離散化関数の計算法[†]

秦野 和郎[††]

この論文では次のような四種の離散化関数 $\delta_i(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\{1/(k+x)^i+(-1)^i/(k-x)^i\}$, $\bar{\tau}_i(x)=1/x^i+\delta_i(x)$, $\bar{\delta}_i(x)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\{1/(k+x)^i+(-1)^i/(k-x)^i\}$, $\tau_i(x)=1/x^i+\bar{\delta}_i(x)$: $0\leqq x\leqq 1/2$; $i=1,2,\cdots$. の性質およびその計算法について述べている．これらの関数は Fourier 係数の漸近展開式を，台形則による離散 Fourier 係数または中点則による離散 Fourier 係数に関する Aliasing の式に代入すると得られる関数である．これらの関数を効率的に計算し，FFT (高速 Fourier 変換) により得られる離散 Fourier 係数を適当に補正すると高精度の Fourier 係数を得ることができる．また，Gibbs の現象を生じない近似を得ることができる．

1. はじめに

Fourier 係数の近似値である，離散 Fourier 係数を計算するために，FFT (Fast Fourier Transform) なる高速算法が開発されて多くの分野で利用されている．この計算法によればデータ個数の数倍ないし数十倍程度の乗算回数ですべての離散 Fourier 係数を一挙に求めることができる．さらにこの計算法は，丸め誤差が極めて小さいという特徴を持っている．

このような長所がある反面，通常の積和計算による方法に比較して，打ち切り誤差に関しては FFT 法は，なんらの改良ももたらさない．離散 Fourier 係数を容易に計算できるようになったのであるから，今後は打ち切り誤差を小さくすることを検討する必要がある．

本論文では，まず Fourier 係数と離散 Fourier 係数との間に成り立つ重要な関係式を示す．この関係式には筆者らが“離散化関数”と呼んでいる一群の関数が含まれている．この関数を計算することができればたとえば，離散 Fourier 係数を補正して Fourier 係数の高精度の値を得ることができる．

本論文では“離散化関数”の計算法を示す．この関数は三角補間の誤差，その誤差の補正等，ある仮定のもとに Fourier 級数に関する量を離散化すると常に現れる重要な関数である[5)~9)]．

2. 離散化関数

本章では，離散化関数がどのような背景で導かれるかについて述べる．

調和合成における一つの困難は，Fourier 級数を有限項で打ち切ることによって生ずる“Gibbs の現象”と呼ばれる振動である．すなわち，Fourier 級数を有限項で打ち切ると不連続点の付近で好ましくない振動が生ずる．十分に滑らかな関数でも両端の関数値や微係数の値が異なるとやはり“Gibbs の現象”が発生する．したがって Fourier 級数を有限項で打ち切ると，特別の場合を除いて，“Gibbs の現象”は常に発生すると言っても過言ではない．

閉区間 $[0,2\pi]$ 上で与えられた実関数 $f(x)$ は十分に滑らかであるとする．ただし，両端における関数値が一致するとは限らない．

$f(x)$ の Fourier 係数,

$$\begin{cases} a_j(f)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}f(x)\cos jx\,dx: 0\leqq j. \\ b_j(f)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}f(x)\sin jx\,dx: 1\leqq j. \end{cases} \tag{2.1}$$

が与えられたとき，その Fourier 級数

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0(f)+\sum_{j=1}^{\infty}\{a_j(f)\cos jx+b_j(f)\sin jx\}. \tag{2.2}$$

の値を閉区間 $[0,2\pi]$ 上の等間隔離散点

$$x=\bar{x}_r=2\pi r/N: 0\leqq r\leqq N\ (N \text{ は偶数}). \tag{2.3}$$

で計算したいとする．以下 $n=N/2$ とする．

このとき多くの場合，(2.2)式を計算する代わりに

$$f_n(\bar{x}_r)=\frac{1}{2}a_0(f)+\sum_{j=1}^{n-1}\{a_j(f)\cos j\bar{x}_r+b_j(f)\sin j\bar{x}_r\}+\frac{1}{2}a_n(f)\cos n\bar{x}_r. \tag{2.4}$$

を実逆 FFT により計算する[1)]．その結果，両端付近で“Gibbs の現象”と呼ばれる振動が発生する．

† On Calculating with Discretization Functions by KAZUO HATANO (Department of Electronics, Faculty of Engineering, Aichi Institute of Technology).

†† 愛知工業大学工学部電子工学科

これを避けるための一つの方法は N を大きくして振動する範囲を狭めることである[1]．もう一つの方法は Lanczos の平滑化法，Fejér 和による平滑化法などを適用することである[2]．すなわち，(2.4)式における係数を調節することにより振動を抑制する．しかし，その代償として立ち上がりが緩慢になるという欠点がある．

$f(x)$ に関して Fourier 係数の他に，両端の高次微係数の差の定数倍

$$\omega_i(f)=\{f^{(i)}(2\pi)-f^{(i)}(0)\}/\pi : 0\leqq i\leqq 2m-1. \tag{2.5}$$

が与えられるとする．このとき以下のようにすれば "Gibbs の現象" が生じないようにすることができる．

(2.2)式に $x=\bar{x}_r$ を代入し三角関数の周期性，対称性を使うと

$$f(\bar{x}_r)=\frac{1}{2}\bar{u}_0(f)+\sum_{j=1}^{n-1}\{\bar{u}_j(f)\cos j\bar{x}_r+\bar{v}_j(f)\sin j\bar{x}_r\}+\frac{1}{2}\bar{u}_n(f)\cos n\bar{x}_r. \tag{2.6}$$

$$\begin{cases}\bar{u}_j(f)=a_j(f)+\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\{a_{kN+j}(f)+a_{kN-j}(f)\}.\\ \bar{v}_j(f)=b_j(f)+\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\{b_{kN+j}(f)-b_{kN-j}(f)\}.\end{cases} \tag{2.7}$$

を得ることができる (Aliasing の式)[2]．

次に(2.1)式に部分積分を反復適用すると Fourier 係数は

$$\begin{cases}a_j(f)=\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\frac{(-1)^{i-1}}{j^{2i}}\omega_{2i-1}(f)+\frac{(-1)^{m+1}}{\pi j^{2m+1}}\int_0^{2\pi}f^{(2m+1)}(t)\sin jt dt.\\ b_j(f)=\displaystyle\sum_{i=0}^{m-1}\frac{(-1)^{i-1}}{j^{2i+1}}\omega_{2i}(f)+\frac{(-1)^{m+1}}{\pi j^{2m+1}}\int_0^{2\pi}f^{(2m+1)}(t)(1-\cos jt)dt.\end{cases} \tag{2.8}$$

