} u_{i+1,j-1} - u_{i,j}, & 1 \leq i \leq n-1 \text{ and } 2 \leq j \leq n \\ 0, & i = n \text{ or } j = 1 \end{cases} \quad (8)$$

同様に、その随伴作用素として、対角・反対角方向の発散作用素の定義が次式にて一意に定まる。

$$[\text{div}_D w]_{i,j} := \begin{cases} 0, & (i,j) = (n,1) \text{ or } (1,n) \\ w_{i,j}, & \{(1,j); j=2,3,\dots,n-1\} \text{ or } \{(i,1); i=2,3,\dots,n-1\} \\ -w_{i-1,j-1}, & \{(n,j); j=2,3,\dots,n\} \text{ or } \{(i,n); i=2,3,\dots,n\} \\ w_{i,j} - w_{i-1,j-1}, & \{(i,j); i=2,3,\dots,n-1 \text{ \& } j=2,3,\dots,n-1\} \end{cases} \quad (9)$$

$$[\text{div}_A w]_{i,j} := \begin{cases} 0, & (i,j) = (1,1) \text{ or } (n,n) \\ w_{i,j}, & \{(1,j); j=2,3,\dots,n\} \text{ or } \{(i,n); i=2,3,\dots,n-1\} \\ -w_{i-1,j+1}, & \{(n,j); j=1,2,\dots,n-1\} \text{ or } \{(i,1); i=2,3,\dots,n\} \\ w_{i,j} - w_{i-1,j+1}, & \{(i,j); i=2,3,\dots,n-1 \text{ \& } j=2,3,\dots,n-1\} \end{cases} \quad (10)$$

これらの勾配の定義を適当に組み合わせることで、スカラー画像 u の二方向勾配 $\nabla_2 u$ や四方向勾配 $\nabla_4 u$ が定義できる。以下では、まず、水平・垂直・対角・反対角方向の勾配を全て用いて定義された四次元の四方向勾配 $\nabla_4 u$ について述べる。図2には、四方向勾配 $\nabla_4 u$ の定義を示した。まず、 $n \times n$ のサイズの二次元配列として定義されたスカラー画像 u の l ($l := (i-1)n + j$) 番目の画素位置 (i,j) において、水平・垂直・対角・反対角方向の勾配を全て縦に並べて書き並べた四次元ベクトル ρ_l を、次式にて定義する。

$$\rho_l := ([\nabla_H u]_{i,j}, [\nabla_V u]_{i,j}, [\nabla_D u]_{i,j}, [\nabla_A u]_{i,j})^T = \mathbf{A}_l^T \mathbf{y} \in \mathbf{R}^4 \quad (11)$$

ここで、 $N \times 4$ のサイズの行列 \mathbf{A}_l は、上記の各勾配の定義より直ちに定まる。また、必要に応じ、四方向勾配ベクトル ρ_l を次式にて表記する。

$$\rho_l := (a_l^{(1)}, a_l^{(2)}, a_l^{(3)}, a_l^{(4)})^T \quad (12)$$

ここで、 ρ_l の各要素は、 $l := (i-1)n + j$ 番目の画素位置 (i,j) での四方向の勾配 $\{[\nabla_H u]_{i,j}, [\nabla_V u]_{i,j}, [\nabla_D u]_{i,j}, [\nabla_A u]_{i,j}\}$ を意味する。次に、全ての画素位置において求めた四方向勾配ベクトル ρ_l を縦に並べて書き並べた M ($M := 4n^2 = 4N$) 次元ベクトルを次式にて四方向勾配ベクトル ρ と定義する。

$$\rho := (\rho_1^T, \rho_2^T, \dots, \rho_N^T)^T = \mathbf{A}^T \mathbf{y} \in \mathbf{R}^{4N} = \mathbf{R}^M \quad (13)$$

$$\mathbf{A} := (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_N)$$

ここで、四方向勾配ベクトル ρ は、スカラー画像 u の四方向勾配 $\nabla_4 u$ をサイズ $n \times n \times 4$ の三次元配列として書き並べた四方向勾配配列 w をラスタ走査し、縦に並べて整理させて定義したベクトルに相当する。さらに、 $N \times M$ のサイズの行列 \mathbf{A} を用い、 M ($M := 4n^2 = 4N$) 次元ベクトル ρ に対する四方向発散の演算が、 $-\mathbf{A}\rho$ と定義されるが、これは実際には $n \times n \times 4$ のサイズの四方向勾配配列と同型の配列 w に対する演算として構成される。このため、 $n \times n \times 4$ のサイズの四方向勾配配列と同型の配列 w を次式にて表現する。

$$w := \{w_{i,j,k} \mid i=1,\dots,n; j=1,\dots,n; k=1,\dots,4\} \\ := \{a_{i,j}^{(k)} \mid i=1,\dots,n; j=1,\dots,n; k=1,\dots,4\} \quad (14)$$

ここで、 $a^{(k)}$ は、各画素位置において計算した四方向勾配

ベクトル ρ_l の k 番目の要素を、画面全体で二次元配列として書き並べたものに相当する。このとき、四方向発散 $\text{div}_4 w$ の具体的な演算が次式で与えられる。

$$[\text{div}_4 w]_{i,j} := [\text{div}_H a^{(1)}]_{i,j} + [\text{div}_V a^{(2)}]_{i,j} + [\text{div}_D a^{(3)}]_{i,j} + [\text{div}_A a^{(4)}]_{i,j} \quad (15)$$

スカラー画像 u の TV セミノルムの定義では、水平方向の勾配と垂直方向の勾配のみを用いて定義された二次元の二方向勾配 $\nabla_2 u$ を採用するのが最も一般的である^{[2], [3]}。二方向勾配作用素 ∇_2 と、その随伴作用素である二方向発散作用素 div_2 は、四方向勾配作用素 ∇_4 と四方向発散作用素 div_4 の特別な場合としても定義できる。すなわち、二方向勾配作用素 ∇_2 と二方向発散作用素 div_2 は、四方向勾配作用素 ∇_4 と四方向発散作用素 div_4 の定義において、それぞれ対角方向の勾配と反対角方向の勾配に対応した要素を取り除くことで定義できる。これらの定義は自明であるので、その詳細は割愛する^[2]。

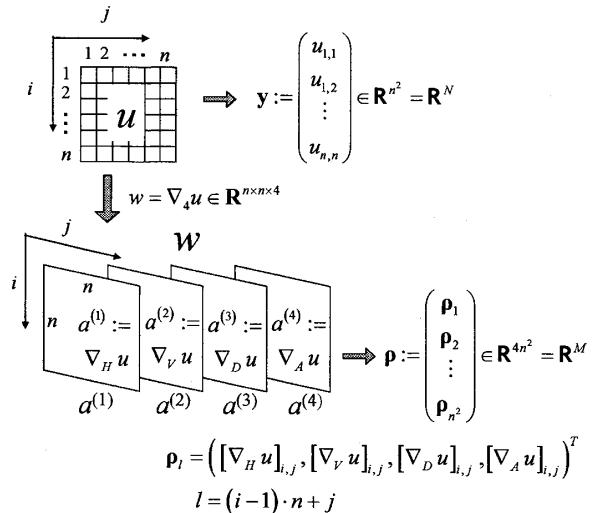


図2 水平・垂直・対角・反対角方向の勾配を全て用いて定義された四方向勾配 ∇_4

3. カラー画像の勾配と発散

$n \times n \times 3$ のサイズの三次元配列として定義されたカラー画像 u の三原色値 $u_{i,j,k}$ をラスタ走査して縦に並べて書き並べた $3N$ ($N := 3n^2$) 次元ベクトルを $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^{3N}$ と表記する。三次元配列 u の空間をカラー画像場 \mathbf{U} という。また、 $u_{i,j,1}$ を Red 成分 $r_{i,j}$ に、 $u_{i,j,2}$ を Green 成分 $g_{i,j}$ に、 $u_{i,j,3}$ を Blue 成分 $b_{i,j}$ に対応付ける。また、カラー画像 u のカラー勾配 $\nabla_C u$ は、一般に $n \times n \times m$ のサイズの三次元配列 w となる。ここで、 m はカラー勾配 $\nabla_C u$ の次元数だが、各原色成分の水平・垂直勾配や、2原色間の色差と色和の水平・垂直勾配を全て考慮した場合には、次元数 m は $m = 6 + 6 + 6 = 18$ となる。各画素位置におけるカラー勾配 $\nabla_C u$ をラスタ走査して縦に並べて書き並べた M ($M := m \times n^2 = m \times N$) 次元ベクトルを $\rho \in \mathbf{R}^M$ と表記する。また、三次元配列 w の空間をカラー勾配場 \mathbf{W} という。このとき、カラー画像 u のカラー勾配作用素 ∇_C に対応し、カラー勾配場 \mathbf{W} に属して

