命題論理の幾何的モデル†

月 本 洋††

最近，非単調論理，様相論理，ファジー論理等の非古典論理が，人工知能その他の情報処理の分野で盛んに研究されている．本論文では，それらの非古典命題論理を統一的に扱えるような幾何的なモデルを提案する．その幾何的なモデルは，自然言語が有する，命題間の距離や命題の情報量を自然な形で反映している．その構成方法は以下のとおりである．①実係数多項式関数のある種の計算が，古典命題論理のモデルになる．②巾等律を部分的に除くことによってこのモデルを拡張する．③この拡張モデルは関数空間であるが，ある内積を導入することによりユークリッド空間になる．④命題に情報量を導入することによりこの空間の部分集合が，非古典命題論理の命題と対応している．以上の手法で構成されたモデルが，非古典命題論理に有効であることを，ファジー論理，様相論理，非単調論理で確認する．

1. はじめに

最近，情報科学，特に人工知能の分野で，古典論理の有効性の限界が指摘され，様々な非古典論理が提案され，盛んに研究されている．例えば，推論の基礎的な分野では，非単調論理，デフォルト論理，サーカムスクリプション，等があり，ソフトウェアの自動検証，自動設計等の分野では，様相論理，直観論理が研究されている．また，制御分野では，ファジー論理に基づいたファジー制御が適用段階を迎えている．

多くの非古典論理が個別に研究されているのに対し，それらの論理の相互の関係についての研究はまだ少ない[1]．本論文では，非古典命題論理を統一的に扱えるような幾何的なモデルを提案する．

この幾何的モデルの最大の特長は，自然言語が持っている命題間の距離や命題の情報量を自然に反映している点にあり，また幾何的概念によって論理を見ることにより，論理的諸概念の整理ができたり，従来の手法では解決できなかった問題が解けたりする可能性もあると考えられる．例えば，非単調論理や様相論理等で扱っている命題は，見方を変えれば情報量の欠如している命題とみなせ，幾何的（位相的）取扱いが可能であろう．

非古典論理を統一的に扱う試みや，共通の枠組で相互関係を調べる研究のいくつかは，古典論理の公理，推論規則を部分的にはずした弱い論理の研究であり[2]，本論文も同様の手法を取る．すなわち古典命題論理から部分的に巾等律をはずしたモデル（拡張モデル）に自然な距離を導入し，そのモデルがユークリッド空間となることを示す．

モデルの構成方法に関しては，3章以降で詳細に述べるが，ここでは，簡単に要点に触れておく．

① ブール代数を実係数多項式関数の計算に書き換える（要は，われわれが慣れ親しんでいる計算に書き換えることである）．

② 上記の多項式関数の領域を巾等律の成立しない領域に拡張する（巾等律を部分的にはずすことである）．

③ この領域は1次多項式関数の全体であるが，少し特異な内積を導入することによってユークリッド空間になる（ユークリッド空間の直交基底とブール代数のアトムが似ていることに着目し，ブール代数のアトムに相当する関数が正規直交系になるのが，要点である）．

④ 命題の持つ情報量を導入することによって，このユークリッド空間の部分集合が，非古典命題論理の命題と対応可能なことを示す．

上記の手法で構成されたモデルで，古典命題論理と非古典命題論理（ファジー論理，様相論理，非単調論理）とを眺めてみる．

2. モデルについて

ここでは，これから構築するモデルがどのようなモデルであるべきかを簡単に述べる．それを一言で言えば，古典論理を特別な場合として含み，自然言語に存在する性質をなるべく多く表現するモデルである．

自然言語のどこに着目するかによって構築するモデルも異なることになるが，ここでは，命題間の距離と命題の情報量に着目する．

† A Topological Model for Propositional Logics by Hiroshi Tsukimoto (System and Software Engineering Laboratory, Toshiba Corporation).

†† (株)東芝システムソフトウェア技術研究所

まず，命題間の距離や，命題の情報量について例をあげて見てみよう．

（1）　命題間の距離

例えば次のような命題を考える．

A：彼は老人かもしれない．

B：彼は老人ではない．

C：彼は老人である．

D：彼は老人であり，男性である．

このような命題を形式的に取り扱うことをめざして，様相論理，非単調論理，ファジー論理等が研究されている．形式的に取り扱う前に，そこには自然な距離（位相）があることに注意しよう．上記例で言えば，BよりはAのほうがCに近いと言えるし，BよりはDのほうがCに近いとも言える．このように，命題に関して近い/遠いが議論できるということは，自然言語の命題の間に自然な距離（位相）があることを意味していると言えるだろう．

（2）　命題の情報量

上記例で言えば，AよりはCのほうが情報量が多いし，CよりはDのほうが情報量が多いと言える．

このように自然言語の中には位相（幾何）的性質が存在するにもかかわらず，今までの論理学は，これらの性質を等閑視してきた感がある．たとえ，取り上げるにしても形式化し，記号処理的方法で取り扱う試みが多かったと言える．

モデルへの要請を整理すると以下のようになる．

ⓐ　古典命題論理を特別な場合として含む．

ⓑ　命題間に自然な距離が定義されている．

ⓒ　命題間に自然な情報量が定義されている．

上記ⓑに関して言えば，われわれにとって最も自然な距離はユークリッド空間上の距離であるから，ユークリッド空間がモデルになることが好ましいと言えるし，ⓐに関しては，そのユークリッド空間の部分集合が，古典命題論理の命題と対応していれば良いし，ⓒに関しては，そのユークリッド空間上で情報量が定義されていれば良いのである．したがって，既に述べたように，古典命題論理のモデルであるブール代数から出発して，書換え，拡張等の作業を行ってユークリッド空間をめざすわけである．