と書き改められる (Fourier 係数の漸近展開式)[3),4]．これを(2.7)式に代入し

$$\begin{cases}\bar{\delta}_i(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{(k+x)^i}+\frac{(-1)^i}{(k-x)^i}\right\}.\\ \bar{\tau}_i(x)=1/x^i+\bar{\delta}_i(x).\end{cases} \tag{2.9}$$

とおくと，

$$\begin{cases}\bar{u}_j(f)=a_j(f)+\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\frac{(-1)^{i-1}}{N^{2i}}\bar{\delta}_{2i}\left(\frac{j}{N}\right)\omega_{2i-1}(f)+O(N^{-2m-1}).\\ \bar{v}_j(f)=b_j(f)+\displaystyle\sum_{i=0}^{m-1}\frac{(-1)^{i-1}}{N^{2i+1}}\bar{\delta}_{2i+1}\left(\frac{j}{N}\right)\omega_{2i}(f)+O(N^{-2m-1}).\end{cases} \tag{2.10}$$

$$\begin{cases}\bar{u}_j(f)=\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\frac{(-1)^{i-1}}{N^{2i}}\bar{\tau}_{2i}\left(\frac{j}{N}\right)\omega_{2i-1}(f)+O(j^{-2m-1}).\\ \bar{v}_j(f)=\displaystyle\sum_{i=0}^{m-1}\frac{(-1)^{i-1}}{N^{2i+1}}\bar{\tau}_{2i+1}\left(\frac{j}{N}\right)\omega_{2i}(f)+O(j^{-2m-1}).\end{cases} \tag{2.11}$$

となる．(2.10)式は(2.8)式を(2.7)式の右辺第二項に適用して得られる．また，(2.11)式は(2.8)式を(2.7)式の右辺第一，二項に適用して得られる．

(2.10)式により $\bar{u}_j(f)$, $\bar{v}_j(f)$ を計算して(2.6)式に代入し，それを実逆 FFT により計算すれば(2.2)式を $O(N^{-2m})$ 程度の誤差で計算できる．"Gibbs の現象" と呼ばれる振動は $O(N^0)$，すなわち N をどんなに大きくしても振幅はある値より小さくはならない．したがって，上に述べたようにして計算すれば実用上 "Gibbs の現象" は全く発生しないと言ってよい．

三角関数の選点直交性を使うと(2.6)式から

$$\begin{cases}\bar{u}_j(f)=\dfrac{2}{N}\left\{\dfrac{1}{2}f(0)+\displaystyle\sum_{r=1}^{N-1}f(\bar{x}_r)\cos j\bar{x}_r+\frac{1}{2}f(2\pi)\right\}.\\ \bar{v}_j(f)=\dfrac{2}{N}\displaystyle\sum_{r=1}^{N-1}f(\bar{x}_r)\sin j\bar{x}_r.\end{cases} \tag{2.12}$$

となる．すなわち $\bar{u}_j(f)$, $\bar{v}_j(f)$ は台形則による離散 Fourier 係数である．

(2.11)式は大きな j に対する離散 Fourier 係数がどのように変化するかを示している．

上で導入された関数 $\bar{\delta}_i(x)$, $\bar{\tau}_i(x)$ は等間隔離散点上での Fourier 級数の値をどのようにして計算するかを考察する過程で導かれた関数である．この意味で，これらの関数を "離散化関数" と呼ぶ．

以上は台形則による離散 Fourier 係数に関連して得られた関数である．同じように，中点則による離散 Fourier 係数に関連して類似した関数が得られる．

$$\hat{x}_r=\bar{x}_r+\frac{\pi}{N}=\frac{2\pi}{N}\left(r+\frac{1}{2}\right) : 0\leqq r\leqq N-1. \tag{2.13}$$

とする．これを(2.2)式に代入し三角関数の周期性，対称性を使うと

$$f(\hat{x}_r)=\frac{1}{2}\hat{u}_0(f)+\sum_{j=1}^{n-1}\{\hat{u}_j(f)\cos j\hat{x}_r+\hat{v}_j(f)\sin j\hat{x}_r\}$$

$$+\frac{1}{2}\hat{v}_n(f)\sin n\hat{x}_r. \tag{2.14}$$

$$\begin{cases} \hat{u}_j(f)=a_j(f)+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\{a_{kN+j}(f) \\ \qquad\qquad +a_{kN-j}(f)\}. \\ \hat{v}_j(f)=b_j(f)+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\{b_{kN+j}(f) \\ \qquad\qquad -b_{kN-j}(f)\}. \end{cases} \tag{2.15}$$

を得ることができる．上式に(2.8)式を適用し

$$\begin{cases} \hat{\delta}_i(x)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left\{\frac{1}{(k+x)^i}+\frac{(-1)^i}{(k-x)^i}\right\}. \\ \hat{\tau}_i(x)=1/x^i+\hat{\delta}_i(x). \end{cases} \tag{2.16}$$

とおくと

$$\begin{cases} \hat{u}_j(f)=a_j(f)+\sum_{i=1}^{m}\frac{(-1)^{i-1}}{N^{2i}}\hat{\delta}_{2i}\left(\frac{j}{N}\right)\omega_{2i-1}(f) \\ \qquad +O(N^{-2m-1}). \\ \hat{v}_j(f)=b_j(f)+\sum_{i=0}^{m-1}\frac{(-1)^{i-1}}{N^{2i+1}}\hat{\delta}_{2i+1}\left(\frac{j}{N}\right)\omega_{2i}(f) \\ \qquad +O(N^{-2m-1}). \end{cases} \tag{2.17}$$

$$\begin{cases} \hat{u}_j(f)=\sum_{i=1}^{m}\frac{(-1)^{i-1}}{N^{2i}}\hat{\tau}_{2i}\left(\frac{j}{N}\right)\omega_{2i-1}(f) \\ \qquad +O(j^{-2m-1}). \\ \hat{v}_j(f)=\sum_{i=0}^{m-1}\frac{(-1)^{i-1}}{N^{2i+1}}\hat{\tau}_{2i+1}\left(\frac{j}{N}\right)\omega_{2i}(f) \\ \qquad +O(j^{-2m-1}). \end{cases} \tag{2.18}$$

となる．

次に三角関数の選点直交性を使うと，(2.14)式から

$$\begin{cases} \hat{u}_j(f)=\frac{2}{N}\sum_{r=0}^{N-1}f(\hat{x}_r)\cos j\hat{x}_r: 0\leqq j\leqq N/2-1. \\ \hat{v}_j(f)=\frac{2}{N}\sum_{r=0}^{N-1}f(\hat{x}_r)\sin j\hat{x}_r: 1\leqq j\leqq N/2. \end{cases} \tag{2.19}$$