いる三次元配列 w に対するカラー発散作用素 div_C が、カラー勾配作用素 ∇_C の随伴作用素として定義される。

カラーTV セミノルムの定義で使用する各種の勾配と発散の定義を以下に示す。

1) 各原色信号の水平・垂直勾配とその発散

カラー画像 u の三原色信号 $\{r, g, b\}$ の水平勾配作用素 ∇_H は、スカラー画像に対する水平勾配作用素の定義を各原色信号に適用することで、次式にて定義される。

$$[\nabla_H u]_{i,j} = \left([\nabla_H r]_{i,j}, [\nabla_H g]_{i,j}, [\nabla_H b]_{i,j} \right)^T \quad (16)$$

この水平勾配作用素 ∇_H の随伴作用素である水平発散作用素 div_H は、三原色の水平勾配場 $\{\nabla_H r, \nabla_H g, \nabla_H b\}$ に対応した三つの勾配場 $\{\alpha_{i,j}, \beta_{i,j}, \gamma_{i,j}\}$ の各々に独立に、スカラー画像に対する水平発散作用素を適用することで、次式にて定義される。

$$\left([\text{div}_H \alpha]_{i,j}, [\text{div}_H \beta]_{i,j}, [\text{div}_H \gamma]_{i,j} \right)^T \quad (17)$$

なお、上式のベクトルの三つの要素は、画素位置 (i, j) における三原色 $\{r, g, b\}$ の値に対応した量である。各原色信号の垂直勾配作用素 ∇_V と垂直発散作用素 div_V についても、スカラー画像に対する定義をそのまま適用することで定義される。

2) 色差の水平・垂直勾配とその発散

カラー画像 u の三種類の色差 $\{r-g, g-b, b-r\}$ の勾配と発散は、以下のようにして定義される。ここでは、一例として、色差 $r-g$ の水平勾配と水平発散を取り上げる。まず、色差 $r-g$ の水平勾配作用素 ∇_H は、次式にて定義される。

$$[\nabla_H (r-g)]_{i,j} = [\nabla_H r]_{i,j} - [\nabla_H g]_{i,j} \quad (18)$$

また、この水平勾配作用素の随伴作用素として、“色差 $r-g$ の水平発散作用素 $\text{div}_{H,r-g}$ ” が、 $n \times n$ のサイズの水平勾配場 $w_{i,j}$ に対する次式の演算として定義される。

$$[\text{div}_{H,r-g} w]_{i,j} = \left([\text{div}_H w]_{i,j}, -[\text{div}_H w]_{i,j}, 0 \right)^T \quad (19)$$

ここで、上式の右辺のベクトルの三つの要素は、画素位置 (i, j) における三原色 $\{r, g, b\}$ の値に対応した量である。他の色差についても上と同様にして、水平勾配と水平発散が定義される。また、色差の垂直勾配作用素とその垂直発散作用素も、上と同様にして定義される。

3) 色和の水平・垂直勾配とその発散

カラー画像 u の三種類の色和 $\{r+g, g+b, b+r\}$ の勾配と発散は、以下のようにして定義される。ここでは、一例として、色和 $r+g$ の水平勾配と水平発散を取り上げる。まず、色和 $r+g$ の水平勾配作用素 ∇_H は、次式にて定義される。

$$[\nabla_H (r+g)]_{i,j} = [\nabla_H r]_{i,j} + [\nabla_H g]_{i,j} \quad (20)$$

また、この水平勾配作用素の随伴作用素として、“色和 $r+g$ の水平発散作用素 $\text{div}_{H,r+g}$ ” が、 $n \times n$ のサイズの水平勾配場 $w_{i,j}$ に対する次式の演算として定義される。

$$[\text{div}_{H,r+g} w]_{i,j} = \left([\text{div}_H w]_{i,j}, [\text{div}_H w]_{i,j}, 0 \right)^T \quad (21)$$

ここで、上式の右辺のベクトルの三つの要素は、画素位置 (i, j) における三原色 $\{r, g, b\}$ の値に対応した量である。他の色和についても上と同様にして、水平勾配と水平発散が定義される。また、色和の垂直勾配作用素とその垂直発散

作用素も、上と同様にして定義される。

次に、18次元のカラー勾配 ∇_C を定義する。図3には、18次元のカラー勾配 ∇_C の定義を示した。まず、 $n \times n \times 3$ のサイズの三次元配列として定義された三原色カラー画像 u の $l (= (i-1)n+j)$ 番目の画素位置 (i, j) において、三原色・色差・色和の水平勾配と垂直勾配を重み付けて縦に一列に書き並べ、18次元カラー勾配ベクトル ρ_l を次式にて定義する。

$$\begin{aligned} \rho_l := & \left([\nabla_H r]_{i,j}, [\nabla_V r]_{i,j}, [\nabla_H g]_{i,j}, [\nabla_V g]_{i,j}, \right. \\ & [\nabla_H b]_{i,j}, [\nabla_V b]_{i,j}, \alpha [\nabla_H (r-g)]_{i,j}, \alpha [\nabla_V (r-g)]_{i,j}, \\ & \alpha [\nabla_H (g-b)]_{i,j}, \alpha [\nabla_V (g-b)]_{i,j}, \alpha [\nabla_H (b-r)]_{i,j}, \\ & \alpha [\nabla_V (b-r)]_{i,j}, \beta [\nabla_H (r+g)]_{i,j}, \beta [\nabla_V (r+g)]_{i,j}, \quad (22) \\ & \beta [\nabla_H (g+b)]_{i,j}, \beta [\nabla_V (g+b)]_{i,j}, \\ & \left. \beta [\nabla_H (b+r)]_{i,j}, \beta [\nabla_V (b+r)]_{i,j} \right)^T \\ = & \mathbf{A}_l^T \mathbf{y} \in \mathbf{R}^{18}, \quad \alpha \geq 0, \beta \geq 0 \end{aligned}$$