3. 古典論理のモデル

3.1 実係数多項式関数による古典命題論理のモデル

まず，$\tau(\tau_x)$ という写像を定義して，その性質等について述べる．その後に，モデルの議論に入る．

（1）　τ_x の定義

今，

$$f(x)=p(x)(x-x^2)+q(x)$$

という式を考える．ここで，$f(x)$ 等は実係数多項式関数とする（以下，“実係数”を省略する）．$f(x)$ の定義域は $\{0,1\}$ とする．すなわち，$f\colon\{0,1\}\to R$ である．

τ_x を次のような写像と定義する．

$$\tau_x : f(x)\to q(x).$$

これは，$f(x)$ から，$f(x)$ を $x-x^2$ で割った剰余への写像である．

（2）　τ_x の計算について

$f(x)$ から $q(x)$ を求めるには，実際に $f(x)$ を $x-x^2$ で割ってその剰余を求めれば良いのだが，より簡単に求めるには，次の式が便利である．

$$\tau_x f(x)=f(0)(1-x)+f(1)x.$$

上式は，$f(x)=p(x)(x-x^2)+q(x)$ において，$q(x)=ax+b$ として，$x=0,1$ を代入することより求まる．

τ_x, τ_y に関して，以下の式が成立する．

ⓐ　$\tau_x(f(x)\pm g(x))=\tau_x(f(x))\pm\tau_x(g(x))$

ⓑ　$\tau_x(f(x)g(x))=\tau_x(f(x)(\tau_x(g(x))))$

ⓒ　$\tau_x(\tau_y(f(x,y)))=\tau_y(\tau_x(f(x,y)))$

上式は定義より簡単に求められる．ここではⓑを証明しておく．

ⓑの左辺は以下のとおりである．

$$\tau_x(f(x)g(x))=f(0)g(0)(1-x)+f(1)g(1)x.$$

ⓑの右辺は以下のとおりである．

$$\begin{aligned}&\tau_x(f(x)(\tau_x(g(x))))\\&=\tau_x(f(x)(g(0)(1-x)+g(1)x))\\&=f(0)(g(0)(1-0)+g(1)\cdot 0)(1-x)\\&\quad+f(1)(g(0)(1-1)+g(1)\cdot 1)x\\&=f(0)g(0)(1-x)+f(1)g(1)x.\end{aligned}$$

したがって，左辺＝右辺となる．

また，$f(x)=\sum_{k=1}^{n}a_k x^k$ とおくと，

$$\begin{aligned}\tau_x(f(x))&=\tau_x\left(\sum_{k=1}^{n}a_k x^k\right)\\&=\sum_{k=1}^{n}a_k\tau_x(x^k)\quad(\text{ⓐより})\\&=\sum_{k=1}^{n}a_k x\end{aligned}$$

となる．

$\tau_x(x^k)=x$ に関しては，

$$\tau_x(x^k)=0^k(1-x)+1^k x=x.$$

したがって $\tau_x(f(x))$ の計算をするには，$f(x)$ 中の x^k を x に書き換えれば良いことになる．手計算にはこれが便利であろう．

（3） τ の定義

n 変数の場合，τ を次のように定義する．

$$\tau \triangleq \prod_{i=1}^{n} \tau_{x_i}.$$

τ_{x_i} の順序に依存しないことは，3.1 節(2)の©式よりわかる．計算例は以下のとおり．

$$\begin{aligned}
&\tau\{(x+y-xy)^2\}\\
&=\tau_x[\tau_y\{(x+y-xy)^2\}]\\
&=\tau_x\{\tau_y(x^2+y^2+x^2y^2-2x^2y-2xy^2+2xy)\}\\
&=\tau_x(\tau_y(x^2)+\tau_y(y^2)+\tau_y(x^2y^2)-\tau_y(2x^2y)\\
&\quad-\tau_y(2xy^2)+\tau_y(2xy))\\
&=\tau_x(x^2+y+x^2y-2x^2y-2xy+2xy)\\
&=\tau_x(x^2+y-x^2y)\\
&=\tau_x(x^2)+\tau_x(y)-\tau_x(x^2y)\\
&=x+y-xy.
\end{aligned}$$

したがって $\tau\{(x+y-xy)^2\}=x+y-xy$ となる．

（4） L の定義

ここで，$L \triangleq \{f : \tau(f)=f\}$ と定義する．これは，$x-x^2, y-y^2, \cdots$ で割ってもその剰余と元の式が一致する多項式関数の全体であり，明らかに1次多項式関数の全体である．すなわち，1変数では，

$L=\{ax+b \mid a, b \in R\}$ となる．

（5） モデルの提示

さて，古典命題論理のモデルであるブール代数に対して以下の対応を与える．

$$\left.\begin{aligned}
X \wedge Y &\rightarrow \tau(x \cdot y)\\
X \vee Y &\rightarrow \tau(x+y-xy)\\
X' &\rightarrow \tau(1-x)
\end{aligned}\right\} \text{ⓐ}$$

ただし，$'$ は否定である．上記の X, Y はブール変数である．また，τ と多項式関数計算を以後，τ 計算と呼ぶことにする．

上記ⓐにこの τ 計算を有限回適用して生成される多項式関数の全体を L_1 とする．明らかに $L_1 \subset L$ である．また τ 計算は $\tau(f^2)=f$ を保存する．すなわち上記ⓐに τ 計算を有限回適用して生成される多項式関数は $\tau(f^2)=f$ を満たす．これは，簡単な計算で確認できるので，省略する．したがって $f \in L_1 \rightarrow \tau(f^2)=f$ である．