となる．すなわち，$\hat{u}_j(f), \hat{v}_j(f)$ は中点則による離散 Fourier 係数である．

以下では，$\hat{\delta}_i(x)$, $\hat{\tau}_i(x)$ をも“離散化関数”と呼ぶことにする．

(2.10)式は台形則による離散 Fourier 係数と Fourier 係数との間に成立する極めて実用的な関係を与えている．すなわち，実 FFT により得られた離散 Fourier 係数を(2.10)式により補正すれば Fourier 係数の高精度の値を求めることができるはずである．同じように(2.17)式は中点則による離散 Fourier 係数と Fourier 係数との間に成立する重要な関係を与えている．

離散化関数を効率的に計算できれば上に述べたように“Gibbs の現象”を生じない調和合成が可能となり，また Fourier 係数の高精度の値を得る可能性が出てくる．この意味で離散化関数は実用上極めて重要な関数である．

3. 離散化関数の性質

本章では離散化関数

$$\bar{\delta}_i(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{(k+x)^i}+\frac{(-1)^i}{(k-x)^i}\right\}. \tag{3.1}$$

$$\bar{\tau}_i(x)=1/x^i+\bar{\delta}_i(x). \tag{3.2}$$

$$\hat{\delta}_i(x)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left\{\frac{1}{(k+x)^i}+\frac{(-1)^i}{(k-x)^i}\right\}. \tag{3.3}$$

$$\hat{\tau}_i(x)=1/x^i+\hat{\delta}_i(x). \tag{3.4}$$

についてのいくつかの性質を述べる．これらの四つの関数には共通する性質が多いので，議論の容易のために四つの関数を総称して $\Delta_i(x)$ と書く．また，しばしば $\Delta_i(x)$ を i 次の離散化関数と呼ぶ．

離散化関数についての最も重要な性質は，それらが

$$\Delta_i'(x)=-i\cdot\Delta_{i+1}(x). \tag{3.5}$$

なる漸化式を満足することである．すなわち，離散化関数の導関数は1次上の離散化関数の定数倍になる．また，この式から

$$\Delta_{i+1}(x)=-\frac{1}{i}\Delta_i'(x). \tag{3.6}$$

が成り立つ．この関係式から，1次上の離散化関数を容易に導くことができる．

離散化関数についての，次に重要な性質は1次の離散化関数が三角関数の部分分数展開になっていることである．すなわち，

$$\bar{\delta}_1(x)=\pi\cot\pi x-\frac{1}{x}. \tag{3.7}$$

$$\bar{\tau}_1(x)=\pi\cot\pi x. \tag{3.8}$$

$$\hat{\delta}_1(x)=\pi\,\mathrm{cosec}\,\pi x-\frac{1}{x}. \tag{3.9}$$

$$\hat{\tau}_1(x)=\pi\,\mathrm{cosec}\,\pi x. \tag{3.10}$$

である[10]．これから次の級数展開式が得られる[10]．

$$\bar{\delta}_1(x)=-2\sum_{r=1}^{\infty}\zeta(2r)x^{2r-1}. \tag{3.11}$$

$$\hat{\delta}_1(x)=2\sum_{r=1}^{\infty}\eta(2r)x^{2r-1}. \tag{3.12}$$

ただし，ここで，

$$\zeta(r)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^r}. \tag{3.13}$$

は Riemann の Zeta 関数であり

$$\eta(r)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(k+1)^r}=\frac{1}{2^r}\left\{\zeta\left(r\,;\,\frac{1}{2}\right)-\zeta(r)\right\}. \tag{3.14}$$

で

$$\zeta(r\,;\,x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+x)^r}. \tag{3.15}$$

は一般化された Riemann の Zeta 関数である．また，後ではしばしば $\eta(r)$ を一般化した関数

$$\eta(r\,;\,x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(k+x)^r}=\frac{1}{2^r}\left\{\zeta\left(r\,;\,\frac{x}{2}\right)-\zeta\left(r\,;\,\frac{x+1}{2}\right)\right\}. \tag{3.16}$$

を使う．

次に(3.6)式を反復して適用すると

$$\begin{cases}\Delta_{2i+1}(x)=\dfrac{1}{(2i)!}\Delta_1^{(2i)}(x).\\[2mm] \Delta_{2i}(x)=-\dfrac{1}{(2i-1)!}\Delta_1^{(2i-1)}(x).\end{cases} \tag{3.17}$$

を導くことができる．

この式と(3.11)，(3.12)式とから離散化関数の級数展開式

$$\begin{cases}\bar{\delta}_{2i+1}(x)=-2\displaystyle\sum_{r=i+1}^{\infty}\binom{2r-1}{2i}\zeta(2r)x^{2r-2i-1}.\\ \bar{\delta}_{2i}(x)=2\displaystyle\sum_{r=i}^{\infty}\binom{2r-1}{2i-1}\zeta(2r)x^{2r-2i}.\end{cases} \tag{3.18}$$

$$\begin{cases}\hat{\delta}_{2i+1}(x)=2\displaystyle\sum_{r=i+1}^{\infty}\binom{2r-1}{2i}\eta(2r)x^{2r-2i-1}.\\ \hat{\delta}_{2i}(x)=-2\displaystyle\sum_{r=i}^{\infty}\binom{2r-1}{2i-1}\eta(2r)x^{2r-2i}.\end{cases} \tag{3.19}$$

を得ることができる．

次に離散化関数の $x=0, x=1/2$ における値を列挙する．

$$\begin{cases}\bar{\delta}_{2i+1}(0)=0 \qquad (x=0 \text{ は 1 次の零}).\\ \bar{\delta}_{2i+1}\left(\dfrac{1}{2}\right)=-2^{2i+1}.\\ \bar{\delta}_{2i}(0)=2\zeta(2i)\fallingdotseq 2.\\ \bar{\delta}_{2i}\left(\dfrac{1}{2}\right)=2^{2i}+2\zeta\left(2i\,;\,\dfrac{3}{2}\right)\fallingdotseq 2^{2i}.\\ \bar{\tau}_{2i+1}(0)=\infty \qquad (x=0 \text{ は } 2i+1 \text{ 位の極}).\\ \bar{\tau}_{2i+1}\left(\dfrac{1}{2}\right)=0 \qquad \left(x=\dfrac{1}{2} \text{ は 1 次の零}\right).\\ \bar{\tau}_{2i}(0)=\infty \qquad (x=0 \text{ は } 2i \text{ 位の極}).\\ \bar{\tau}_{2i}\left(\dfrac{1}{2}\right)=2\zeta\left(2i\,;\,\dfrac{1}{2}\right)\fallingdotseq 2^{2i+1}.\\ \hat{\delta}_{2i+1}(0)=0 \qquad (x=0 \text{ は 1 次の零}).\\ \hat{\delta}_{2i+1}\left(\dfrac{1}{2}\right)=2^{2i+1}-2\eta\left(2i+1\,;\,\dfrac{3}{2}\right)\fallingdotseq 2^{2i+1}.\\ \hat{\delta}_{2i}(0)=-2\eta(2i)\fallingdotseq -2.\\ \hat{\delta}_{2i}\left(\dfrac{1}{2}\right)=-2^{2i}.\\ \hat{\tau}_{2i+1}(0)=\infty \qquad (x=0 \text{ は } 2i+1 \text{ 位の極}).\\ \hat{\tau}_{2i+1}\left(\dfrac{1}{2}\right)=2\eta\left(2i+1\,;\,\dfrac{1}{2}\right)\fallingdotseq 2^{2i+2}.\\ \hat{\tau}_{2i}(0)=\infty \qquad (x=0 \text{ は } 2i \text{ 位の極}).\\ \hat{\tau}_{2i}\left(\dfrac{1}{2}\right)=0 \qquad \left(x=\dfrac{1}{2} \text{ は 1 次の零}\right).\end{cases} \tag{3.20}$$