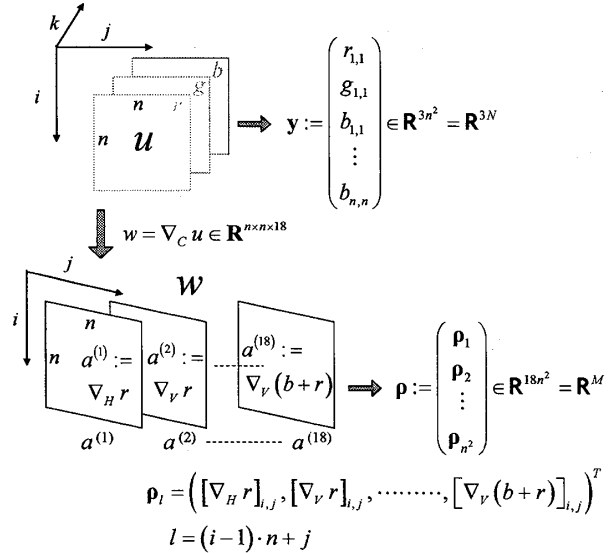


図3 18次元のカラー勾配 ∇_C

ここで、二つのパラメータ $\{\alpha, \beta\}$ は非負の重み係数であり、通常は $\alpha \geq \beta$ と設定する。また、行列 \mathbf{A}_l は $3N \times 18$ のサイズの行列であり、上記 1) ~ 3) の各勾配の定義より直ちに定まる。なお、必要に応じ、カラー勾配ベクトル ρ_l を次式にて表記する。

$$\rho_l := (a_l^{(1)}, a_l^{(2)}, \dots, a_l^{(18)})^T \quad (23)$$

ここで、 ρ_l の各要素は、 $l (= (i-1)n+j)$ 番目の画素位置 (i, j) における三原色・色差・色和の水平・垂直勾配である。次に、全ての画素位置において求めた 18次元勾配ベクトル ρ_l を縦に一列に書き並べた $M (= 18n^2 = 18N)$ 次元のカラー勾配ベクトル ρ を次式にて定義する。

$$\begin{aligned} \rho := & (\rho_1^T, \rho_2^T, \dots, \rho_N^T)^T = \mathbf{A}^T \mathbf{y} \in \mathbf{R}^{18N} = \mathbf{R}^M \quad (24) \\ \mathbf{A} := & (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_N) \end{aligned}$$

ここで、カラー勾配ベクトル \mathbf{p} は、カラー画像 u のカラー勾配 $\nabla_C u$ をサイズ $n \times n \times 18$ の三次元配列として書き並べたカラー勾配配列 w をラスタ走査し、縦に一行に整列させて定義したベクトルである。さらに、 $3N \times M$ のサイズの行列 \mathbf{A} を用い、 $M (= 18n^2 = 18N)$ 次元ベクトル \mathbf{p} に対するカラー発散の演算が、 $-\mathbf{A}\mathbf{p}$ と定義されるが、これは実際には $n \times n \times 18$ のサイズのカラー勾配配列と同型の配列 w に対する演算として構成される。このため、 $n \times n \times 18$ のサイズのカラー勾配配列と同型の配列 w を次式にて表現する。

$$w := \{w_{i,j,k} \mid i=1, \dots, n; j=1, \dots, n; k=1, \dots, 18\} \\ := \{a_{i,j}^{(k)} \mid i=1, \dots, n; j=1, \dots, n; k=1, \dots, 18\} \quad (25)$$

ここで、 $a_{i,j}^{(k)}$ は、各画素位置において計算した 18 次元カラー勾配ベクトル \mathbf{p}_i の k 番目の要素を、画面全体で二次元配列として書き並べたものに相当する。このとき、カラー発散 $\text{div}_C w$ の具体的な演算は、次式の形式の演算として定義される。

$$[\text{div}_C w]_{i,j} = \left([\text{div}_C w]_{i,j,1}, [\text{div}_C w]_{i,j,2}, [\text{div}_C w]_{i,j,3} \right)^T \quad (26)$$

ここで、式(26)の右辺のベクトルの三つの要素は、画素位置 (i, j) における三原色信号 $\{r, g, b\}$ の各原色成分に対応した要素である。これらの三つの要素を計算するための具体的な演算公式は、配列 w の式(25)の表記法の下で、以下に示した式(27)、式(28)、式(29)の三つの演算公式として与えられる。

1) 赤色信号 r を生成するカラー発散作用素 div_C の演算

$$[\text{div}_C w]_{i,j,1} \\ := [\text{div}_H a^{(1)}]_{i,j} + [\text{div}_V a^{(2)}]_{i,j} + \alpha [\text{div}_H a^{(7)}]_{i,j} \\ + \alpha [\text{div}_V a^{(8)}]_{i,j} - \alpha [\text{div}_H a^{(11)}]_{i,j} - \alpha [\text{div}_V a^{(12)}]_{i,j} \\ + \beta [\text{div}_H a^{(13)}]_{i,j} + \beta [\text{div}_V a^{(14)}]_{i,j} + \beta [\text{div}_H a^{(17)}]_{i,j} \\ + \beta [\text{div}_V a^{(18)}]_{i,j} \\ : (i, j, 1) \text{ is the pixel location } (i, j) \text{ of the red signal } r. \quad (27)$$

2) 緑色信号 g を生成するカラー発散作用素 div_C の演算

$$[\text{div}_C w]_{i,j,2} \\ := [\text{div}_H a^{(3)}]_{i,j} + [\text{div}_V a^{(4)}]_{i,j} - \alpha [\text{div}_H a^{(7)}]_{i,j} \\ - \alpha [\text{div}_V a^{(8)}]_{i,j} + \alpha [\text{div}_H a^{(9)}]_{i,j} + \alpha [\text{div}_V a^{(10)}]_{i,j} \\ + \beta [\text{div}_H a^{(13)}]_{i,j} + \beta [\text{div}_V a^{(14)}]_{i,j} + \beta [\text{div}_H a^{(15)}]_{i,j} \\ + \beta [\text{div}_V a^{(16)}]_{i,j} \\ : (i, j, 2) \text{ is the pixel location } (i, j) \text{ of the green signal } g. \quad (28)$$

3) 青色信号 b を生成するカラー発散作用素 div_C の演算

$$[\text{div}_C w]_{i,j,3} \\ := [\text{div}_H a^{(5)}]_{i,j} + [\text{div}_V a^{(6)}]_{i,j} - \alpha [\text{div}_H a^{(9)}]_{i,j} \\ - \alpha [\text{div}_V a^{(10)}]_{i,j} + \alpha [\text{div}_H a^{(11)}]_{i,j} + \alpha [\text{div}_V a^{(12)}]_{i,j} \\ + \beta [\text{div}_H a^{(15)}]_{i,j} + \beta [\text{div}_V a^{(16)}]_{i,j} + \beta [\text{div}_H a^{(17)}]_{i,j} \\ + \beta [\text{div}_V a^{(18)}]_{i,j} \\ : (i, j, 3) \text{ is the pixel location } (i, j) \text{ of the blue signal } b. \quad (29)$$

4. カラーTVセミノルムとその双対定義

三原色カラー画像 u のカラーTVセミノルム (Color total-variation semi-norm) を、3.で定義した M 次元カラー勾配ベクトル \mathbf{p} を用いて定義する。

以下では、三種類のカラーTVセミノルムを定義する。すなわち、スカラ画像の最も一般的なTVセミノルムである等方性TVセミノルム (Isotropic total-variation semi-norm) [2] の定義を拡張した等方性カラーTVセミノルムと半等方性カラーTVセミノルム (Semi-isotropic color total-variation semi-norm) や、スカラ画像の非等方性TVセミノルム (Anisotropic total-variation semi-norm) [4] の定義を拡張した非等方性カラーTVセミノルムについて、その主定義と双対定義を示す。また、三原色カラー画像のカラーTVセミノルムとして、これまで提案されてきたセミノルムの定義 [1], [5], [6] が、以下に述べるカラーTVセミノルムの特別な場合に相当することを示す。

なお、ここで述べるカラーTVセミノルムの三種類の定義の他にも、多様なカラーTVセミノルムを定義することが可能であるが、ここでは割愛する。

4.1 等方性カラーTVセミノルムとその双対定義

等方性カラーTVセミノルム $J_{IC}(u)$ は、各画素位置で定義された式(22)のカラー勾配ベクトル \mathbf{p}_i の l^2 ノルムを、カラー画像内で全て加算することで、次式にて定義される。

$$J_{IC}(u) := \sum_{i=1}^N \|\mathbf{p}_i\|_2 = \sum_{i=1}^N \|\mathbf{A}_i^T \mathbf{y}\|_2 \quad (30)$$