（6） モデルの確認

この τ 計算が古典命題論理のモデルになっているのだが，以下でその確認を行う．ここではブール代数の公理でそれを行う．ブール代数の公理は多くの書物で，様々な形で表現されているが，文献 3) の公理を採用する．

L 1 $F \wedge F$, $F \vee F$ （巾等律）

L 2 $F \wedge G = G \wedge F$, $F \vee G = G \vee F$ （交換律）

L 3 $F \wedge (G \wedge H) = (F \wedge G) \wedge H$ （結合律）
$F \vee (G \vee H) = (F \vee G) \vee H$

L 4 $F \wedge (F \vee G) = F$, $F \vee (F \wedge G) = F$ （吸収律）

L 5 a $F \wedge (G \vee (F \wedge H)) = (F \wedge G) \vee (F \wedge H)$ （モジュラ律）

L 5 b $F \vee (G \wedge (F \vee H)) = (F \vee G) \wedge (F \vee H)$

L 6 $F \wedge (G \vee H) = (F \wedge G) \vee (F \wedge H)$ （分配律）
$F \vee (G \wedge H) = (F \vee G) \wedge (F \vee H)$

L 7 $F \wedge O = O$ $F \vee O = F$ （普遍限界）
$F \wedge I = F$ $F \vee I = F$

L 8 $F \wedge F' = O$ $F \vee F' = I$ （補元性）

L 9 $(F')' = F$ （対合律）

L10 $(F \wedge G)' = F' \vee G'$ （ド・モルガンの法則）
$(F \vee G)' = F' \wedge G'$

τ 計算は L 2, L 3, L 7, L 9, L 10 を満たすが，その他を満たさない．しかし先ほど示した $\tau(f^2)=f$ を使うと，その他の L 1, L 4, L 5a, L 5b, L 6, L 8 を満たすことが簡単な計算からわかる．ここでは L 8 の $F \vee F' = I$ でそれを確認する．

$F \vee F' = I$ に対応する式は $\tau(f+(1-f)-f(1-f))=1$ であり，左辺を計算すると以下のようになる．

$$\begin{aligned}
&\tau(f+(1-f)-f(1-f))\\
&=\tau(f+1-f-f+f^2)\\
&=\tau(1-f+f^2)\\
&=\tau(1)-\tau(f)+\tau(f^2)\\
&=1-f+\tau(f^2) \quad (f \in L \text{ より } \tau(f)=f)\\
&=1-f+f \quad (\text{ここで } \tau(f^2)=f \text{ を使用})\\
&=1.
\end{aligned}$$

したがって $\tau(f+1-f-f(1-f))=1$ となり，$F \vee F' = I$ を確認したことになる．

以上により，L_1 と τ 計算が，古典命題論理のモデルになっていることがわかった．

3.2 $\tau(f^2)=f$ について

$\tau(f^2)=f$ の L における意味を1変数で簡単に調べてみる．$f=ax+b$ として $\tau(f^2)=f$ に代入して解くと，以下のようになる．

$$\begin{aligned}
&\tau\{(ax+b)^2\}=ax+b\\
&\rightarrow \tau(a^2x^2+2abx+b^2)=ax+b\\
&\rightarrow (a^2+2ab)x+b^2=ax+b\\
&\rightarrow \begin{cases} a^2+2ab=a \\ b^2-b=0 \end{cases}
\end{aligned}$$

となり，これを解くと $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ が解となる．

$a=0,\ b=0\ \rightarrow f(x)=0$

$a=0,\ b=1\ \rightarrow f(x)=1$

$a=1,\ b=0\ \rightarrow f(x)=x$

$a=-1,\ b=1\ \rightarrow f(x)=1-x$

となり，0, 1, x, $1-x$ が各々

0…矛盾

1…真理（トートロジ）

x…ある命題

$1-x$…ある命題の否定

と対応付けられる．1変数の古典命題論理の命題は上記の4個であり，古典命題論理の命題と $\tau(f^2)=f$ が対応していることがわかる．

これを2変数以上で実施しても同様の結果が得られるが，計算が繁雑になるため，省略する．ただし，3.1節(3)の例は，2変数の一例である．以上は $\tau(f^2)=f\rightarrow f\in L_1$ となり，3.1節(4)の $f\in L_1\rightarrow\tau(f^2)=f$ とあわせて，$\tau(f^2)=f\rightleftarrows f\in L_1$ となる．$\tau(f^2)=f$ はブール代数で書けば $F\wedge F=F$ となり，巾等律を意味し，また，L_1 は3.1節より古典命題論理の命題と対応している．したがって，L の $\tau(f^2)=f$（巾等律）を満たす部分集合は，L_1（古典命題論理の命題）であることがわかった．

3.3 確率計算との関係

ここでは本論文の主題から少しはずれるが，確率計算と前章までの計算（τ 計算）との関係について簡単に触れておく．

（1） 確率計算について

独立事象A，Bの確率を a, b とすると，その積事象，和事象，余事象の確率は各々，$a\cdot b$, $a+b-a\cdot b$, $1-a$ となる．

（2） 確率計算と τ 計算との対応

独立事象の確率を変数とする多項式関数 F を考える．ただし，この多項式は(1)の生成規則（独立事象の確率から積事象，和事象，余事象の確率を生成する）を有限回適用して得られるものとする．また F は $F:[0,1]^n\rightarrow[0,1]$ である．なお F の全体を P とする．ここで準同型写像 T を次のように定義する．

$T\triangleq\prod_i T_{x_i}$.

$T_{x_i}F\triangleq F(0)(1-x)+F(1)x$.

この準同型写像により，確率計算と τ 計算の対応が以下のように付けられる．

$T(F\cdot G)=T(F)\cdot T(G)$.

$T(F+G)=T(F)+T(G)$.

