

曲線生成のための多重多項式†

村 山 登††

従来の有理多項式の代わりに、拡張ベジエ多項式のふくらみ係数をさらに多項式にする多重多項式を提案する。この多重多項式によると、円、楕円、放物線、双曲線などの円錐曲線や、球面、円錐面なども精度よく生成できる。そして、媒介変数を変換すれば等間隔、等角度、等面積のすべての曲線生成が可能となる。また、基底多項式の特徴点で制御されながら、より高次の曲線生成が可能である。この多重多項式には割り算がないので有理多項式よりも曲線生成が高速にできる。

1. はじめに

特徴点と曲線の関係が直観的でわかりやすいことから、コンピュータグラフィックスの分野では曲線や曲面の生成にパラメトリック多項式がよく使用される。その代表的なものに、ベジエ曲線、エルミート曲線、Bスプライン曲線などがありいずれもパラメトリック多項式で生成される。しかし、これらの多項式で円や楕円などを生成すると実用にならないほど誤差が大きくなってしまふ。そのために曲線を分割するか、多項式を補正多項式で割る有理多項式などの方法がとられてきた^{2),6)}。曲線を分割する方法は制御点数が増えてしかも接続点で切線の方向が狂ったりする。またNU RBS (Non Uniform Rational Basic Spline) のように有理多項式にすると、分母は特徴点と関係ない式のこと多く、計算時間がふえるわりには表現力は増えない。そこでここに、多項式の係数をさらに多項式にする多重多項式を提案する。この多重多項式により有理多項式と同様に円、楕円、双曲線、放物線などの円錐曲線の生成が可能かどうか検討した。もし可能であれば多重多項式は従来の多項式の拡張なので従来の多項式と完全に互換性をとることもできるのみならず、より高次の多項式の表現力を利用することもできるし割り算がないので計算速度も速いので利点が多い。多重多項式の前にまず、それと関係が深いMB (Modified Bezier) 多項式⁹⁾から説明することにする。

2. ベジエ曲線とMB多項式

3次ベジエ曲線の生成式は、Bernsteinの多項式の応用で次の式で表現される¹⁾。

$$B = (1-t)^3 P_0 + 3(1-t)^2 t P_1 + 3(1-t)t^2 P_2 + t^3 P_3, \quad (2.1)$$

B : 生成点, P_1 : 特徴点, t : 媒介変数; $0 \leq t \leq 1$.

MB多項式はベジエ曲線のふくらみを自由に変えられるように改良したものでつぎの式で表現される⁹⁾⁻⁵⁾。

$$MB = (1-t)^3 P_0 + (1-t)^2 t \{c P_1 - (c-3) P_0\} + (1-t)t^2 \{d P_2 + (d-3) P_3\} + t^3 P_3, \quad (2.2)$$

MB: 生成点, c, d : ふくらみ係数。

c と d を大きくすると曲線のふくらみも大きくなり, $c=d=0$ とすれば P_0 と P_3 をむすぶ直線 $L(P_0, P_3)$ が生成される。さらに $L(P_1, P_2) // L(P_0, P_3)$ のばあい, $c=d=4$ とすれば生成曲線は $L(P_1, P_2)$ に接し, $d=-c$ とすれば生成曲線はs字形となり, $c=-d=6 \text{ sqrt}(3)$ とすれば生成されたs字形が $L(P_1, P_2)$ に接する(図1参照, $\text{sqrt}(3)$ は3の平方根)。

3. 多重多項式による半円生成

3.1 MB多項式による半円の生成

まず, MB多項式によって, 半円を生成したときの半径の誤差を調べてみると, 真円との差は最大2%近くもあり, とても実用にはならないし, 生成曲線を分割して1/4円を生成するようにすれば誤差は2桁減少するが制御のための特徴点の座標値が無理点となり, しかも半円に必要な特徴点の数が増えてしまふ。半円を生成したときの誤差の出かたを調べてみると, 生成曲線は内側に真円を含んでいる。言い替えると生成曲線の半径が大きすぎて, ほぼ $t=0.25$ のあたりで半径が最大となっている(図3, 表1, 表2の $a_0=4$ の場合)。

そこで, MB多項式の c, d をさらに多項式で表現し $t=0.25, t=0.75$ のところでは4よりも小さく $t=0.5$ のところでは $c=d=4$ になるようにすればよ

† A Multiple Polynomial for Curve Generation by NOBORU MURAYAMA (RICOH R&D Center).