なお、等方性カラーTVセミノルム $J_{IC}(u)$ では、上式の定義より明らかに、色差の勾配と色和の勾配とを同時に考慮することは冗長であるので、色差の勾配のみを考慮すれば十分である。そこで、カラー勾配ベクトル \mathbf{p}_i の式(22)の定義において、重み係数 β の値を 0 に設定するのが自然である。また、カラー勾配ベクトル \mathbf{p}_i の式(22)の定義において、二つの重み係数 $\{\alpha, \beta\}$ を、 $\alpha = \beta = 0$ と設定すると、P. Blomgren と T. F. Chan が提案したカラーTVセミノルムの定義と正確に一致する [5], [6]。

さて、一般に、任意のベクトル \mathbf{a} について、その l^2 ノルムの双対性が次式で与えられることが知られている。

$$\|\mathbf{a}\|_2 = \max_{\|\mathbf{b}\|_2 \leq 1} (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad (31)$$

この関係を用い、18次元の双対変数ベクトル $\mathbf{x}_i \in \mathbf{R}^{18}$ を導入すると、等方性カラーTVセミノルム $J_{IC}(u)$ の次式での双対定義が得られる。

$$J_{IC}(u) = \max_{\|\mathbf{x}_i\|_2 \leq 1} \sum_{i=1}^N (\mathbf{A}_i^T \mathbf{y})^T \mathbf{x}_i = \max_{\|\mathbf{x}_i\|_2 \leq 1} \mathbf{y}^T \sum_{i=1}^N \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i \quad (32)$$

ここで、式(24)で示したように N 個の $3N \times 18$ のサイズの行列 \mathbf{A}_i ($i = 1, 2, \dots, N$) を横に連結して $3N \times M$ のサイズの行列 \mathbf{A} を定義し、各画素位置における双対変数ベクトル \mathbf{x}_i ($i = 1, 2, \dots, N$) を縦に一行に連結した M 次元の双対変数ベクトル $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^M$ を定義し、さらに式(32)中の \mathbf{x}_i に関する制約条件を全て満足する双対変数ベクトル \mathbf{x} の空間 \mathbf{X}_2 を次式で定義すると、

$$\mathbf{X}_2 := \{ \mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}_i\|_2 \leq 1, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^{18N} = \mathbf{R}^M \text{ for } i=1, 2, \dots, N \} \quad (33)$$

等方性カラーTVセミノルム $J_{IC}(u)$ の次式での双対定義が

$$J_{IC}(u) := \max_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}_2} \mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \max_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}_2} \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{y} \quad (34)$$

得られる。また、空間 \mathbf{X}_2 は、各画素位置で定義された 18 次元線形空間 \mathbf{R}^{18} の原点を中心とした N 個の 18 次元単位 l^2 超球の画面全体での直積空間に相当した空間であり、閉凸空間であるので、ベクトル $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^M$ の閉凸空間 \mathbf{X}_2 の上への凸射影は次式で与えられる。

$$[\mathbf{P}_{\mathbf{X}_2}(\mathbf{x})]_l = \frac{\mathbf{x}_l}{\max(\|\mathbf{x}_l\|_2, 1)} \quad \text{for } l=1, 2, \dots, N \quad (35)$$

4.2 半等方性カラーTV セミノルムとその双対定義

半等方性カラーTV セミノルム $J_{SC}(u)$ は、以下のようにして定義される。まず、各画素位置で定義された式(22)のカラー勾配ベクトル \mathbf{p}_l を、その 18 個の要素を次式に示すように先頭から二つずつの要素を組とした 9 個の二次元カラー勾配ベクトル $\mathbf{p}_{l[k]}$ ($k=1, 2, \dots, 9$) に分割して表現する。

$$\mathbf{p}_l := (\mathbf{p}_{l[1]}^T, \mathbf{p}_{l[2]}^T, \dots, \mathbf{p}_{l[9]}^T)^T \in \mathbf{R}^{18} \quad (36)$$

$$\mathbf{p}_{l[1]} := ([\nabla_H r]_{i,j}, [\nabla_V r]_{i,j})^T$$

$$\mathbf{p}_{l[2]} := ([\nabla_H g]_{i,j}, [\nabla_V g]_{i,j})^T$$

$$\mathbf{p}_{l[3]} := ([\nabla_H b]_{i,j}, [\nabla_V b]_{i,j})^T$$

$$\mathbf{p}_{l[4]} := \alpha ([\nabla_H (r-g)]_{i,j}, [\nabla_V (r-g)]_{i,j})^T$$

$$\mathbf{p}_{l[5]} := \alpha ([\nabla_H (g-b)]_{i,j}, [\nabla_V (g-b)]_{i,j})^T$$

$$\mathbf{p}_{l[6]} := \alpha ([\nabla_H (b-r)]_{i,j}, [\nabla_V (b-r)]_{i,j})^T$$

$$\mathbf{p}_{l[7]} := \beta ([\nabla_H (r+g)]_{i,j}, [\nabla_V (r+g)]_{i,j})^T$$

$$\mathbf{p}_{l[8]} := \beta ([\nabla_H (g+b)]_{i,j}, [\nabla_V (g+b)]_{i,j})^T$$

$$\mathbf{p}_{l[9]} := \beta ([\nabla_H (b+r)]_{i,j}, [\nabla_V (b+r)]_{i,j})^T$$

また、18 次元カラー勾配ベクトル \mathbf{p}_l の式(22)の定義に現れる $3N \times 18$ のサイズの行列 \mathbf{A}_l を、その 18 個の列ベクトルを次式に示すように先頭から二つずつの列ベクトルを組として定義された 9 個の $3N \times 2$ のサイズの行列 $\mathbf{A}_{l[k]}$ ($k=1, 2, \dots, 9$) に分割して表現する。

$$\mathbf{A}_l := (\mathbf{A}_{l[1]}, \mathbf{A}_{l[2]}, \dots, \mathbf{A}_{l[9]}) \quad (37)$$

以上の定義の下で、半等方性カラーTV セミノルム $J_{SC}(u)$ を、各画素位置で定義された式(36)の 9 個の二次元カラー勾配ベクトル $\mathbf{p}_{l[k]}$ ($k=1, 2, \dots, 9$) の l^2 ノルムを、カラー画像内で全て加算することで、次式にて定義される。

$$J_{SC}(u) := \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^9 \|\mathbf{p}_{l[k]}\|_2 = \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^9 \|\mathbf{A}_{l[k]}^T \mathbf{y}\|_2 \quad (38)$$

この半等方性カラーTV セミノルム $J_{SC}(u)$ は、筆者らが先に考案したカラーTV セミノルム^[1]と正確に一致する。すなわち、スカラー画像 f の二方向勾配 $\nabla_2 f$ を用いて次式にて二方向の等方性 TV セミノルム $J_{I2}(f)$ が定義されるが、

$$J_{I2}(f) := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{(\nabla_H f_{i,j})^2 + (\nabla_V f_{i,j})^2} \quad (39)$$

式(38)で定義された半等方性カラーTV セミノルム $J_{SC}(u)$ は、二方向等方性 TV セミノルム $J_{I2}(\bullet)$ を用いて次式のようにも定義できる^[1]。

$$\begin{aligned} J_{SC}(u) &:= J_{I2}(r) + J_{I2}(g) + J_{I2}(b) \\ &+ \alpha \cdot J_{I2}(r-g) + \alpha \cdot J_{I2}(g-b) + \alpha \cdot J_{I2}(b-r) \quad (40) \\ &+ \beta \cdot J_{I2}(r+g) + \beta \cdot J_{I2}(g+b) + \beta \cdot J_{I2}(b+r) \end{aligned}$$