右辺の積，和は，前章までで述べてきた τ 計算の積，和

$\tau(T(F)\cdot T(G))$, $\tau(T(F)+T(G))$ である．

上記の対応は $T\cdot P=L_1$ とも書ける．

この対応により，確率と論理の関係の議論が可能かと思われるが，主題からはずれるので，別稿に譲りたい．

4. 拡張モデル

4.1 モデルの拡張

（1） L_1 から L への拡張

τ 計算と L_1 が古典命題論理のモデルになっていることを3.1節で確認したのだが，ここでは，モデルを τ 計算と L に拡張する．この拡張は3.2節で見たとおり $\tau(f^2)=f$ をはずすことに相当する．$\tau(f^2)=f$ は巾等律を意味するため，これは巾等律をはずすことを意味するのだが，τ 計算により変数 x および $1-x$（すなわち論理のリテラルに対応する式）に関しては巾等律をはずさないことになるので，巾等律をはずすのは，リテラルに対応する式以外の式（非リテラル式）に対して行うことになる．これにより対象領域は，1次多項式関数 $f(\{0,1\}^n\rightarrow R)$ 全体に拡張される．

（2） $\{0,1\}$ から $[0,1]$ への拡張

次にこの関数の定義域を $\{0,1\}$ から $[0,1]$ へ拡張する．この拡張により，上記の1次多項式関数 f は，$f:[0,1]^n\rightarrow R$ となる．

このような拡張は，(0,1) に関して関数を線形補間したようなものであり，他の補間の方法も考えられるかとは思うが，ここではこの方法が最も単純であるという理由で採用することにし，(0,1) の中間値の取扱いに関しては，今後の課題としたい．

（3） このように拡張されたモデルで，古典命題論理の命題と対応付けられない関数（例えば，$(1/2)x+1/2$）がどんな命題と対応付けられるかを調べるのが，これからの議論の中心である．

方針は1章で述べたように，この L に少し特異な内積を定義することによってこの L をユークリッド空間にするのだが，古典命題論理の中にユークリッド空間（ベクトル空間）と類似の性質があることをまず見ておこう．ブール代数（ブール代数は原子ブール代数とする．）の原子 a に関して以下のことが成立する．

$a_i\cdot a_i=a_i$（単位性）

$a_i \cdot a_j = 0 \quad (i \neq j)$ （直交性）

$\sum a_i = 1$ （完備性）

上記の事実は，この原子が，ベクトル空間の単位ベクトルに近い性質を持っていることを示している．例えば命題 $A \vee B$ は

$$A \vee B = (A \wedge B) \vee (A \wedge B') \vee (A' \wedge B)$$

となり，$A \wedge B$, $A \wedge B'$, $A' \wedge B$, $A' \wedge B'$ を α, β, γ, δ で表記し，$\vee$ を $+$ で表記すれば，$A \vee B$ は $\alpha+\beta+\gamma$ と表される．また，

$\alpha^2=\alpha,\ \beta^2=\beta,\ \gamma^2=\gamma,\ \delta^2=\delta$ （単位性）

$\alpha\beta=\beta\gamma=\gamma\alpha=\delta\alpha=0$ （直交性）

$\alpha+\beta+\gamma+\delta=1$ （完備性）

となるため，α, β, γ, δ の原子は単位ベクトルに近い性質を持っていると言える．

別の観点から見ると，ブール代数の原子は，完備な正規直交関数とも対応させられる（完備なのは，有限だから当然ではあるが）．このような点に着目して論理スペクトル等の概念を導入して議論している例もある[4]．しかしそれはアナロジーの域を脱していない．ここでは，前出の L が実際にユークリッド空間になることを示す．それには，内積を定義し，その内積に基づくノルムを定義して，そのノルムに関して L が有限な内積空間，すなわちユークリッド空間になるという手順をとる．

4.2 拡張モデルがユークリッド空間になる．

（1） 内積 $\langle f \cdot g \rangle$ を次のように定義する．

$$\langle f, g \rangle \triangleq 2^n \int_0^1 \tau(f \cdot g)\,dx.$$

（x はスカラでもベクトルでも良い．）

この内積は下記３条件を満足する．

I 1 $\langle f, f \rangle \geqq 0$, $\langle f, f \rangle = 0 \Leftrightarrow f=0$.

I 2 $\langle af, g \rangle = a\langle f, g \rangle$.

I 3 $\langle f+g, h \rangle = \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle$.

I 2, I 3 は明らかであるため，証明は省略し，I 1 の証明のみ行う（証明は１変数で行うが，有限次元では一般性を失わない）．

$f=f_1 x + f_0(1-x)$ とおく．

$$\begin{aligned} &2^1 \int_0^1 \tau(f \cdot f)\,dx \\ &= 2\int_0^1 (f_0^2(1-x)+f_1^2 x)\,dx \\ &= 2\left[f_0^2\left(x-\frac{x^2}{2}\right)+f_1^2\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \\ &= 2\left(\frac{1}{2}f_0^2+\frac{1}{2}f_1^2\right)=f_0^2+f_1^2 \geqq 0. \end{aligned}$$

また，

$$\langle f, f \rangle = 0 \leftrightarrow f_0^2+f_1^2=0 \leftrightarrow f=0.$$

最後の $f_0^2+f_1^2=0 \leftrightarrow f=0$ は $f \in L$（すなわち $f=ax+b=f_0(1-x)+f_1 x$）ゆえに成立する．

（2） ノルムの定義を次のように行う．

$$\|f\| \triangleq \langle f, f \rangle^{1/2}.$$

上記ノルムが下記３条件を満たすことは簡単にわかる．

N 1 $\|f\| \geqq 0$, $\|f\|=0 \Leftrightarrow f=0$.