†† リコー中央研究所

いことが予想される。つまり、MB 多項式のふくらみ係数の c と d をさらに多項式で表現すればよいことになる。以下、半円生成では d は $d=c$ とする。

3.2 c, d の多項式によるおきかえ

$$w(t) = (1-t)t, \quad (3.1)$$

$$c(t) = d = a_0 + a_1 \cdot w(t) \quad (3.2)$$

とおけば、
まず $t=0.5$ のときに $c=4$ となればよいので式 (3.1) と式 (3.2) から次の式を得る。

$$c(0.5) = a_0 + a_1/4 = 4. \quad (3.3)$$

つぎに $t=0.25$ のときの式を求めることにする。式 (2.2) において P_i の座標値を (x_i, y_i) とし生成点 MB の座標値を (x, y) として $y_0 = y_3 = 0, y_1 = y_2 = 1, x_0 = x_1 = -1, x_2 = x_3 = 1$ ととれば(図 2),

$$\begin{aligned} y &= c(1-t)^2t + c(1-t)t^2 \\ &= c(1-t)t \\ &= c \cdot w(t) \end{aligned}$$

となり、結局つぎの式を得る。

$$y(t, a_0, a_1) = a_0 \cdot w(t) + a_1 \cdot w^2(t) \quad (3.4)$$

同様に式 (2.2) に与えられた点の x 座標値をいれて

$$x(t) = t^2(6-4t) - 1. \quad (3.5)$$

真円のばあいは任意の t に対して $x^2 + y^2 = 1$ となればよいので $x(0.25)$ と $y(0.25)$ を求めると

$$\text{式 (3.5) から } x(0.25) = -0.6875,$$

したがって

$$\begin{aligned} y(0.25) &= \text{sqr}\{1 - (x(0.25))^2\} \\ &= 0.7261843774. \end{aligned} \quad (3.6)$$

一方式 (3.1) から

$$w(0.25) = 0.1875, \quad w^2(0.25) = 0.03515625$$

を得るので、結局つぎの 2 元連立方程式を得る。

$$\begin{aligned} a_0 + 0.25 \cdot a_1 &= 4 \\ 0.1875 \cdot a_0 + 0.03515625 \cdot a_1 &= 0.7261843774 \end{aligned}$$

これを解くと $a_0 = 3.492, a_1 = 2.032$ となる。しかし、このようにすると誤差は最小になるが、生成曲線は半円の内側にも入ってしまうので a_0 を大き目 a_1 を少な目にして、 $a_0 = 3.5, a_1 = 2$ とすると真円を内包でき