である．

次に(3.2)，(3.4)式から

$$\lim_{x\to 0}x^i\bar{\tau}_i(x)=\lim_{x\to 0}x^i\hat{\tau}_i(x)=1. \tag{3.21}$$

である．また，(3.5)式と(3.20)式とから

$$\begin{cases}\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\bar{\delta}_{2i+1}(x)=-(2i+1)\bar{\delta}_{2i+2}(0)\\ \qquad\fallingdotseq -(2i+1)\cdot 2.\\ \displaystyle\lim_{x\to 1/2}\frac{1}{x-1/2}\bar{\tau}_{2i+1}(x)=-(2i+1)\bar{\tau}_{2i+2}\left(\frac{1}{2}\right)\\ \qquad\fallingdotseq -(2i+1)\cdot 2^{2i+3}.\\ \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\hat{\delta}_{2i+1}(x)=-(2i+1)\hat{\delta}_{2i+2}(0)\\ \qquad\fallingdotseq (2i+1)\cdot 2.\\ \displaystyle\lim_{x\to 1/2}\frac{1}{x-1/2}\hat{\tau}_{2i}(x)=-(2i)\hat{\tau}_{2i+1}\left(\frac{1}{2}\right)\\ \qquad\fallingdotseq -(2i)\cdot 2^{2i+2}.\end{cases} \tag{3.22}$$

を得ることができる．

級数展開式，(3.18)，(3.19)式は簡潔ではあるが，次数が高くなると極めて収束が遅くなる．この難点を避けるために(3.1)式などで，小さい k に対しては有理式のままとし，大きい k に対してのみ整級数の形にすると以下に述べるように収束の早い級数を得ることができる．

さて

$$g_i(x)=\frac{1}{(k+x)^i}+\frac{(-1)^i}{(k-x)^i}. \tag{3.23}$$

とおく．この式は，漸化式，(3.5)，(3.6)式を満足する．

$$\frac{1}{k-x}=\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{1-x/k}=\frac{1}{k}\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{x}{k}\right)^r. \tag{3.24}$$

などを使うと

$$g_1(x)=-\frac{2}{k}\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{x}{k}\right)^{2r+1}. \tag{3.25}$$

を得ることができる．この式と，(3.17)式とから

$$\begin{cases} g_{2i+1}(x)=-2\sum_{r=i+1}^{\infty}\binom{2r-1}{2i}\frac{1}{k^{2r}}x^{2r-2i-1}. \\ g_{2i}(x)=2\sum_{r=i}^{\infty}\binom{2r-1}{2i-1}\frac{1}{k^{2r}}x^{2r-2i}. \end{cases} \tag{3.26}$$

となる．また，(3.23)式において，$x=0$ が $g_{2i+1}(x)$ の1次の零点であることを容易に知ることができるので，(3.23)式の右辺から因数，x をくくりだすと，

$$g_{2i+1}(x)=\frac{(-2x)}{(k^2-x^2)(k-x)^{2i}}\sum_{r=0}^{2i}\left(\frac{k-x}{k+x}\right)^r. \tag{3.27}$$

となる．(3.27)式と(3.26)式とを，それぞれ(3.1)式の最初の第 $K-1$ 項までと，第 K 項以降に使うと，

$$\begin{cases} \bar{\delta}_{2i+1}(x) \\ \quad =-2x\left\{\sum_{k=1}^{K-1}\frac{1}{(k^2-x^2)(k-x)^{2i}}\sum_{r=0}^{2i}\left(\frac{k-x}{k+x}\right)^r \right. \\ \qquad \left. +\sum_{r=i+1}^{\infty}\binom{2r-1}{2i}\zeta(2r\,;\,K)x^{2r-2i-2}\right\}. \\ \bar{\delta}_{2i}(x)=\sum_{k=1}^{K-1}\left\{\frac{1}{(k+x)^{2i}}+\frac{1}{(k-x)^{2i}}\right\} \\ \qquad +2\sum_{r=i}^{\infty}\binom{2r-1}{2i-1}\zeta(2r\,;\,K)x^{2r-2i}. \end{cases} \tag{3.28}$$

となる．全く同じようにして，

$$\begin{cases} \hat{\delta}_{2i+1}(x) \\ \quad =-2x\left\{\sum_{k=1}^{K-1}\frac{(-1)^k}{(k^2-x^2)(k-x)^{2i}}\sum_{r=0}^{2i}\left(\frac{k-x}{k+x}\right)^r \right. \\ \qquad \left. +(-1)^K\sum_{r=i+1}^{\infty}\binom{2r-1}{2i}\eta(2r\,;\,K)x^{2r-2i-2}\right\}. \\ \hat{\delta}_{2i}(x)=\sum_{k=1}^{K-1}(-1)^k\left\{\frac{1}{(k+x)^{2i}}+\frac{1}{(k-x)^{2i}}\right\} \\ \qquad +2(-1)^K\sum_{r=i}^{\infty}\binom{2r-1}{2i-1}\eta(2r\,;\,K)x^{2r-2i}. \end{cases} \tag{3.29}$$

を得ることができる．

次に，$y=1/2-x$ とおくと

$$\begin{cases} \bar{\tau}_i(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{(k+1/2-y)^i}+\frac{(-1)^i}{(k+1/2+y)^i}\right\}. \\ \hat{\tau}_i(x) \\ \quad =\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left\{\frac{1}{(k+1/2-y)^i}+\frac{(-1)^{i+1}}{(k+1/2+y)^i}\right\}. \end{cases} \tag{3.30}$$