N 2 $\|\alpha f\| = |\alpha|\,\|f\|$.

N 3 $\|f+g\| \leqq \|f\|+\|g\|$.

L は上記の内積，ノルムに関し，有限な内積空間，すなわちユークリッド空間になる．これは L が１次多項式関数から構成されることから簡単にわかる．上記ノルムを $N_R(f)$ と書く．これは，トートロジー（すなわち１）であっても，そのノルムが空間の次元に依存する．すなわち，

$$N_R(1)=\left(2^n\int_0^1 \tau 1^2\,dx\right)^{1/2}=(2^n(1-0))^{1/2}=2^{n/2}$$

となる．このノルムは直交関数展開の時に便利であるため，導入したが，ノルムが空間に依存するため，相対的ノルムと呼ぶ．$N_R(f)$ に対して，絶対的ノルムを

$$N(f) \triangleq \left(\int_0^1 \tau(f^2)\,dx\right)^{1/2}$$

と定義する．このノルムの論理的な意味を簡単に見ると次のようになる．簡単な計算より，$N(1)^2=1$, $N(x)^2=0.5$, $N(xy)^2=0.25$, $N(0)^2=0$ となり，これらの数値は，“命題の充足度”を表していると考えられる．例えば，1(トートロジー）はどんな対象に対しても真であるが，x は半分の対象，xy は 1/4 の対象に対して真であり，0(矛盾）はどんな対象に対しても真とならないというように解釈できる．このノルムは，今後，命題の情報量（論理エントロピー）の定義に使用する．

（3） 直交関数展開

ブール代数のアトムを拡張して直交関数を次のように定義する（n 変数とする）．

$$\phi_i=\prod_j e(x_j) \quad (i=1\sim 2^n,\ j=1\sim n)$$

$$e(x_j)=\begin{cases} 1-x_j & (\bar{x}_j \text{ と略記}) \\ \text{か} & \\ x_j & \end{cases}$$

例えば，１変数の場合の正規直交系は $\{x, 1-x\}$ となり，２変数の場合の正規直交系は $\{xy,\ x(1-y),\ (1-x)y,\ (1-x)(1-y)\}$ となる．

上記のように定義した ϕ_i に対して,

$\langle\phi_i,\phi_j\rangle=0\quad(i\neq j)$

$\|\phi_i\|=1$

となることは容易に確かめられる.したがって,以下が成立する.

ⓐ すべての $f\in L$ は $\{\phi_i\}$ により展開される.

$$f=\sum_{i=1}^{2^n}\langle f,\phi_i\rangle\phi_i.$$

ⓑ すべての i で $\langle f,\phi_i\rangle=0$ ならば,$f=0$ である.

以上のことより,n 変数よりなる命題(論理関数)は 2^n 次元のベクトルとして表現できることがわかる.具体例として $f=x+y-xy$ をあげる.正規直交系は $\{xy, x(1-y), (1-x)y, (1-x)(1-y)\}$ であるから,直交展開した時の各係数は以下のようになる.

$$\langle f,xy\rangle=2^2\int_0^1\int_0^1\tau(x+y-xy)xy\,dxdy$$
$$=4\int_0^1\int_0^1 xy\,dxdy=4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=1.$$
$$\langle f,x\bar{y}\rangle=2^2\int_0^1\int_0^1\tau(x+y-xy)x\bar{y}\,dxdy$$
($\bar{y}$ は $1-y$ の略記)
$$=4\int_0^1\int_0^1 x\bar{y}\,dxdy=1.$$
$$\langle f,\bar{x}y\rangle=2^2\int_0^1\int_0^1\tau(x+y-xy)\bar{x}y\,dxdy=1.$$
$$\langle f,\bar{x}\bar{y}\rangle=2^2\int_0^1\int_0^1\tau(x+y-xy)\bar{x}\bar{y}\,dxdy$$
$$=4\int_0^1\int_0^1 0\,dxdy=0.$$

したがって $f=1\cdot xy+1\cdot x\bar{y}+1\cdot\bar{x}y+0\cdot\bar{x}\bar{y}$ となり,ベクトル表示で $(1,1,1,0)$ となる.

これは,ブール代数でのアトムによる表現に対応するものになっている.すなわちこの直交関数展開は,ブール代数のアトムによる展開を拡張したものと言える.

(4) その他の正規直交系

正規直交系はブール代数のアトムを拡張した $\{x, 1-x\}$ 等,以外にも無数にある.それらは直交性と単位性を満たしてさえいれば良いのであり,その一例として,$\{\sqrt{4/5}(x+1/2),\ \sqrt{16/5}(x-3/4)\}$ がある.しかし,このような正規直交系の論理的意味は不明である.

ここでは,古典命題論理が有している諸性質をなるべく保存して,モデルを拡張する方針を取っているのであるから,当然のことながら,ブール代数のアトムを拡張した正規直交系による議論を今後も展開する.なお,ノルムは,定義よりわかると思うが,使用する正規直交系には依存しない.

4.3 情報量の定義による空間の構造化

(1) 前出の L を以後論理空間と呼び,その要素を論理関数と呼ぶ.下式の H を情報量として定義する.

$$H(f)\triangleq-\log_2(N(f))^2=-\log_2\left(\int_0^1\tau f^2dx\right).$$

この H は命題の持つ情報量を意味すると考えられる.具体例は以下のとおりである.

$H(1)=0$…トートロジーは情報量が0ビット.

これは,トートロジーが恒等的に正しいため,現実世界に関する具体的情報を含んでいないことに対応する.

$H(x)=1$…x すなわち「A である」は情報量が1ビット.