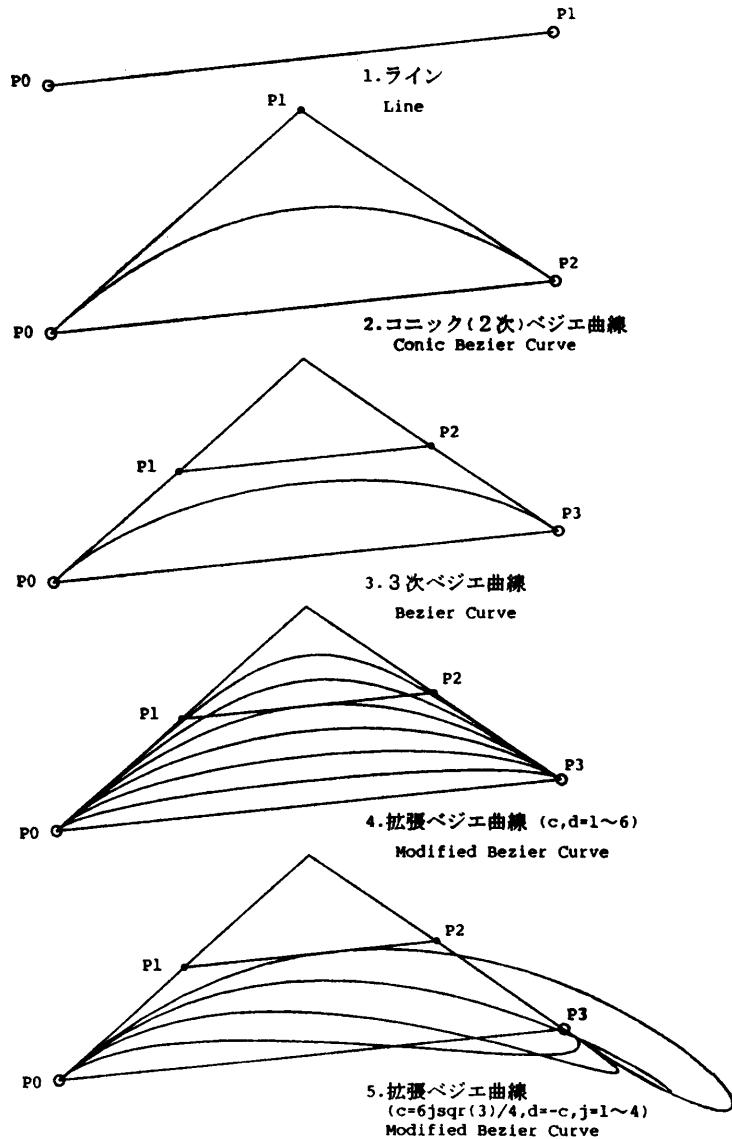


図 1 ベジエ曲線と拡張ベジエ曲線
Fig. 1 Bezier and modified Bezier curve.

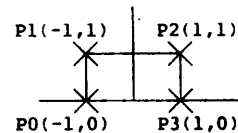


図 2 半円生成の特徴点座標
Fig. 2 Feature point for 1/2 circle generation.

るのでこちらを採用するとつぎの式を得る。

$$c(t) = 3.5 + 2 \cdot w(t). \quad (3.7)$$

4. 多重多項式による半円生成

4.1 1重多項式による半円生成

3次 MB 多項式の c を $c(t)=a_0+a_1 \cdot w(t)$ とおいた多項式は3次の基底多項式に2次の $w(t)$ が乗っているので3次1重多項式 (Multiple polynomial 3.1=MP 3.1) と呼ぶことにする。もし $w(t)$ の次数まで例えば MP 3.1.2 である。つまり式(3.7)は3次の基底多項式と5次の副多項式が 3.5:2 の割合で重ねられたものである。

$a_0=3.5, a_1=2$ として半円を生成したときの半径を真円の半径を1として表1, 表2に示す。

表1, 表2からもわかるように誤差は2桁減少し(5/10000) よりも小さいので真円との差を図では確認できない。また, 半径は1より小さくはなく生成曲線は真円の内側に入りこまないこともわかる。

4.2 2重多項式による半円の生成

c をさらに $w(t)$ の関数として

$$c = a_0 + a_1 \cdot w(t) + a_2 \cdot w^2(t) \tag{4.1}$$

とすれば, $c(0.5)=4$ とあと2点からきまる3元連立方程式を解いて,

$$a_0 = 3.466, a_1 = 2.275, a_2 = -0.556$$

のとき半円の最大誤差は(9/1000000)のオーダーとなる。なお, 1/8 円は $t=0.25$ ではなく式(3.5)から約0.241181のところであり t は等角度媒介変数ではない。

4.3 多重多項式による半円生成の誤差

式(4.1)を一般化すると多重度 m の m 重多項式 (MP 3. m) は次のように表現できる。

$$c(t) = \sum_{i=0}^m a_i \cdot w^i(t) \tag{4.2}$$

式(4.2)では通常式(2.2)の MB 多項式は3次0重多項式 (MP 3.0) となる。

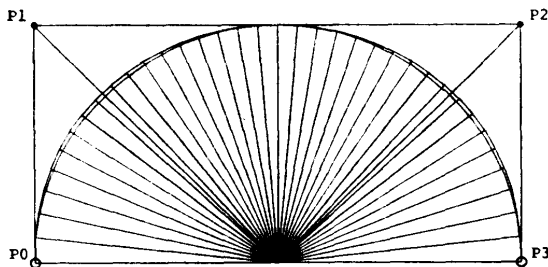


図3 ベジエ曲線による半円生成 (等間隔媒介変数)
Fig. 3 Half circle generation by Bezier curve with uniform parameter.
outside: Bezier curve, inside: Half circle.