式(31)の l^2 ノルムの双対性を用い、また 9 個の二次元双対変数ベクトル $\mathbf{x}_{l[k]}$ ($k=1, 2, \dots, 9$) を縦に一列に連結して次式にて定義された 18 次元の双対変数ベクトル $\mathbf{x}_l \in \mathbf{R}^{18}$ を

$$\mathbf{x}_l := (\mathbf{x}_{l[1]}^T, \mathbf{x}_{l[2]}^T, \dots, \mathbf{x}_{l[9]}^T)^T \in \mathbf{R}^{18} \quad (41)$$

導入すると、半等方性カラーTV セミノルム $J_{SC}(u)$ の次式での双対定義が得られる。

$$\begin{aligned} J_{SC}(u) &= \max_{\|\mathbf{x}_{l[k]}\|_2 \leq 1} \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^9 (\mathbf{A}_{l[k]}^T \mathbf{y})^T \mathbf{x}_{l[k]} \\ &= \max_{\|\mathbf{x}_{l[k]}\|_2 \leq 1} \mathbf{y}^T \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^9 \mathbf{A}_{l[k]} \mathbf{x}_{l[k]} \end{aligned} \quad (42)$$

ここで、式(24)で示したように、 N 個の $3N \times 18$ のサイズの式(37)で定義された行列 \mathbf{A}_l ($l=1, 2, \dots, N$) を横に連結して $3N \times M$ のサイズの行列 \mathbf{A} を定義し、また各画素位置における式(41)で定義された双対変数ベクトル \mathbf{x}_l ($l=1, 2, \dots, N$) を縦に一列に連結した M 次元の双対変数ベクトル $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^M$ を定義し、さらに式(42)中の $\mathbf{x}_{l[k]}$ に関する制約条件を全て満足する双対変数ベクトル \mathbf{x} の空間 \mathbf{X}_{S2} を次式で定義すると、

$$\mathbf{X}_{S2} := \left\{ \mathbf{x} \mid \begin{array}{l} \|\mathbf{x}_{l[k]}\|_2 \leq 1, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^{18N} = \mathbf{R}^M \\ \text{for } l=1, 2, \dots, N; k=1, 2, \dots, 9 \end{array} \right\} \quad (43)$$

半等方性カラーTV セミノルム $J_{SC}(u)$ の次式での双対定義が

$$J_{SC}(u) := \max_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}_{S2}} \mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \max_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}_{S2}} \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{y} \quad (44)$$

得られる。また、空間 \mathbf{X}_{S2} は、各画素位置で定義された 2 次元線形空間 \mathbf{R}^2 の原点を中心とした $9N$ 個の二次元単位 l^2 超球 (単位円) の直積空間に相当した空間であり、閉凸空間であるので、ベクトル $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^M$ の閉凸空間 \mathbf{X}_{S2} の上への凸射影は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} [\mathbf{P}_{\mathbf{X}_{S2}}(\mathbf{x})]_{l[k]} &= \frac{\mathbf{x}_{l[k]}}{\max(\|\mathbf{x}_{l[k]}\|_2, 1)} \\ &\text{for } l=1, 2, \dots, N; k=1, 2, \dots, 9 \end{aligned} \quad (45)$$

4.3 非等方性カラーTV セミノルムとその双対定義

非等方性カラーTV セミノルム $J_{AC}(u)$ は、各画素位置で定義された式(22)のカラー勾配ベクトル \mathbf{p}_l の l^1 ノルムを、カラー画像内で全て加算することで、次式にて定義される。

$$J_{AC}(u) := \sum_{l=1}^N \|\mathbf{p}_l\|_1 = \sum_{l=1}^N \|\mathbf{A}_l^T \mathbf{y}\|_1 \quad (46)$$

さらに、 l^1 ノルムの定義および式(24)のカラー勾配ベクトル \mathbf{p} の定義より明らかに、次式が成立する。

$$J_{AC}(u) := \sum_{l=1}^N \|\mathbf{p}_l\|_1 = \|\mathbf{p}\|_1 := \|\mathbf{A}^T \mathbf{y}\|_1 \quad (47)$$

ここで、一般に、任意のベクトル \mathbf{a} について、その l^1 ノルムの双対性が次式で与えられる。

$$\|\mathbf{a}\|_1 = \max_{\|\mathbf{b}\|_\infty \leq 1} (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad (48)$$

この関係を用い、また M 次元の双対変数ベクトル $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^M$ を導入し、さらに双対変数ベクトル \mathbf{x} に関する制約条件に対応した空間 \mathbf{X}_∞ を次式で定義すると、

$$\mathbf{X}_\infty := \{ \mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\|_\infty \leq 1, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^{18N} = \mathbf{R}^M \} \quad (49)$$

非等方性カラーTVセミノルム $J_{AC}(u)$ の次式の双対定義が

$$J_{AC}(u) = \max_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}_\infty} \mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \max_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}_\infty} \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{y} \quad (50)$$

得られる。また、空間 \mathbf{X}_∞ は M 次元線形空間 \mathbf{R}^M の原点を中心とした M 次元単位 ℓ^∞ 超球であり、閉凸空間であるので、ベクトル $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^M$ の閉凸空間 \mathbf{X}_∞ 上への凸射影は、 \mathbf{x} の各要素 x_i ($i=1, 2, \dots, N$) に、次式のように

$$[P_{\mathbf{X}_\infty}(\mathbf{x})]_i = \text{Clip}(x_i) := \begin{cases} \text{sgn}(x_i), & |x_i| \geq 1 \\ x_i, & |x_i| < 1 \end{cases}, \quad i=1, 2, \dots, M \quad (51)$$

Clipping 演算を適用することで容易に計算される。

4.4 カラーTVセミノルムの統一的な表記法

上記の 4.1, 4.2, 4.3 で述べたように、等方性カラーTVセミノルム $J_{IC}(u)$ の式(34)の双対定義と、半等方性カラーTVセミノルム $J_{SC}(u)$ の式(44)の双対定義と、非等方性カラーTVセミノルム $J_{AC}(u)$ の式(50)の双対定義は互いに同型であり、三つの双対定義における唯一の相違は、双対変数ベクトル \mathbf{x} に関する制約条件に対応した閉凸空間の定義の相違、すなわち式(33)の閉凸空間 \mathbf{X}_2 の定義と、式(43)の閉凸空間 \mathbf{X}_{S2} の定義と、式(49)の閉凸空間 \mathbf{X}_∞ の定義との相違にある。以下では、これらの三つの双対定義を区別せずに統一的に表記するため、これらの三つの閉凸空間を単に \mathbf{X} と表記している。また、この閉凸空間 \mathbf{X} 上への凸射影を単に $P_{\mathbf{X}}(\cdot)$ と表記している。さらに、等方性カラーTVセミノルム $J_{IC}(u)$ と、半等方性カラーTVセミノルム $J_{SC}(u)$ と、非等方性カラーTVセミノルム $J_{AC}(u)$ を区別せずに統一的に $J_C(u)$ と表記している。

5. 全変動カラー画像復元問題とその解法

4. で述べた三種類のカラーTVセミノルムのいずれかを用いた全変動カラー画像復元問題を取り上げ、その近接勾配解法あるいは射影勾配解法について述べる。

全変動カラー画像復元問題は、次式の最適化問題として定式化される。

$$\min_{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^{3N}} E(\mathbf{y}) := J_C(u) + \frac{\lambda}{2} \|\mathbf{B}\mathbf{y} - \mathbf{z}\|_2^2, \quad \lambda > 0 \quad (52)$$

$\mathbf{z} \in \mathbf{R}^{3N}$: Input image vector, $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^{3N}$: Output image vector
 $u \in \mathbf{U}$: Output image array, \mathbf{B} : $3N \times 3N$ blurring matrix