これは,「Aである.」という命題が,同時に「Aではない.」を陰に否定しており,{「Aである.」,「Aでない.」},から「Aである.」をその他の条件(発生頻度等)を考慮せずに指示していることに対応する.

$H(xy)=2$…xy すなわち「A かつ B である.」は情報が2ビット.

これも同上の解釈が可能であり,{「AであるかつBである.」,「AであるかつBでない.」,「AでないかつBである.」,「AでないかつBでない.」} から「AであるかつBである.」を指示していることに対応する.

$H(0)=\infty$…矛盾は情報量が無限大.

命題が多くなり,それらを連言していけば,情報量が多くなるが,一方徐々に命題間で矛盾が発生する可能性が高くなる.その極限状態として,情報量=無限大が矛盾と対応すると解釈できる.

上記例よりもわかるとおり,この情報量の定義は妥当と思われる.通常の情報量は事象に定義されているが,この情報量は命題に定義されているので,論理エントロピーと命名する.

(2) $H(x)=1$ だが,x に対応する命題Aを「さいころの目が3である.」とすると,通常のエントロピーは $\log_2 6$ となるが,論理エントロピーは $\log_2 2$ となり,その値が異なる.通常のエントロピーはさいころの面が6個あることを知った上で算出するが,論理エントロピーは,そのような情報が与えられていないとして算出するから,値が異なるのである.さいころの面数に関する情報を命題にして付加すれば,論理

エントロピーを $\log_2 6$ とすることは可能である．すなわち論理空間の変数を「さいころの目が1である．」〜「さいころの目が6である．」の6変数にすれば良いのである（ただし，ありえない状態を除かねばならないが）．別の言い方をすれば，最初の場合は「さいころの目は3である．」と「さいころの目は3以外である．」を同等に扱っているのである．論理的推論というものは，与えられた命題のみを考慮するという性質を有するものであり，論理エントロピーはそういう性質を浮彫りにしているとも言える．

また，ノルムが増加すればするほど，エントロピーは小さくなるから，原点から遠い命題ほど，情報量が少ないとも言えるし，その逆に，原点に近い命題ほど，情報量が多いとも言える．

5. モデルによる論理の解釈

特に体系的な解釈は行わない．二，三の例によって説明し，この理論の有効性を確認したいと思う．

5.1 古典命題論理の解釈

（1） 1変数の論理関数 $(ax+b(1-x))$ を論理空間で図示すると**図1**の (0,0)，(0,1)，(1,0)，(1,1) の4点になる．(0,0) は矛盾，(0,1) は否定，(1,0) は肯定，(1,1) はトートロジーに対応する．これを n 変数に拡張すると，古典命題論理に対応する点は上記のような格子点となることがわかる．

また，論理，束等で登場するハッセ図はこの格子点を線でつないだ図形を2次元に投影したものと言える．ハッセ図自体は論理等の構造をわかりやすくするための図形的アナロジーであるが，この理論によって基礎付けられたとも言える．

（2） 次に論理計算が，ベクトルでどう表現されるかを見る．論理関数 f, g にベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を対応させる．($\boldsymbol{a}=(a_i)$, $\boldsymbol{b}=(b_i)$)

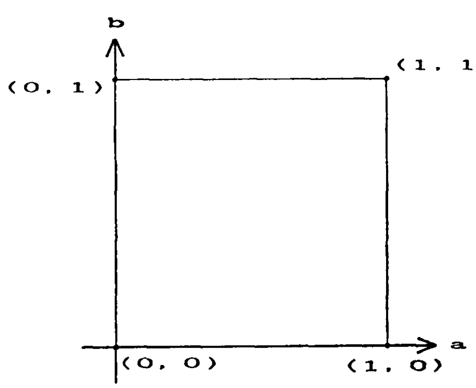

図1 古典論理の命題
Fig. 1 Propositions of classical logic.

AND, $\tau(fg)$ は各座標の直交性から $\boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{b}=(a_ib_i)$ となる（$\circ$ は各要素の積を意味する）．

OR, $\tau(f+g-fg)$ も同様に $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{b}=(a_i+b_i-a_ib_i)$ となる．

否定，$\tau(1-f)$ は $\boldsymbol{1}-\boldsymbol{a}=(1-a_i)$ となる．

（3） 矛盾するということは，$\tau fg=0$ であり，ベクトルで表現すると $\boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{b}=0$ となる．これは $(a_ib_i)=0$ で各 $a_ib_i=0$ となり $\Sigma a_ib_i=0$ となる．すなわち $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$（$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積）が0となる．したがって矛盾するということはベクトルが直交することと解釈できる．非古典命題論理へこのことを拡張すると，矛盾の度合を内積と関連させて評価できると考えられる．すなわち，内積が零に近いほど矛盾に近いと言える．

（4） 証明に関しても，同様な視点から解釈する．

命題 B が命題 A より証明できるとは，背理法を用いて表現すると，$A\wedge B'=0$ となる．これを論理関数で表現すると，次のようになる（ただし，A，B に f, g を対応させる）．

$$\tau f(1-g)=0\rightarrow\tau(f-fg)=0\rightarrow\tau(f)=\tau(fg)$$
$$\rightarrow\tau(fg)=f\quad(\because\ \tau(f)=f\leftarrow f\in L).$$

ここで，f, g に $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を対応させると

$$\boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\quad((a_ib_i)=(a_i))$$

となる．a_i が1ならば b_i は1でなければならないし，a_i が0ならば，b_i は 0, 1 のいずれかでも可となる．すなわち $b_i\geqq a_i$ となる．したがってベクトル $\boldsymbol{b}$ の各要素はベクトル $\boldsymbol{a}$ の各要素より小さくないということがわかる．直観的な表現を用いれば，ベクトル $\boldsymbol{b}$ はベクトル $\boldsymbol{a}$ より右上にあると言える．非古典命題論理へ，このような幾何学的証明を導入することができると考えられる．