表1 3次 m 重多項式のパラメータと最大半径誤差 re
Table 1 Multiple factors of MP 3. m and maximum radius error re .

m	a_0	a_1	a_2	a_3	re
0	4	0	0	0	2×10^{-2}
1	3.5	2	0	0	5×10^{-4}
2	3.466	2.275	-0.556	0	9×10^{-6}
3	3.4646	2.3	-0.7	0.2656	2×10^{-6}

表2 $t=0/32 \sim 16/32$ における半径 $r(m)$
Table 2 Radius $r(m)$ on $t=0/32 \sim 16/32$.

t	$r(m=0)$	$r(m=1)$	$r(m=2)$	$r(m=3)$
0/32	1	1	1	1
1/32	1.00161	1.000088	1.000003	1.000001
2/32	1.005243	1.000252	1.000006	1.000002
3/32	1.009486	1.000393	1.000006	1.000002
4/32	1.013369	1.000473	1.000003	1.000001
5/32	1.016297	1.000485	1.000001	1.000001
6/32	1.01797	1.000443	1.000001	1.000001
7/32	1.018314	1.000366	1.000002	1.000001
8/32	1.017426	1.000275	1.000004	1.000001
9/32	1.015523	1.000187	1.000007	1.000001
10/32	1.012899	1.000114	1.000009	1.000001
11/32	1.00989	1.000061	1.000009	1.000001
12/32	1.006843	1.000027	1.000008	1.000001
13/32	1.004083	1.000009	1.000005	1.000001
14/32	1.001891	1.000002	1.000003	1
15/32	1.000484	1	1.000001	1
16/32	1	1	1	1

$m=0$ から $m=3$ までの多重多項式で半円を生成したときの多重係数 a_i と最大半径誤差 re を表にまとめると表1のようになる。

5. 等間隔, 等角度, 等面積の媒介変数

5.1 等間隔媒介変数 t の角度誤差

このように, 多重多項式により精度の高い半円が生成できることがわかった。しかし図3からもわかるように媒介変数 t を等間隔にとると生成曲線の生成角度は等角度とはならない。例えば図3の $t=0.25$ の点は 45° よりも大きい。

そこで, 生成角度が等間隔になるような媒介変数に変換することを考える。まず, 式(3.5)から角度が 45° となる t を求めてみる。

$$t^2(6-4t)-1 = -\text{sqr}(1/2). \tag{5.1}$$

この式を Cardano の式に変換して解くと解 tq は $tq = 1/2 + \text{sqr}(2)/4 - \text{sqr}(6)/4$

$$= 0.5 + 0.25 \{ \text{sqr}(2) - \text{sqr}(6) \} \tag{5.2}$$

$$= (\text{約 } 0.241181).$$

したがって等角度媒介変数を $u(t)$ とすれば

$$u(0)=0, u(0.25)=tq, u(0.5)=0.5, \\ u(0.75)=1-tq, u(1)=1$$

となるように変換すればよいことになる。

5.2 等角度媒介変数 $u(t)$ への変換

$u(t)$ はその対称性から次の式の、全体で1となるような和で表せる。

$$u_0=t \\ u_1=4(t-0.5)^3+0.5 \\ \dots\dots\dots \\ u_i=0.5^{-2i-1} \cdot (t-0.5)^{2i+1}+0.5 \quad (5.3)$$

$i=0, 1$ とすれば2つの式の $(1-v):v$ の和なので、

$$u(t)=(1-v)u_0+v \cdot u_1 \\ = (1-v)t+v\{4(t-0.5)^3+0.5\}. \quad (5.4)$$

$u(0.25)=tq$ となる v を求めると、
 $(1-v) \cdot 0.25+v\{4(0.25-0.5)^3+0.5\}=tq$
 $v=16(tq-0.25)/3=16tq/3-4/3$ (5.5)
 $= (\text{約 } -0.047).$

近似値として $v=-0.047$ とすれば
 $u(t)=1.047t-0.188(t-0.5)^3-0.0235. \quad (5.6)$

この $u(t)$ が t を等間隔にとったときの等角度媒介変数である。

図4は $u(t)$ を媒介変数として書いた図であるが半円が等角度に分割されていて 45° のところも一致していることがわかる。

t から $u(t)$ に変換することにより、 t は $t\pi$ radian の角度に対応するので任意角度から任意角度までの円弧を自由に正確に書くことができる。