なお、 $3N \times 3N$ のサイズのぼけ作用素行列 \mathbf{B} が単位行列 \mathbf{I}_{3N} であるときは、全変動カラー画像復元問題は、カラー画像雑音除去問題^[7]となる。ぼけ作用素行列 \mathbf{B} が単位行列 \mathbf{I}_{3N} 以外の行列の場合には、一般的な“ぼけ復元問題”となる。式(52)の全変動カラー画像復元問題に、カラーTVセミノルムの双対定義を導入すると、次式の主-双対問題^[3]が定式化される。

$$\min_{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^{3N}} \max_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} \Phi(\mathbf{y}, \mathbf{x}) := \mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \frac{\lambda}{2} \|\mathbf{B}\mathbf{y} - \mathbf{z}\|_2^2, \quad \lambda > 0 \quad (53)$$

なお、 \mathbf{x} は、カラーTVセミノルムの双対定義のために導入された M ($= 18N$) 次元の双対変数ベクトルである。

5.1 全変動カラー画像雑音除去問題の射影勾配解法

式(52)、式(53)の全変動カラー画像復元問題において、 $3N \times 3N$ のサイズのぼけ作用素行列 \mathbf{B} を単位行列 \mathbf{I}_{3N} と設定

した場合、すなわちカラー画像雑音除去問題について、その射影勾配解法^[8]を導出する。この場合には、目的関数 $E(\mathbf{y})$ は狭義の凸関数で、連続かつ強圧的な関数であるので、式(52)、式(53)の全変動カラー画像雑音除去問題には必ず唯一の大域的最適解が存在する。

式(53)の主-双対問題において、その最適解 $(\mathbf{y}^*, \mathbf{x}^*)$ は関数 $\Phi(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ の鞍点なので、式(53)で \min と \max の順序を入れ替えても同一の最適解 $(\mathbf{y}^*, \mathbf{x}^*)$ が得られる。すなわち、次式が成り立つ。

$$\min_{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^{3N}} \max_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} \Phi(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \max_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} \min_{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^{3N}} \Phi(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \quad (54)$$

ここで、画像ベクトル \mathbf{y} に関する次式の最小化問題は、

$$\min_{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^{3N}} \Phi(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \min_{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^{3N}} \left\{ \mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \frac{\lambda}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|_2^2 \right\} \quad (55)$$

無制約の最適化問題であり、その求解は次式の Euler 方程式を解くことで行われ、

$$\nabla_{\mathbf{y}} \Phi(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \mathbf{A} \mathbf{x} + \lambda(\mathbf{y} - \mathbf{z}) = \mathbf{0} \quad (56)$$

結局、その解として、次式の関係式を得る。

$$\mathbf{y} = \mathbf{z} - \frac{1}{\lambda} \mathbf{A} \mathbf{x} \quad (57)$$

この関係式で、 $\mathbf{z} \rightarrow f$ (入力カラー画像)、 $\mathbf{y} \rightarrow u$ (出力カラー画像)、 $\mathbf{x} \rightarrow w$ (双対変数配列: カラー勾配配列と同型の配列)、 $-\mathbf{A} \mathbf{x} \rightarrow \text{div}_c w$ (カラー発散) と置き換えると、画像に対する演算として表現された次式の関係式を得る。

$$u = f + \frac{1}{\lambda} \text{div}_c w \quad (58)$$

上の関係式を式(53)の主-双対問題の関数 $\Phi(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ に代入すると、次式の目的関数 $F(\mathbf{x})$ を得る。

$$F(\mathbf{x}) := \Phi\left(\mathbf{z} - \frac{1}{\lambda} \mathbf{A} \mathbf{x}, \mathbf{x}\right) = \frac{\lambda}{2} \left[\|\mathbf{z}\|_2^2 - \left\| \mathbf{z} - \frac{1}{\lambda} \mathbf{A} \mathbf{x} \right\|_2^2 \right] \quad (59)$$

よって、 \mathbf{x} に関して目的関数 $F(\mathbf{x})$ を最大化する問題は、 \mathbf{x} に関して目的関数 $D(\mathbf{x})$ を最小化する次式の問題と等価である。

$$\arg \max_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} F(\mathbf{x}) = \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} D(\mathbf{x}) := \|\lambda \mathbf{z} - \mathbf{A} \mathbf{x}\|_2^2 \quad (60)$$

この最適化問題を双対問題という。ここで、 $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ の制約は \mathbf{x} に関する凸制約条件を意味するので、双対問題の解は、射影勾配解法 (Projected gradient solver) によって求められる^[8]。式(60)の双対問題の目的関数 $D(\mathbf{x})$ の \mathbf{x} に関する勾配 $\nabla_{\mathbf{x}} D(\mathbf{x})$ は、次式で与えられるので、

$$\nabla_{\mathbf{x}} D(\mathbf{x}) = 2\mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{x} - \lambda \mathbf{z}) = 2\lambda \mathbf{A}^T \left(\frac{1}{\lambda} \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{z} \right) \quad (61)$$

射影勾配解法の更新ステップは次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(k+1)} &= p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}^{(k)}) := P_{\mathbf{X}}\left(\mathbf{x}^{(k)} - \varepsilon \nabla_{\mathbf{x}} D(\mathbf{x}^{(k)})\right) \\ &= P_{\mathbf{X}}\left(\mathbf{x}^{(k)} + 2\varepsilon \lambda \mathbf{A}^T \left(\mathbf{z} - \frac{1}{\lambda} \mathbf{A} \mathbf{x}^{(k)}\right)\right) \end{aligned} \quad (62)$$

式(62)の写像 $p_{\mathbf{X}}(\cdot)$ を射影勾配写像という。また、式(62)において、 $P_{\mathbf{X}}(\cdot)$ は閉凸空間 \mathbf{X} 上への凸射影、 $\mathbf{x}^{(k)}$ は双対変数ベクトルの k 回目の更新ベクトル、 ε はステップサイズパラメータであり、反復更新が収束するための“ステップサイズパラメータ ε の値に関する十分条件”は、目的関数 $D(\mathbf{x})$ の勾配 $\nabla_{\mathbf{x}} D(\mathbf{x})$ のリプシッツ定数 (Lipschitz constant) $L(D)$ によって次式で与えられる。

$$\varepsilon \in (0, 1/L(D)] \quad (63)$$

また、式(62)の更新ステップにおいて、 $\mathbf{z} \rightarrow f$ (入力カラー画像)、 $\mathbf{x} \rightarrow w$ (双対変数配列)、 $\mathbf{A}^T \mathbf{z} \rightarrow \nabla_C f$ (カラー勾配)、 $-\mathbf{A} \mathbf{x} \rightarrow \text{div}_C w$ (カラー発散) と置き換えると、画像に対する演算として表現された次式の更新式を得る。

$$w^{(k+1)} = P_x \left(w^{(k)} + 2\varepsilon \lambda \nabla_C \left(f + \frac{1}{\lambda} \text{div}_C w^{(k)} \right) \right) \quad (64)$$

また、式(58)より、出力画像 $u^{(k+1)}$ は次式で与えられる。

$$u^{(k+1)} = f + \frac{1}{\lambda} \text{div}_C w^{(k+1)} \quad (65)$$

この射影勾配解法は、等方性 TV セミノルムを用いたカラー画像の全変動雑音除去問題^[7]の解法として A. Chambolle によって考案された射影解法^[2]を、全変動カラー画像雑音除去問題の解法へと拡張したものに相当する。

関数 $D(\mathbf{x})$ の勾配 $\nabla_x D(\mathbf{x})$ のリプシッツ定数 $L(D)$ は、次式の不等式を満足する定数 L の最小値として定義される。

$$\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}, \quad \|\nabla_x D(\mathbf{x}_1) - \nabla_x D(\mathbf{x}_2)\|_2 \leq L \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|_2 \quad (66)$$