となる．このことを使うと

$$\begin{cases} \bar{\tau}_{2i+1}(x)=(1-2x)\left\{\sum_{k=0}^{K-1}\frac{1}{(k+1-x)(k+x)^{2i+1}} \right. \\ \qquad \cdot\sum_{r=0}^{2i}\left(\frac{k+x}{k+1-x}\right)^r \\ \qquad +\sum_{r=i+1}^{\infty}\binom{2r-1}{2i}\zeta\left(2r\,;\,K+\frac{1}{2}\right) \\ \qquad \left.\cdot\left(\frac{1}{2}-x\right)^{2r-2i-2}\right\}. \\ \bar{\tau}_{2i}(x)=\sum_{k=0}^{K-1}\left\{\frac{1}{(k+x)^{2i}}+\frac{1}{(k+1-x)^{2i}}\right\} \\ \qquad +2\sum_{r=i}^{\infty}\binom{2r-1}{2i-1}\zeta\left(2r\,;\,K+\frac{1}{2}\right) \\ \qquad \cdot\left(\frac{1}{2}-x\right)^{2r-2i}. \end{cases} \tag{3.31}$$

$$\begin{cases} \hat{\tau}_{2i+1}(x)=\sum_{k=0}^{K-1}(-1)^k\left\{\frac{1}{(k+x)^{2i+1}} \right. \\ \qquad \left. +\frac{1}{(k+1-x)^{2i+1}}\right\} \\ \qquad +2(-1)^K\sum_{r=i}^{\infty}\binom{2r}{2i} \\ \qquad \cdot\eta\left(2r+1\,;\,K+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-x\right)^{2r-2i}. \\ \hat{\tau}_{2i}(x)=(1-2x)\left\{\sum_{k=0}^{K-1}\frac{(-1)^k}{(k+1-x)(k+x)^{2i}} \right. \\ \qquad \cdot\sum_{r=0}^{2i-1}\left(\frac{k+x}{k+1-x}\right)^r \\ \qquad +(-1)^K\sum_{r=i}^{\infty}\binom{2r}{2i-1} \\ \qquad \left.\cdot\eta\left(2r+1\,;\,K+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-x\right)^{2r-2i}\right\}. \end{cases} \tag{3.32}$$

を得ることができる．これらの式の級数部は K を適当にとれば収束は早い．

最後に離散化関数の重要な性質としてそれらがすべて初等関数で表されることについて述べる．(3.6)～(3.10)式から離散化関数 $\Delta_i(x)$ の具体的な形を次々に導くことができる．

$\bar{\tau}_i(x)$ について，たとえば文献 11)，p. 67 に

$$\begin{cases} \bar{\tau}_2(x)=\pi^2\operatorname{cosec}^2\pi x. \\ \bar{\tau}_3(x)=\pi^3\cot\pi x\cdot\operatorname{cosec}^2\pi x. \\ \bar{\tau}_4(x)=\pi^4\left(\operatorname{cosec}^2\pi x-\frac{2}{3}\right)\operatorname{cosec}^2\pi x. \end{cases} \tag{3.33}$$

等が与えられている．より高い次数の $\bar{\tau}_i(x)$ についてもその具体的な形を求めることは容易であり，それらを使って $\bar{\tau}_i(x)$ を数値的に安定に計算することができる．なお，(3.33)式で $\bar{\tau}_4(x)$ の式に減算が含まれているが次章で述べるように減算を含まない形の式を導く

ことが可能である．このことは $\hat{\tau}_i(x)$ についても同じである．

他方，$\bar{\delta}_i(x)$, $\hat{\delta}_i(x)$ も初等関数で表現できる．しかしそのままの形では数値的に不安定で実際の計算には使えない．たとえば，

$$\bar{\delta}_4(x)=\pi^4\left(\operatorname{cosec}^2\pi x-\frac{2}{3}\right)\operatorname{cosec}^2\pi x-\frac{1}{x^4}$$
$$=\frac{3\left\{1-\left(\dfrac{\sin\pi x}{\pi x}\right)^4\right\}-2\cdot\sin^2\pi x}{3\cdot x^4\cdot\left(\dfrac{\sin\pi x}{\pi x}\right)^4}. \qquad (3.34)$$

である．$x=0$ は上式分子の4次の零である．したがって $x=0$ の付近で上式を使うと桁落ちのためによい結果を得ることができない．この不都合を避けるためには，(3.34)式の分子から x^4 の因子をくくりだし分母の x^4 を相殺して数値的に安定な形にする必要がある．

次章で，この手順を組織的に行って $\bar{\delta}_i(x),\hat{\delta}_i(x)$ を数値的に安定に計算する方法について述べる．

4. 離散化関数の計算法

本章ではまず，$\bar{\tau}_i(x)$ および $\hat{\tau}_i(x)$ の計算法について述べ次に，$\bar{\delta}_i(x)$ および $\hat{\delta}_i(x)$ の計算法について述べる．

さて，

$$\begin{cases}\bar{\tau}_1(x)=\pi\cot\pi x=\dfrac{\pi}{\sin\pi x}\cdot\cos\pi x.\\ \bar{\tau}_2(x)=\pi^2\operatorname{cosec}^2\pi x=\left(\dfrac{\pi}{\sin\pi x}\right)^2.\end{cases} \qquad (4.1)$$

に漸化式(3.6)を適用してゆくと $\bar{\tau}_i(x)$ が一般に次の形になることがわかる：

$$\begin{cases}\bar{\tau}_{2i}(x)=\left(\dfrac{\pi}{\sin\pi x}\right)^{2i}\dfrac{1}{(2i-1)!}\cdot\displaystyle\sum_{j=0}^{i-1}\bar{c}_{2i,2j}\cdot\cos^{2j}\pi x\\ \qquad :\ i=1,2,\cdots. \qquad (4.2)\\ \bar{\tau}_{2i+1}(x)=\left(\dfrac{\pi}{\sin\pi x}\right)^{2i+1}\dfrac{1}{(2i)!}\\ \qquad \cdot\displaystyle\sum_{j=0}^{i-1}\bar{c}_{2i+1,2j+1}\cdot\cos^{2j+1}\pi x \qquad (4.3)\\ \qquad :\ i=1,2,\cdots.\end{cases}$$

ここで，

$$\bar{c}_{2,0}=1. \qquad (4.4)$$

であり

$$\bar{c}_{2i+1,2j+1}=\begin{cases}(2i-2j)\cdot\bar{c}_{2i,2j}+(2j+2)\cdot\bar{c}_{2i,2j+2}\\ \qquad :\ j=0,1,\cdots,i-2.\\ 2\cdot\bar{c}_{2i,2i-2}:\ j=i-1.\end{cases}$$
$$:\ i=1,2,\cdots. \qquad (4.5)$$

$$\bar{c}_{2i,2j}=\begin{cases}\bar{c}_{2i-1,1} & :\ j=0.\\ (2i-2j)\cdot\bar{c}_{2i-1,2j-1}\\ \quad+(2j+1)\cdot\bar{c}_{2i-1,2j+1}\\ & :\ j=1,2,\cdots,i-2.\\ 2\cdot\bar{c}_{2i-1,2i-3} & :\ j=i-1.\end{cases}$$
$$:\ i=2,3,\cdots. \qquad (4.6)$$