5.3 媒介変数変換の一般化

主媒介変数 t から副媒介変数 u への変換を一般化すると、

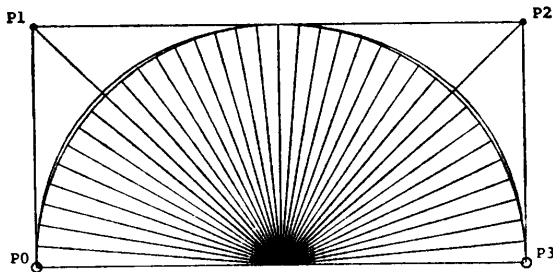


図4 多重多項式による半円生成 (等角度媒介変数)
 Fig. 4 1/2 circle generation by multiple polynomial with uniform angle parameter.
 Multiple factors:
 outside: $a_0=4 \quad a_1=0$
 inside: $a_0=3.5 \quad a_1=2$

$$u(t)=\sum_{i=0}^n bi\{(0.5)^{-2i-1} \cdot (t-0.5)^{2i+1}+0.5\}, \\ \sum_{i=0}^n bi=1. \quad (5.7)$$

5.4 等角度媒介変数 $u(t)$ から t への逆変換

逆に等角度媒介変数 $u(t)$ から t に変換したいことがある。この場合には前に求めた v により

$$t=(1+v)t-v\{4(u-0.5)^3+0.5\}. \quad (5.8)$$

近似して $v=-0.047$ とすれば

$$t=0.953u+0.188(u-0.5)^3+0.0235. \quad (5.9)$$

5.5 等面積媒介変数による楕円生成

半円が生成できれば全円は c と d を正、負にして半円を2回書けばよい。

全円が書ければ楕円はふくらみ係数 c のかわりに $e=bc$ なる e でおきかえればよい。 $b=1$ なら円、 $b=0$ なら直線、そのほかの場合は楕円となる。図5にこれを示す。

円のとときの $u(t)$ は等角度媒介変数であったが楕円生成のときはそのまま等面積媒介変数となるのは大変興味ぶかい。

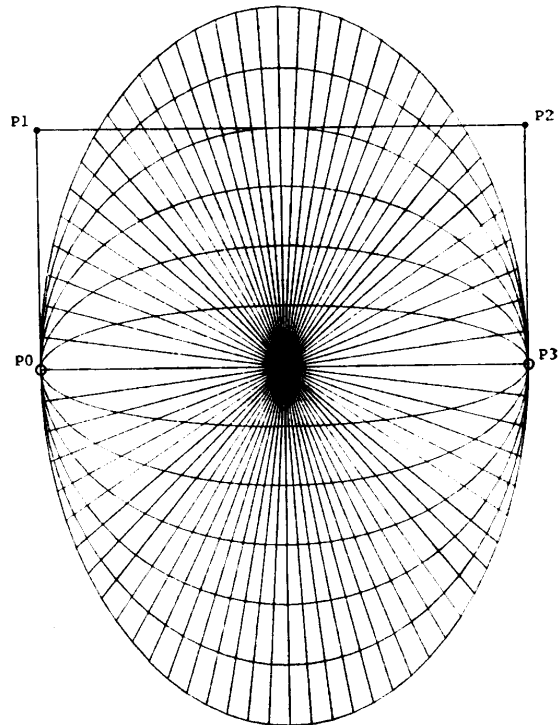


図5 多重多項式による楕円生成 (等面積媒介変数)
 Fig. 5 Ellipse generation by multiple polynomial with uniform area parameter.
 Multiple factors:
 $a_0=3.5 \quad a_1=1 \quad e=bc \quad b=-1.5 \sim 1.5$

7. 多重多項式の一般化

7.1 基底次数, 多重度, 媒介変換次数

多重多項式の応用例として, 円錐曲線生成の例を説明した. しかし, 多重多項式の利点は本質的に高次多項式の機能性を持っていることである.

MB 多項式 (2.2) はもともと 3 次のパラメトリック多項式である. MB の多項式のふくらみ係数 c, d を $w(t)$ の m 重多項式にすると $w(t)$ は t の 2 次式なので式全体としては $3+2\cdot m$ 次式となり, n 次基底多項式を m 重にすると $n+2\cdot m$ 次式となる. たとえば 1 重多項式とすれば式 (2.2) は 5 次のパラメトリック多項式に相当する.