上の不等式の左辺に勾配 $\nabla_x D(\mathbf{x})$ の具体的な表現を代入すると、次式となるので、

$$\|\nabla_x D(\mathbf{x}_1) - \nabla_x D(\mathbf{x}_2)\|_2 = 2 \|\mathbf{A}^T \mathbf{A} (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)\|_2 \quad (67)$$

リプシッツ定数 $L(D)$ は明らかに、実対称行列 $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ の最大固有値に一致する。ここでは、最大固有値を評価する代わりに、リプシッツ定数 $L(D)$ の上界を評価する。行列の l^2 ノルムに関する性質を式(67)に適用すると、次式の

$$\begin{aligned} \|\nabla_x D(\mathbf{x}_1) - \nabla_x D(\mathbf{x}_2)\|_2 &= 2 \|\mathbf{A}^T \mathbf{A} (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)\|_2 \\ &\leq 2 \|\mathbf{A}^T\|_2 \|\mathbf{A} (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)\|_2 \leq 2 \|\mathbf{A}^T\|_2 \|\mathbf{A}\|_2 \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|_2 \\ &= 2 \|\mathbf{A}^T\|_2^2 \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|_2 \end{aligned} \quad (68)$$

不等式が得られ、よってリプシッツ定数 $L(D)$ の一つの上界が次式で与えられる。

$$L(D) \leq 2 \|\mathbf{A}^T\|_2^2 \quad (69)$$

ここで、行列 \mathbf{A}^T の l^2 ノルム $\|\mathbf{A}^T\|_2$ は、任意のカラー画像ベクトル \mathbf{y} に行列 \mathbf{A}^T を作用させて得られたベクトル $\mathbf{A}^T \mathbf{y}$ の l^2 ノルム $\|\mathbf{A}^T \mathbf{y}\|_2$ を評価することで、その上界が評価される。行列 \mathbf{A}^T を画像ベクトル \mathbf{y} に作用させることは、各画素位置 (i, j) においてカラー画像 u のカラー勾配 $\nabla_C u$ を計算することを意味するので、カラー勾配ベクトル \mathbf{p}_i の式(22)の定義を代入し、Cauchy-Schwartz の不等式を適用することで、 $\|\mathbf{A}^T \mathbf{y}\|_2$ の上界が次式のように評価される (付録参照)。

$$\|\mathbf{A}^T \mathbf{y}\|_2^2 = \sum_{i=1}^N \|\mathbf{p}_i\|_2^2 \leq (8 + 32\alpha^2 + 32\beta^2) \|\mathbf{y}\|_2^2 \quad (70)$$

このことより、行列 \mathbf{A}^T の l^2 ノルム $\|\mathbf{A}^T\|_2$ の上界が次式で与えられ、

$$\|\mathbf{A}^T\|_2 \leq \sqrt{8(1 + 4\alpha^2 + 4\beta^2)} \quad (71)$$

さらに勾配 $\nabla_x D(\mathbf{x})$ のリプシッツ定数 $L(D)$ の上界 L_U が、次式にて評価される。

$$L(D) \leq 2 \|\mathbf{A}^T\|_2^2 \leq L_U = 16(1 + 4\alpha^2 + 4\beta^2) \quad (72)$$

結局、反復更新が収束するための“ステップサイズパラメータ ε の値に関する十分条件”は、次式で与えられる。

$$\varepsilon \in (0, 1/L_U] = \left[0, \frac{1}{16(1 + 4\alpha^2 + 4\beta^2)} \right] \subseteq (0, 1/L(D)] \quad (73)$$

以下に、全変動カラー画像雑音除去問題の射影勾配解法

の計算アルゴリズムを示す。なお、最近、A. Beck と M. Teboulle によって、射影勾配解法をその特別な場合として含んだ近接勾配解法の反復更新を高速化する手法が考案されているが^[8]、以下ではこの手法を導入した高速射影勾配解法の計算アルゴリズムを示す。

【高速射影勾配解法の計算アルゴリズム】

- 0) パラメータ設定: $\varepsilon = 1/L_U$
- 1) 初期設定: $\xi^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} \in \mathbf{X}, t_1 = 1$
- 2) 反復更新: $k = 1, 2, \dots, K$

$$\mathbf{x}^{(k)} = p_c(\xi^{(k)}) \quad (74) \quad \mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{z} - \frac{1}{\lambda} \mathbf{A} \mathbf{x}^{(k)} \quad (75)$$

$$t_{k+1} = (1 + \sqrt{1 + 4t_k^2})/2 \quad (76)$$

$$\xi^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \left(\frac{t_k - 1}{t_{k+1}} \right) (\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}) \quad (77)$$

【アルゴリズム終】

この高速解法では、 k 回目の反復更新値 $\mathbf{x}^{(k)}$ と大域的最適解 \mathbf{x}^* との間に、次式の不等式が成立する^[8]。

$$D(\mathbf{x}^{(k)}) - D(\mathbf{x}^*) \leq \frac{2L_U \|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}^*\|_2^2}{(k+1)^2} \quad (78)$$

このことは、通常の射影勾配解法の収束速度が $O(1/k)$ であるのに対し、高速射影勾配解法は $O(1/k^2)$ の収束速度を持った比較的高速な解法であることを意味している。

なお、以降では、表記の便宜のため、式(52)で $3N \times 3N$ のサイズのぼけ作用素行列 \mathbf{B} を単位行列 \mathbf{I}_{3N} と設定して定式化された“パラメータ λ で特徴付けられた全変動カラー画像雑音除去問題”を射影勾配解法によって解いて求めた最適解 \mathbf{y}^* を、次式で示したように、カラー画像雑音除去作用素 $D_C(\mathbf{z}, \lambda)$ を用いて、形式的に、

$$\mathbf{y}^* = D_C(\mathbf{z}, \lambda) := \arg \min_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{3N}} \left\{ J_C(\mathbf{u}) + \frac{\lambda}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|_2^2 \right\} \quad (79)$$

と表記している。

5.2 全変動カラー画像ぼけ復元問題の近接勾配解法

次に、式(52)の全変動カラー画像復元問題において、 $3N \times 3N$ のサイズのぼけ作用素行列 \mathbf{B} を単位行列 \mathbf{I}_{3N} 以外の行列に設定した場合、すなわち一般の“ぼけ復元問題”について近接勾配解法^{[8], [9], [10]}を導出する。なお、この場合には、最適解は存在するものの、その唯一性は必ずしも保証されない。

全変動カラー画像雑音除去問題の場合と同様にして、全変動カラー画像ぼけ復元問題の双対問題を導出するには、実対称行列 $\mathbf{B}^T \mathbf{B}$ の逆行列の計算が必要となるが、一般的なぼけ作用素行列 \mathbf{B} では、実対称行列 $\mathbf{B}^T \mathbf{B}$ が正則であることは保証されない。そこで、主問題である式(52)の最適化問題の目的関数を、次式で表現し、

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{3N}} E(\mathbf{y}) &:= G(\mathbf{y}) + H(\mathbf{y}) \\ G(\mathbf{y}) &:= \frac{\lambda}{2} \|\mathbf{B} \mathbf{y} - \mathbf{z}\|_2^2, \quad H(\mathbf{y}) := J_C(\mathbf{u}) \end{aligned} \quad (80)$$

これに直接に近接勾配解法^{[8], [9], [10]}を適用する。詳細は割愛するが、近接勾配解法の更新演算を与える近接勾配写像 $p_{HL}(\bullet)$ は、関数 G の勾配 ∇G のリプシッツ定数 $L(G)$ 以上の任意の正の実定数を L とすると、次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
 p_{VL}(\mathbf{y}) &:= \arg \min_{\boldsymbol{\psi} \in \mathbb{R}^{3n}} \left\{ H(\boldsymbol{\psi}) + \frac{L}{2} \left\| \boldsymbol{\psi} - \left(\mathbf{y} - \frac{1}{L} \nabla G(\mathbf{y}) \right) \right\|_2^2 \right\} \\
 &= \arg \min_{\boldsymbol{\psi} \in \mathbb{R}^{3n}} \left\{ J_C(\boldsymbol{\psi}) + \frac{L}{2} \left\| \boldsymbol{\psi} - \left(\mathbf{y} - \frac{\lambda}{L} \mathbf{B}^T (\mathbf{B}\mathbf{y} - \mathbf{z}) \right) \right\|_2^2 \right\} \quad (81) \\
 &= D_C \left(\mathbf{y} - \frac{\lambda}{L} \mathbf{B}^T (\mathbf{B}\mathbf{y} - \mathbf{z}), L \right)
 \end{aligned}$$