このように古典命題論理を幾何学的観点から眺めてみると，いろいろと面白い知見が得られる．また，応用としては定理の自動証明，推論の高速化，並列化等が考えられるが，今後の課題としたい．

5.2 非古典命題論理の解釈

（1） ファジー論理

図1にエントロピー1の曲線を導入する．

$$-\log_2(N(f))^2=-\log_2\left(\int_0^1\tau f^2dx\right)=1.$$

$f=ax+b(1-x)$ とおいて代入し，計算すると $a^2+b^2=1$ となる．

これは半径1の円である．したがって**図2**の円弧が情報量を1ビット持つ命題を表す曲線となる．座標を

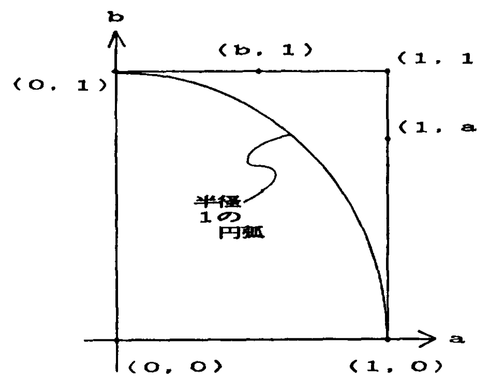

図 2　情報量 1 の命題
Fig. 2　Propositions whose amount of information is 1.

(a, b) から極座標 (r, θ) に切り替えて考えてみると，r は情報量（r が大きければ大きいほど，情報量は少ない）を表し，θ が性質（述語）を表すことがわかる．例えば，x を「高い.」とするならば，$\bar{x}$ は「低い.」となる．$\theta=0$ で高く，$\theta=\pi/2$ で低いのならば，その中間の角度では，θ が増大するにつれて，徐々に低くなっていくと考えられる．例えば $\theta=\pi/4$ では高くも低くもないとなる．

ファジー論理[5] のメンバシップ関数は集合 X から，$[0,1]$ への関数である．上記の θ を介して考えると，$X \xrightarrow{f_2} \theta \xrightarrow{f_1} [0,1]$ となる．f_1 は $\sin\theta$, $\cos\theta$ のいずれかであり，f_2 は任意である．f_2 の中で最も単純である 1 次関数を採用すれば，メンバシップ関数は $\sin x$ $(\cos x)$ となる．ファジー理論は「主観的科学」という主張もあり，メンバシップ関数は個人個人が任意に決めるべきだとの考えもあるが，それではあまりにも恣意的になりすぎるうらみもある．また一部にはメンバシップ関数の決め方に関する議論がある．ここでは，次のことを主張するにとどめておく．「古典論理を拡張して自然な距離（位相）を入れた場合に，述語（高い等）をつなぐ中間的な述語（やや高い，高くも低くもない等）の曲線は sin もしくは cos になる.」

この理論によってメンバシップ関数の詳細な議論が可能かと思われる．

（2）　様相論理

様相論理には様々なものがあるが，ここでは基本的な $\Diamond A$ について述べる．これは通常「A かもしれない.」と解釈されるものであり，情報量が欠如している命題とも言える．図 2 の $(1, a)$, $(b, 1)$ を考える．$(1, a)$ は情報量が $(1, 0)$ より少ない（情報量は原点からの距離に反比例する）．そして，a を $0 \rightarrow 1$ と動かすことを考えると，$(1, 0) \rightarrow (1, 1)$ となる．$(1, 0)$ は「x である.」という命題に対応し，$(1, 1)$ は「x であるかもしれないし，x でないかもしれない.」等の情報量 0 ビットの命題に対応する．したがって $(1, a)$ $(0 \leqq a \leqq 1)$ は「x であるかもしれない.」という命題に対応し，a の減少とともに「x である.」に近付くことになる．$(b, 1)$ も同様に考えると「x でないかもしれない.」という命題に対応する．

よって線分 $(1, 0)-(1, 1)$ と線分 $(0, 1)-(1, 1)$ は $\Diamond A$ を表現していると解釈できる．

このようにしてその他の様相記号も解釈できるが，ここでは省略する．また，様相論理の一つに時相論理があり，プログラムの検証理論等で使われているが，その命題をベクトルと対応させ，時間をベクトルの遷移と対応させて解釈することができる．

（3）　非単調論理

非単調論理にはいくつかの体系がある[6),7)] が，ここでは非単調論理の命題（例えば，「鳥は一般には飛ぶ.」）を情報量の欠如とした命題として解釈して，整合的な取扱いができることを示す．

以下の 3 項目を規則とする．

ⓐ 「鳥は一般には飛ぶ.」というような命題を様相論理の箇所で見たように情報量の欠如した命題と考え，次のように表現する（ただし，鳥を a に，飛ぶを b に対応させて，座標軸を $(ab, a\bar{b}, \bar{a}b, \bar{a}\bar{b})$ とする）．

「鳥は一般には飛ぶ.」$\rightarrow (1, \alpha, 1, 1)$.