である．(4.4)～(4.6)式を使って(4.2)，(4.3)式における係数 $\bar{c}_{i,j}$ を次々に求めていくことができる．また，(4.4)～(4.6)式から直ちにわかるように係数 $\bar{c}_{i,j}$ はすべて正の整数である．したがって(4.2)，(4.3)式により $\bar{\tau}_i(x)$ を数値的に極めて安定に計算することができる．

$\hat{\tau}_i(x)$ についても同じような式を導くことができる．すなわち，

$$\begin{cases}\hat{\tau}_1(x)=\pi\operatorname{cosec}\pi x=\dfrac{\pi}{\sin\pi x}.\\ \hat{\tau}_2(x)=\pi^2\cot\pi x\cdot\operatorname{cosec}\pi x=\left(\dfrac{\pi}{\sin\pi x}\right)^2\cdot\cos\pi x.\end{cases} \qquad (4.7)$$

に漸化式(3.6)を適用してゆくと $\hat{\tau}_i(x)$ が一般に次の形になることがわかる．

$$\begin{cases}\hat{\tau}_{2i+1}(x)=\left(\dfrac{\pi}{\sin\pi x}\right)^{2i+1}\dfrac{1}{(2i)!}\cdot\displaystyle\sum_{j=0}^{i}\hat{c}_{2i+1,2j}\\ \qquad\qquad \cdot\cos^{2j}\pi x \qquad (4.8)\\ \qquad :\ i=1,2,\cdots.\\ \hat{\tau}_{2i}(x)=\left(\dfrac{\pi}{\sin\pi x}\right)^{2i}\dfrac{1}{(2i-1)!}\cdot\displaystyle\sum_{j=0}^{i-1}\hat{c}_{2i,2j+1}\\ \qquad\qquad \cdot\cos^{2j+1}\pi x \qquad (4.9)\\ \qquad :\ i=2,3,\cdots.\end{cases}$$

ここで，

$$\hat{c}_{2,1}=1. \qquad (4.10)$$

であり

$$\hat{c}_{2i+1,2j}=\begin{cases}\hat{c}_{2i,1} & :\ j=0.\\ (2i-2j+1)\cdot\hat{c}_{2i,2j-1}\\ \quad+(2j+1)\cdot\hat{c}_{2i,2j+1}\\ & :\ j=1,2,\cdots,i-1.\\ \hat{c}_{2i,2i-1} & :\ j=i\end{cases}$$
$$:\ i=1,2,\cdots. \qquad (4.11)$$

$$\hat{c}_{2i,2j+1}=\begin{cases}(2i-2j-1)\cdot\hat{c}_{2i-1,2j}\\ \quad+(2j+2)\cdot\hat{c}_{2i-1,2j+2}\\ & :\ j=0,1,\cdots,i-2.\\ \hat{c}_{2i-1,2i-2} & :\ j=i-1.\end{cases}$$
$$:\ i=2,3,\cdots. \qquad (4.12)$$

である．(4.10)～(4.12)式を使って(4.8)，(4.9)式における係数 $\hat{c}_{i,j}$ を次々に求めていくことができる．また，(4.10)～(4.12)式からわかるように係数 $\hat{c}_{i,j}$ はす

べて正の整数になる．したがって(4.8)，(4.9)式により $\hat{\tau}_i(x)$ を数値的に極めて安定に計算することができる．

以上のように $\bar{\tau}_i(x), \hat{\tau}_i(x)$ の計算については特別の困難はない．

次に $\bar{\delta}_i(x), \hat{\delta}_i(x)$ の計算法についてであるが，これらを数値的に安定に計算することは容易ではない．

(3.1)，(3.3)式からわかるように，$\bar{\delta}_i(x)$，$\hat{\delta}_i(x)$ はそれぞれ $\bar{\tau}_i(x), \hat{\tau}_i(x)$ から $1/x^i$ を引くことにより得られる．したがって特別な問題はないように思われるが実際にはそのようにして計算すると $x=0$ の付近で大幅な桁落ちを生ずる．そこで，ここではこの困難を次のようにして解決する．

前章で離散化関数の性質をいくつか述べた．そこで述べた性質からわかるように，$\bar{\delta}_i(x), \hat{\delta}_i(x)$ を

$$\begin{cases} \bar{\delta}_{2i+1}(x) = -x\cdot\dfrac{P_{2i+1}(x)}{Q_{2i+1}(x)}. \\ \bar{\delta}_{2i}(x) = \dfrac{P_{2i}(x)}{Q_{2i}(x)}. \end{cases} \tag{4.13}$$

$$\begin{cases} \hat{\delta}_{2i+1}(x) = x\cdot\dfrac{U_{2i+1}(x)}{Q_{2i+1}(x)}. \\ \hat{\delta}_{2i}(x) = -\dfrac{U_{2i}(x)}{Q_{2i}(x)}. \end{cases} \tag{4.14}$$

の形に書くと $P_i(x)$, $Q_i(x)$, $U_i(x)$ を閉区間 $[0, 1/2]$ において零点を持たない整級数で，しかも偶関数となるようにすることができる．以下ではこのような級数の展開係数を求める手順を述べる．

まず，(3.7)式から

$$Q_1(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \pi^{2r}}{(2r+1)!} x^{2r}. \tag{4.15}$$

$$P_1(x) = \frac{\pi x \cos \pi x - \sin \pi x}{(-x)\cdot \pi x^2} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \pi^{2r+2}}{(2r+1)!(2r+3)} x^{2r}. \tag{4.16}$$

と選ぶことができる．$Q_1(x)$ をこのように選ぶと(3.9)式から

$$U_1(x) = \frac{\pi x - \sin \pi x}{x\cdot \pi x^2} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \pi^{2r+2}}{(2r+3)!} x^{2r}. \tag{4.17}$$

となる．これらは，いずれも偶数次の項だけからなる整級数である．

次に離散化関数が漸化式，(3.6)式を満たすことを使って $P_i(x)$ の級数展開式を導く．

(4.13)式において，分母あるいは分子のいずれかを勝手に選ぶことができる．$\bar{\delta}_1(x)$ を(4.13)式の形に書き，漸化式，(3.6)式を適用して，得られた $\bar{\delta}_2(x)$ を(4.13)式の形に書く．このとき，分母を $Q_2(x)=\{Q_1(x)\}^2$ とすると，最も簡潔な形になる．さらに，得られた $\bar{\delta}_2(x)$ に漸化式，(3.6)式を適用して得られた $\bar{\delta}_3(x)$ を(4.13)式の形に書く．このときも $Q_3(x)=\{Q_1(x)\}^3$ とすると，$\bar{\delta}_3(x)$ は最も簡潔な形になる．一般に，

$$Q_i(x) = \{Q_1(x)\}^i. \tag{4.18}$$

として差し支えないのでそのようにする．さて

$$\bar{\delta}_{2i+1}(x) = -x\cdot\frac{P_{2i+1}(x)}{Q_{2i+1}(x)} = -\frac{1}{2i}\cdot\frac{d}{dx}\left[\frac{P_{2i}(x)}{\{Q_1(x)\}^{2i}}\right]. \tag{4.19}$$