しかも, 生成曲線の始点, 終点ではもとの 4 つの特徴点でできる 3 次多項式の性質を保存しているので曲線制御がやりやすい.

式 (2.2) を基底次数 3, 多重度 m , 媒介変換次数 $2n+1$ の多重多項式として一般的に表現すると次の式となる.

$$MP = \sum_{i=0}^3 Qi(1-u)^{3-i}u^i, \quad (7.1)$$

$$Q_0 = P_3, Q_3 = P_3,$$

$$Q_1 = \{cP_1 - (c-3)P_0\}, Q_2 = \{dP_2 - (d-3)P_3\},$$

MP: 生成点, c, d : ふくらみ係数,

u : 副媒介変数, $0 \leq u \leq 1$,

$$c = \sum_{j=0}^{m-1} aj \cdot w^j(u), w(u) = (1-u)u, \quad (7.2)$$

$$u = \sum_{k=0}^n bk \cdot uk, \sum_{k=0}^n bk = 1, \quad (7.3)$$

$$uk(t) = (0.5)^{-2t-1} \cdot (t-0.5)^{2t+1} + 0.5, \quad (7.4)$$

t : 主媒介変数, $0 \leq t \leq 1$.

7.2 多重多項式の応用

多重多項式 (7.1) によると aj, bk を適当に設定することで多彩な機能が得られるのでその例を示す.

7.2.1 球面, 円錐面の生成

図 7 は測地線球面,

図 8 は緯度, 経度球面の生成例である.

いずれも $a_0 = 3.5, a_1 = 2$ とした.

7.2.2 円錐生成

図 9 は楕円生成を利用して円錐面を生成したものである. これも $a_0 = 3.5, a_1 = 2$ とした.

7.2.3 多重多項式の多様性

多重多項式の多様性のいくつかの例を示す.

図 10 は $a_0 + (a_1/4) = 4, d = c$ なので生成曲線は $L(P_1,$

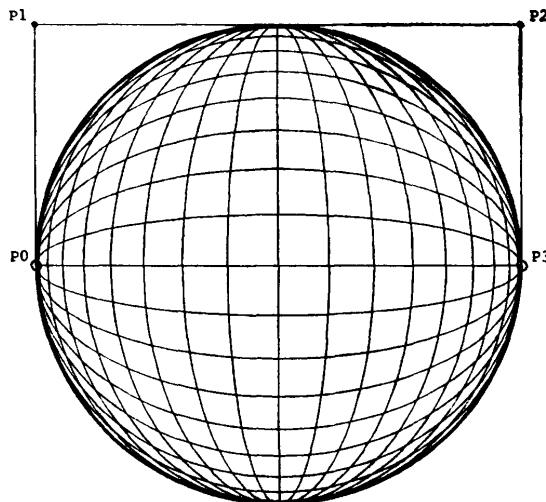


図 7 MP 3.1 多項式による測地線球面生成
Fig. 7 Geometric sphere generation by MP 3.1.

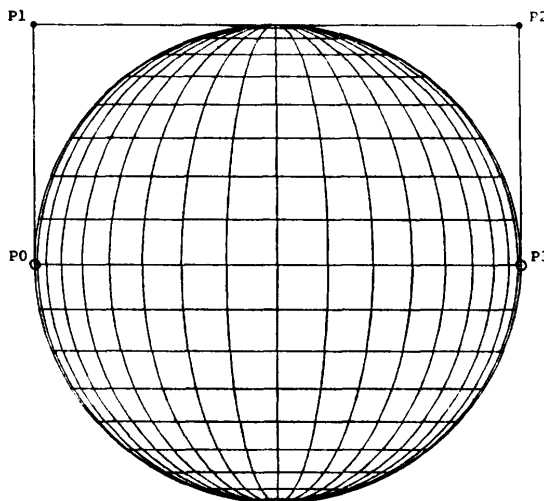


図 8 MP 3.1 多項式による緯度, 経度球面生成
Fig. 8 Latitude, longitude sphere generation by MP 3.1.

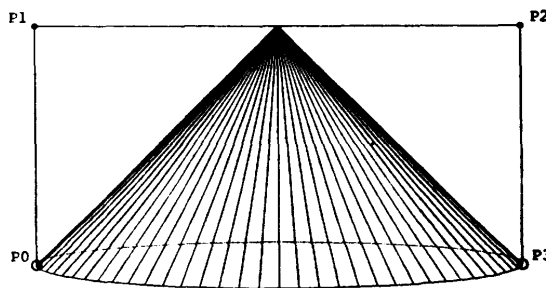


図 9 MP 3.1 多項式による円錐生成
Fig. 9 Cone generation by MP 3.1.