（ただし α は，$0 \leqq \alpha \leqq 1$ である.）

なぜならば，「鳥は飛ぶ.」は $a \rightarrow b \Rightarrow \bar{a} \vee b \Rightarrow ab + \bar{a}b + \bar{a}\bar{b} \Rightarrow (1, 0, 1, 1)$ であり，「鳥は飛ぶかどうかわからない.」は $(1, 1, 1, 1)$ となるから，「鳥は飛ぶかもしれない.」は $(1, \alpha, 1, 1)$ となるのである．

ⓑ 命題間の計算は古典論理の計算と同じとする（この規則に関しては，議論の余地があるかと思うが，α 等の中間値 $(0<\alpha<1)$ の具体的数値を問題にしない限り，特に問題ないと考えられる）．

ⓒ ファジー論理のところで述べたとおり，$\sin x$ $(\cos x)$ の曲線は情報量の最も多い命題に対応している（空間が 2^n 次元の場合は，n ビットである）．したがってこの曲線より原点側の点は命題と対応しえないことになる．すなわちこの曲線は命題の上限（情報量に関して）を表していると言える（もちろん矛盾は別ではあるが）．

さて，上記規則により非単調論理の推論の具体例を示す．

A：鳥は一般に飛ぶ，B：あひるは飛ばない，

C：あひるである，D：あひるは鳥である．

鳥を a とし，飛ぶを b とし，あひるを c とする．この論理空間は3変数からなる $2^3=8$ 次元の空間となる．座標軸は $(abc, ab\bar{c}, a\bar{b}c, a\bar{b}\bar{c}, \bar{a}bc, \bar{a}b\bar{c}, \bar{a}\bar{b}c, \bar{a}\bar{b}\bar{c})$ となり，上記A～Dの命題は以下のように表現される．

A $(1, 1, \alpha, \beta, 1, 1, 1, 1)$

B $(0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1)$

C $(1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0)$

D $(1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1)$

まず，A, C, D からの推論結果（すなわち $A \wedge C \wedge D$）を示すと以下のようになる．

$(1, 0, \alpha, 0, 0, 0, 0, 0)$

これを論理関数に戻すと $abc+\alpha a\bar{b}c=a(b+\alpha\bar{b})c$ となる．これは，「鳥でありかつあひるであり，飛ぶかもしれない.」となり妥当な結果となる．さて，これに B を加える．すなわち $A \wedge B \wedge C \wedge D$ である．これは

$(0, 0, \alpha, 0, 0, 0, 0)$

となり，$\alpha a\bar{b}c$ となる．規則ⓒで n 変数（2^n 次元）の場合は n ビット以上の情報量を持つ命題を禁止したのであるから $\alpha a\bar{b}c$ は $a\bar{b}c$ となる（$0 \leqq \alpha \leqq 1$）．これは「鳥であり，あひるであり，飛べない.」となり妥当な結果である．

以上で，この理論が非単調論理にも有効であることをわかってもらえたかと思う．この有効性は，命題に情報量を定義したことによるものと考えられる．

（4） 最後に，この空間のどの部分集合が非古典論理（古典論理も含めて）の命題と対応しているかを見る．それは，ファジー論理，様相論理での議論より，**図3**の斜線部分になっていることがわかる（1変数の例）．

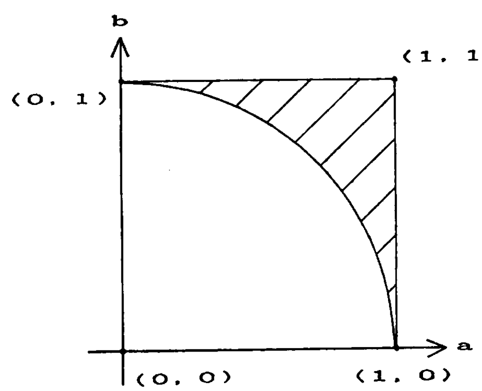

図 3 非古典論理の命題
Fig. 3 Propositions of nonclassical logics.

6. おわりに

以上で，論理の幾何的モデルの構築，およびその上での古典命題論理，非古典命題論理の解釈をいくつか見たが，まだこの理論は生まれたばかりで，不備な点も散見される．しかし，大きい可能性を秘めていると信ずる．

今後の課題は以下のとおりである．

①確率論（そして，確率論の上で構築されている情報理論，統計理論）との関連の研究

②中間値（$0<\alpha<1$）の扱いの検討

③非古典命題論理の体系的解釈

④古典命題論理の自動証明，推論の並列化，高速化

⑤述語論理への拡張

参考文献

1) 小野寛晰：非標準論理の現状とその展望，情報処理，Vol. 30, No. 6, pp. 617-625 (1989).
2) Ono, H. and Komori, Y.: Logics without the Contraction Rule, *J. Symbolic Logic*, Vol. 50, No. 1, pp. 169-201 (1985).
3) Birkhoff, G. and Bartee, T. C.: Modern Applied Algebra, McGraw-Hill (1970)（現代応用代数，一松 信訳，新曜社 (1973)）.
4) Watanabe, S.: Knowing and Guessing, John Wiley & Sons (1969)（知識と推測，村上陽一郎，丹治信春訳，東京図書 (1975)）.
5) Zadeh, L. A.: Fuzzy Algorithms, *Inf. Control*, Vol. 12, pp. 94-102 (1968).
6) McDermott, D. and Doyle, J.: Non-monotonic Logic I, *Artif. Intell.*, Vol. 13, No. 1/2, pp. 41-72 (1980).
7) Reiter, R.: A Logic for Default Reasoning, *Artif. Intell.*, Vol. 13, No. 1/2, pp. 81-132 (1980).

（平成元年8月30日受付）
（平成2年4月17日採録）

月本 洋（正会員）

昭和30年4月14日生．昭和53年東京大学工学部計数工学科卒業．55年同大学院修士課程修了．同年東京芝浦電気(株)（現(株)東芝）に入社．計装システムエンジニアリング業務に従事した後，現在はシステムソフトウェア技術研究所にて人工知能の基礎的な研究を行っている．計測自動制御学会，人工知能学会各会員．