より

$$P_{2i+1}(x) = \frac{1}{x}\left\{\frac{1}{2i}P_{2i}'(x)Q_1(x) - P_{2i}(x)Q_1'(x)\right\}. \tag{4.20}$$

となる．同じようにして

$$P_{2i}(x) = \frac{1}{2i-1}\{P_{2i-1}(x)Q_1(x) + xP_{2i-1}'(x)Q_1(x) - x(2i-1)P_{2i-1}(x)Q_1'(x)\}. \tag{4.21}$$

を得ることができる．さらに $U_i(x)$ についても同じようにしてその級数展開式を導くことができる．すなわち

$$U_{2i+1}(x) = \frac{1}{x}\left\{\frac{1}{2i}U_{2i}'(x)Q_1(x) - U_{2i}(x)Q_1'(x)\right\}. \tag{4.22}$$

$$U_{2i}(x) = \frac{1}{2i-1}\{U_{2i-1}(x)Q_1(x) + xU_{2i-1}'(x)Q_1(x) - x(2i-1)U_{2i-1}(x)Q_1'(x)\}. \tag{4.23}$$

となる．これらの式を使って $P_i(x)$, $U_i(x)$ の級数展開の係数を次々に求めてゆくことができる．

次に $P_i(x)$ の展開係数を得るための具体的な式を示す．その際，実用上の見地から 12 次の離散化関数までに議論を限定する．

$\bar{\delta}_i(x)$ に関連した式，(4.21)式において

$$Q_1(x) = \sum_{r=0}^{\infty} b_r x^{2r}. \tag{4.24}$$

$$P_{2i-1}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{2r}, \quad P_{2i}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} c_r x^{2r}. \tag{4.25}$$

とおくと

$$c_r = \sum_{j=0}^{r} a_j b_{r-j}\left\{\frac{2j+1}{2i-1} - 2(r-j)\right\}. \tag{4.26}$$

となる．同じように(4.20)式において

$$P_{2i}(x)=\sum_{r=0}^{\infty}a_r x^{2r},\quad P_{2i+1}(x)=\sum_{r=0}^{\infty}c_r x^{2r}. \tag{4.27}$$

とおくと

$$c_r=\sum_{j=0}^{r}2(j+1)\left(\frac{1}{2i}a_{j+1}b_{r-j}-b_{j+1}a_{r-j}\right). \tag{4.28}$$

となる．

$\hat{\delta}_i(x)$ に関連した式 $U_i(x)$ についても同じようにして展開係数を得るための式を導くことができる．

展開係数を得るための計算は激しい桁落ちを伴う計算になるので相当桁数の多い多倍長計算を実行しなければならない．また，なるべく少ない項数で所用の精度を得るために，上のようにして得られた展開係数をもとにして Tchebycheff 展開式を得るのがよい．すなわち

$$T_0(x)=1,\quad T_1(x)=x,$$
$$T_{j+1}(x)=2xT_j(x)-T_{j-1}(x):\ j=1,2,\cdots. \tag{4.29}$$

により生成される Tchebycheff 多項式を使って，たとえば $Q_1(x)$ を

$$Q_1(x)=\sum_{r=0}^{\infty}d_r T_r(8x^2-1). \tag{4.30}$$

の形にするのである．

一方，この形の式にするとき，たとえば $Q_1(x)$ などの絶対値が大きく変化すると (4.30) 式の計算において桁落ちを生ずる．したがってその危険性があるときには若干の工夫が必要である．そこで $Q_1(x)$ などの $x=0$ および $x=1/2$ における値を吟味する．ここに現れる関数はいずれも定符号で単調な変化をする関数ばかりであるから両端の値が大きく異ならなければ変動は小さいと考えてよい．

まず，(4.15) 式から

$$Q_1(0)=1,\quad Q_1(1/2)=2/\pi. \tag{4.31}$$

である．このように $Q_1(x)$ は絶対値の変動が小さい．

次に (4.19)，(4.18)，(3.22)，(3.20) 式から $\bar{\delta}_i(x)$ に関して

$$\begin{cases}P_{2i+1}(0)=2(2i+1)\zeta(2i+2)\fallingdotseq 2(2i+1).\\ P_{2i+1}\left(\frac{1}{2}\right)=2\cdot 2^{2i+1}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2i+1}=2\left(\frac{4}{\pi}\right)^{2i+1}\end{cases} \tag{4.32}$$

となる．$2i+1=11$ 程度までなら絶対値の変動はそれほど大きくない．同じようにして

$$\begin{cases}P_{2i}(0)=2\zeta(2i)\fallingdotseq 2.\\ P_{2i}\left(\frac{1}{2}\right)=\left\{2^{2i}+2\zeta\left(2i\,;\frac{3}{2}\right)\right\}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2i}\fallingdotseq\left(\frac{4}{\pi}\right)^{2i}.\end{cases} \tag{4.33}$$

を得ることができる．この級数については $2i=12$ 程度になると左端と右端とで 10 進 1 桁程度異なる．そこで変動が大きい場合には $P_{2i}(x)$ の主要部を簡単な式で計算し，残りを Tchebycheff 展開式とする．筆者らの経験によれば

$$\begin{cases}P_8(x)=2+48x^2\cdot(1-2x^2)+\hat{P}_8(x).\\ P_{10}(x)=2+80x^2\cdot(1-2x^2)+\hat{P}_{10}(x).\\ P_{12}(x)=2+128x^2\cdot(1-2x^2)+\hat{P}_{12}(x).\end{cases} \tag{4.34}$$

として $\hat{P}_8(x)$, $\hat{P}_{10}(x)$, $\hat{P}_{12}(x)$ の Tchebycheff 展開式を求めるとうまくゆく．

$\hat{\delta}_i(x)$ についても $\bar{\delta}_i(x)$ の場合と同じようにすればよい．すなわち

$$\begin{cases}U_{2i+1}(0)=2(2i+1)\eta(2i+2)\fallingdotseq 2(2i+1).\\ U_{2i+1}\left(\frac{1}{2}\right)=2\cdot\left\{2^{2i+1}-2\eta\left(2i+1\,;\frac{3}{2}\right)\right\}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2i+1}\\ \qquad\fallingdotseq 2\left(\frac{4}{\pi}\right)^{2i+1}.\end{cases} \tag{4.35}$$

$$\begin{cases}U_{2i}(0)=2\eta(2i)\fallingdotseq 2.\\ U_{2i}\left(\frac{1}{2}\right)=2^{2i}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2i}=\left(\frac{4}{\pi}\right)^{2i}.\end{cases} \tag{4.36}$$