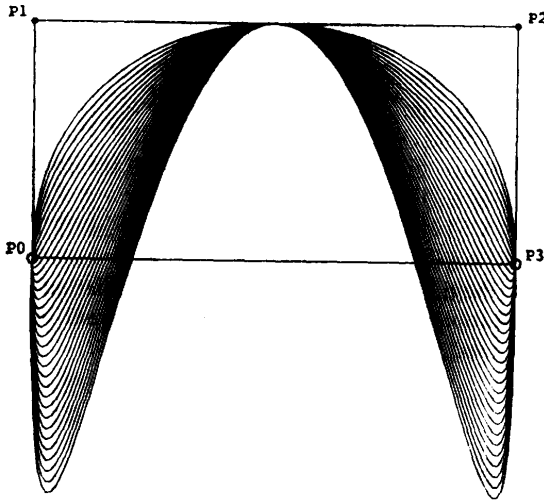


図 10 3次1重多項式出力例, $a_0+(a_1/4)=4$
Fig. 10 Output example of MP 3.1, $a_0+(a_1/4)=4$.

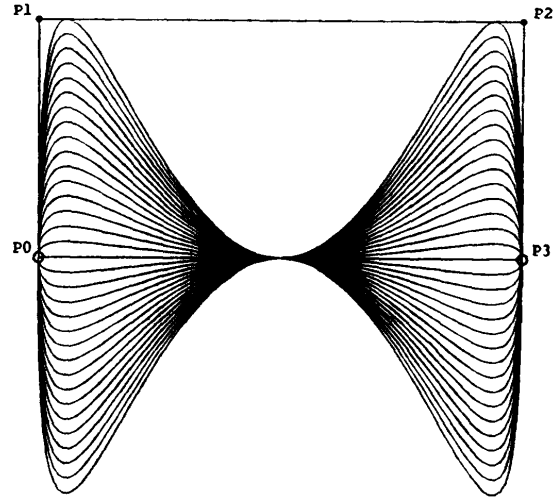


図 12 3次1重多項式出力例, $a_0+(a_1/4)=0$
Fig. 12 Output example of MP 3.1, $a_0+(a_1/4)=0$.

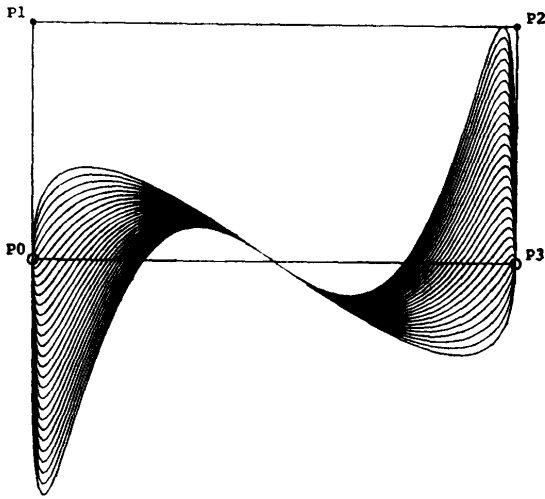


図 11 3次1重多項式出力例, $a_0+(a_1/4)=4, d=-c$
Fig. 11 Output example of MP 3.1, $a_0+(a_1/4)=4, d=-c$.

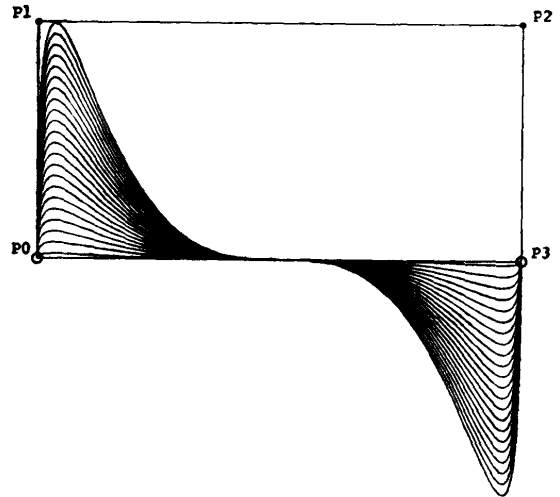


図 13 3次1重多項式出力例, $a_0+(a_1/4)=0, d=-c$
Fig. 13 Output example of MP 3.1, $a_0+(a_1/4)=0, d=-c$.