この近接勾配写像 $p_{VL}(\cdot)$ 自体も、反復解法である射影勾配解法によって計算される。この計算に、具体的には、先に5.1で述べた高速射影勾配解法の計算アルゴリズムを適用する。なお、リップシッツ定数 $L(G)$ は、関数 G の定義より明らかに実対称行列 $\mathbf{B}^T \mathbf{B}$ の最大固有値の λ 倍に等しい。また、式(81)の $D_C(\mathbf{y}, \lambda)$ は、式(79)で定義したカラー画像雑音除去作用素であり、パラメータ λ で特徴付けられた全変動カラー画像雑音除去問題を射影勾配解法によって解いた最適解 \mathbf{y}^* を意味する。結局、近接勾配写像 $p_{VL}(\cdot)$ によって、近接勾配解法における各更新ステップの演算が、次式の更新演算として与えられる。

$$\mathbf{y}^{(k)} = p_{VL}(\mathbf{y}^{(k-1)}) = D_C \left(\mathbf{y}^{(k-1)} - \frac{\lambda}{L} \mathbf{B}^T (\mathbf{B}\mathbf{y}^{(k-1)} - \mathbf{z}), L \right) \quad (82)$$

式(82)による更新プロセスは、勾配ステップ (カラー画像雑音除去作用素の入力変数を計算するステップ) とカラー画像雑音除去ステップを交互に反復するプロセスとなっており、その収束性が理論的に保証される^[8]。

6. むすび

本研究では、まずスカラ画像の勾配作用素と発散作用素を拡張し、カラー画像の三原色信号間の相互依存性を考慮したカラー勾配作用素とカラー発散作用素を構成した。次に、カラー勾配作用素を用いてスカラ画像のTVセミノルムの定義を拡張し、三種類のカラーTVセミノルムを定義した。さらに、カラーTVセミノルムの双対定義を用いて全変動カラー画像復元問題を変分問題として定式化し、その近接勾配解法あるいは射影勾配解法を導出した。

全変動カラー画像雑音除去問題は、その双対問題を射影勾配解法によって比較的高速に解くことができる。一方、全変動カラー画像ぼけ復元問題は、全変動カラー画像雑音除去問題とは異なり、その双対問題の射影勾配解法の構成には難点があり、そのため主問題を近接勾配解法で直接に解かざるを得ない。この近接勾配解法は、勾配計算ステップとカラー画像雑音除去ステップを交互に反復して適用するものであり、その反復回数や計算量が比較的大きいので、高速化についてさらに検討を加える必要がある。

現在、本研究で得られた理論的な成果に基づき、種々の実際的なカラー画像処理の応用課題を取り上げ、全変動カラー画像復元問題として定式化し、実験的検討を加え、その有用性を明らかにしつつある。

謝辞

本研究は、名古屋工業大学・桜井 優 教授との議論を切っ掛けとして取り組んだものであり、切っ掛けを与えて下さった桜井教授に感謝の意を表する。

参考文献

[1]小松 隆, 齊藤 隆弘, “色差と色和のTVを用いたカラー画像雑音除去法”, 電子情報通信学会論文誌, Vol.J91-D, No.8, pp.2002-

2004 (2008).

- [2]A. Chambolle, “An algorithm for total variation minimization and applications”, J. Math. Imaging Vision, Vol.21, No.1-2, pp.89-97 (2004).
- [3]T. F. Chan, G. H. Golub, P. Mulet, “A nonlinear primal-dual method for total variation-based image restoration”, SIAM J. Sci. Comput., Vol.20, No.6, pp.1964-1977 (1999).
- [4]Y. Li, F. Santosa, “Computational algorithm for minimization total variation in image restoration”, IEEE Trans. on Image Process., Vol.5, No.6, pp.987-995 (1996).
- [5]P. Blomgren, T. F. Chan, “Color TV: total variation methods for restoration of vector-valued images”, IEEE Trans. Image Process., Vol.7, No.3, pp.304-309, (1998).
- [6]X. Bresson, T. F. Chan, “Fast dual minimization of the vectorial total variation norm and applications to color image processing”, CAM Rep., 07-25, (2007).
- [7]L. I. Ludin, S. J. Osher, E. Fatemi, “Nonlinear total variation based noise removal algorithm”, Physica D, Vol.60, pp.259-268 (1992).
- [8]A. Beck and M. Teboulle, “Gradient-Based Algorithms with Applications to Signal Recovery Problems, in Convex Optimization in Signal Processing and Communications, D.P. Palomar and Y.C. Eldar (Eds.)”, pp.42-88, Cambridge Univ. Press, U.K., Dec. 2009.
- [9]G. B. Passty, “Ergodic convergence to a zero of the sum of monotone operators in Hilbert space”, J. Math. Anal. Appl., Vol.72, No.2, pp.383-390 (1979).
- [10] P. Combettes and V. Wajs, “Signal recovery by proximal forward-backward splitting”, Multiscale Modeling and Simulation, Vol.4, pp.1168-1200 (2005).

付録：式(70)の上界の評価

式(70)の左辺に現れた $\|\mathbf{p}_l\|_2$ の一画面内での2乗和は、

- 1) 三原色信号の水平・垂直勾配の一画面内での2乗和と、
- 2) 色差の水平・垂直勾配の一画面内での2乗和と、
- 3) 色和の水平・垂直勾配の一画面内での2乗和の総和として表現される。

三原色信号の水平・垂直勾配の一画面内での2乗和にCauchy-Schwartzの不等式を適用すると、次式の不等式が得られる。

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\nabla_H r_{i,j})^2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} (r_{i,j+1} - r_{i,j})^2 \\
 &\leq 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} (r_{i,j+1}^2 + r_{i,j}^2) \leq 4 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_{i,j}^2 \quad (A1)
 \end{aligned}$$

ただし、カラー画像ベクトル \mathbf{y} に対応したカラー画像 u の三原色信号を $\{r, g, b\}$ と表記している。一方、色差と色和の水平・垂直勾配の一画面内での2乗和に、Cauchy-Schwartzの不等式と式(A1)の不等式を適用すると、次式の不等式が得られる。

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\nabla_H (r \pm g)_{i,j})^2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ (r_{i,j+1} - r_{i,j}) \pm (g_{i,j+1} - g_{i,j}) \right\}^2 \\
 &\leq 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ (r_{i,j+1} - r_{i,j})^2 + (g_{i,j+1} - g_{i,j})^2 \right\} \quad (A2) \\
 &\leq 8 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (r_{i,j}^2 + g_{i,j}^2)
 \end{aligned}$$

式(70)の左辺に現れた $\|\mathbf{p}_l\|_2$ の一画面内での2乗和において、これを構成する各項に、式(A1)と式(A2)の不等式を適用すると、次式の不等式が得られ、

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n \|\mathbf{p}_l\|_2^2 &\leq (8 + 32\alpha^2 + 32\beta^2) \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (r_{i,j}^2 + g_{i,j}^2 + b_{i,j}^2) \right) \\
 &= (8 + 32\alpha^2 + 32\beta^2) \|\mathbf{y}\|_2^2 \quad (A3)
 \end{aligned}$$

式(70)の上界の評価が直ちに得られる。