となり (4.32)，(4.33) 式とほぼ同じ値になるので (4.34) 式のようにすればよい．

以上の方針に基づいて

$$\begin{cases}Q_1(x).\\ P_{2i+1}(x):\ i=0,1,2,3,4,5.\\ P_{2i}(x):\ i=1,2,3\quad;\ \hat{P}_{2i}(x):\ i=4,5,6.\\ U_{2i+1}(x):\ i=0,1,2,3,4,5.\\ U_{2i}(x):\ i=1,2,3\quad;\ \hat{U}_{2i}(x):\ i=4,5,6.\end{cases} \tag{4.37}$$

を

$$\sum_{r=0}^{\infty}d_r T_r(8x^2-1). \tag{4.38}$$

の形に展開したときの展開係数，d_r を求めた．計算には特にこのために作製した多倍長計算プログラムを使用した．これは仮数部を 10^9 進数，15桁としているので 10 進 120 桁程度の精度は確保されているはずである．使用した計算機は PC-9801 F 2 (i 8086, i 8087) でありその上で動く MS-DOS Version 2.11, MS-FORTRAN Version 3.31 を使用した．展開係数 d_r の表は相当な量になるのでここには掲げないが将来なんらかの形で公表したいと考えている．

表 1　所用の精度を得るのに必要な項数
Table 1　Number of terms required for the given precision.

	10^{-7}			10^{-17}		
i	Q	P	U	Q	P	U
1	4	4	3	8	8	7
2		5	5		9	9
3		5	5		10	10
4		6	6		11	11
5		6	6		12	12
6		7	7		13	13
7		7	7		13	13
8		8	8		14	14
9		8	8		14	14
10		8	8		15	15
11		9	9		16	16
12		9	9		16	16

ここでは(4.37)式を絶対誤差 10^{-7} および 10^{-17} 程度の誤差で計算するために必要な項数を示す.

表 1 に(4.38)式における d_r が

$$|d_k|<10^{-7} \quad \text{および} \quad |d_k|<10^{-17}$$

となる最小の k を示す.

5. おわりに

離散化関数の計算法について述べた. 本論文では一つの計算法を述べたにすぎないが他にも種々の計算法が考えられる. たとえば (3.28)式等で K を適当にとり級数部を Tchebycheff 展開したり, Tchebycheff 多項式を使って項数を短縮したりすれば実用的な計算法となる. $\bar{\delta}_i(x)$, $\bar{\tau}_i(x)$ についてはこの方針で作られたプログラムが文献 14) に与えられている.

離散化関数は実用上は 12 次程度まで計算できれば十分である. しかし, もしそれ以上の次数の離散化関数が必要なら (3.1)～(3.4)式を直接計算すればよい. 13 次以上ならこれらの級数は十分に速く収束するので直接計算しても実用的な計算量で結果を得ることができる.

Aliasing の式, (2.7)式はこのままではほとんど実用性がない. たとえばこの式を使って離散 Fourier 係数の誤差を計算するには $f(x)$ に関する量を無限個必要とする. 一方, (2.10)式では $f(x)$ に関する量を m 個必要とするにすぎない. (2.7)式における∞は(2.9)式に移ったのである. (2.9)式は $f(x)$ とは無関係でありあらかじめその計算手順を作っておくことができる. このようにして導入された離散化関数は今後多くの場面において活用しうると思われる.

謝辞　本論文で $\bar{\tau}_i(x), \hat{t}_i(x)$ の計算法に関してこのように簡潔な方法を呈示できたのは東京電機大学, 一松信教授のご指摘による[12). ここに記して深く感謝します. 最後に, ご指導頂いた中部大学, 二宮市三教授, 原稿に目を通し適切なご指摘を頂いた名古屋大学, 鳥居達生教授, 議論して頂いた中京大学, 秦野甯世教授に深く感謝します.

参　考　文　献

1) 宮川　洋, 今井秀樹: 高速 Fourier 変換, p. 262, 科学技術出版社, 東京 (1979), (Brigham, E.O. 原著: *The Fast Fourier Transform*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1974)).
2) Hamming, R.W.: *Numerical Methods for Scientists and Engineers*, second ed., p. 721, McGraw Hill, Kogakusha, Tokyo (1973).
3) Lyness, J.N.: The Calculation of Fourier Coefficients, *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. 4, No. 2, pp. 301-315 (1967).
4) 秦野和郎, 秦野甯世, 二宮市三: 複合多項式による関数近似, 情報処理学会論文誌, Vol. 23, No. 6, pp. 617-624 (1982).
5) 秦野和郎, 秦野甯世, 二宮市三: 複合多項式による離散近似の誤差解析, 第 22 回情報処理学会全国大会論文集, 2F-6 (1981).
6) 秦野和郎, 秦野甯世, 二宮市三: 三角補間の誤差解析, 第 25 回情報処理学会全国大会論文集, 3L-10 (1982).
7) 秦野和郎, 秦野甯世, 二宮市三: 複合多項式による補間, 第 27 回情報処理学会全国大会論文集, 1F-6 (1983).
8) 秦野和郎, 秦野甯世, 二宮市三: 中点則に基づく三角補間の誤差解析, 第 31 回情報処理学会全国大会論文集, 1L-5 (1985).
9) 秦野和郎: 複合多項式による曲面のあてはめ, 第 35 回情報処理学会全国大会論文集, 2B-4 (1987).
10) Abramowitz, M. and Stegun, I. (eds.): *Handbook of Mathematical Functions*, 10th ed., p. 1046, Dover Publication Inc., New York (1972).
11) 森口繁一, 宇田川銈久, 一松　信: 数学公式 II 一級数・フーリエ級数, p. 328, 岩波書店, 東京 (1957).
12) 秦野和郎: 離散化関数の計算法, 第 37 回情報処理学会全国大会論文集, 5D-1 (1988).
13) 秦野和郎: 離散化関数の計算法 (その改良), 第 39 回情報処理学会全国大会論文集, 5L-4 (1989).
14) 秦野和郎: 複合多項式とその計算法, 数理解析研究所講究録 676, 数値解析の基礎理論とその周辺, pp. 148-169, 京都大学数理解析研究所 (1988).

(平成元年 11 月 7 日受付)
(平成 2 年 4 月 17 日採録)

秦野 和郎（正会員）

昭和16年生．昭和39年名古屋大学工学部電気学科卒業．（株）日立製作所を経て昭和43年名古屋大学大学院工学研究科修士課程電気工学専攻課程修了．名古屋大学大型計算機センター，福井大学工学部情報工学科を経て現在，愛知工業大学電子工学科教授．工学博士．数値計算に興味を持っている．電気学会，電子情報通信学会各会員．