P_2 の中点に接する。

図 11 は $a_0+(a_1/4)=4, d=-c$ として終点での切線方向を逆にしたものである。

図 12 は $a_0+(a_1/4)=0, d=c$ なので生成曲線は $L(P_0, P_3)$ の中点に接する。

図 13 は $a_0+(a_1/4)=0, d=-c$ として終点での接線方向を逆にしたものである。

8. 結 論

MB 多項式のふくらみ係数 c, d をさらに多項式とした 3次 m 重多項式により精度の高い円錐曲線の生成が可能であり、与えられた点での誤差はない。ま

た、主媒介変数を副媒介変数に変換することにより等間隔、等角度、等面積の媒介変数が得られる。また多重多項式による曲線生成は、基底多項式の特徴点できまる性質を保存しながら、より高次の $3+2m$ 次の多項式の機能性を利用することができる。さらに割り算がないので生成速度も速い。

9. おわりに

このように、簡単な 1重多項式でも、3次の基底多項式の特徴点で制御されながら、5次多項式の機能を持っているので多様な曲線生成が可能となる。 $w(u)$ は u の 2次式なので、全体としては u の $3+2m$ 次

の多項式となっているが u は t の $2n+1$ 次なので合計の次数は $(3+2m)(2n+1)$ 次となる。また多重多項式による展開はテイラー展開とは異なり、特徴点での誤差はない。しかし次数をあげると低次の係数にも影響をおよぼすので複雑でもあるが実用上は与えられた複数の点での誤差がないという点ではテイラー展開よりも勝れている。たとえば、テイラー展開では $y = \sin \theta$ として $\theta \neq 0$ の点ではどこまで高次までとっても誤差があるが多重多項式では曲線の始点、終点、中点では常に誤差がない。

しかし a_i や b_i をもっと簡単に求めるのが今後の課題である。

謝辞 日頃一緒に激論の相手をしてくれる谷口 捷さんと論文にまとめるように激励していただいた東京大学工学部計数工学科の和田英一教授、そしていつもご指導をいただいている尾上守夫所長に心から感謝いたします。

参 考 文 献

- 1) Bezier, P.: *Emploi des Machine a Commande Numerique*, Masson & C^{ie}, Paris (1970).
- 2) 斎藤 剛, 保坂 衛: 拡張2次有理 Bezier 曲線を用いた曲線近似法とそのベクトルフォントへの応用, グラフィクスと CAD 論文集, 情報処理学会情報処理シンポジウム論文集, Vol. 89, No. 7, pp. 27-36 (1989).

- 3) Murayama, N.: A Polynomial for Automatic Contour Vector Coding, *Trans. IEICE*, Vol. E 72, No. 5, pp. 661-669 (1989).
- 4) 村山 登, 江成保徳: DTP 用フォント, 画像電子学会誌, Vol. 18, No. 3, pp. 97-107 (1989).
- 5) 村山 登: 拡張ベジェ曲線による整数図形の輪郭線符号化, 1989 年度画像符号化シンポジウム (PCSJ 89), pp. 15-16, 電子情報通信学会画像工学研究専門委員会 (1989).
- 6) Piegl, L.: Interactive Data Interpolation by Rational Bezier Curves, *IEEE Comput. Gr. Appl.*, Vol. 7, No. 4, pp. 45-58 (1987).

(平成2年2月1日受付)

(平成2年5月8日採録)



村山 登 (正会員)

1932 年生. 1957 年東京大学工学部応用物理学科数理工学コース卒業. 同年小野田セメント(株)入社. 調査部統計課にて SE 業務に従事. 1964 年(株)リコー入社. オフィスコンピュータ, デジタルファクシミリ, ワードプロセッサ等の研究開発に従事. SE 課長, 企画室長, 開発部長を経て現在, 中央研究所技師長, インテグレーションセンター所長. 画像符号化, フォント関係の論文多数. 共著「光ディスク技術」, 「イメージング」等. 電子情報通信学会, 画像電子学会各会員, 画像電子学会理事.