漸化式を用いるベッセル関数 $I_\nu(x)$ の数値計算法の誤差解析†

吉田 年 雄††

第1種変形ベッセル関数 $I_\nu(x)$ は $I_{\mu+2k}(x)(k=0,1,\cdots)$ を用いて，$I_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\rho_k I_{\mu+2k}(x)$ のように展開できる．ただし，$\rho_k=(x/2)^{\nu-\mu}(-1)^k\Gamma(\mu+k)\Gamma(\nu+1-\mu)(\mu+2k)/\{k!\Gamma(\nu+1-\mu-k)\Gamma(\nu+k+1)\}$ である．上の展開式は，μ が負の整数の場合を除いて，任意の ν と μ に対して成り立つ．漸化式を用いる方法で計算された $I_{\mu+2k}(x)(\mu\geq 0)$ を上式の有限項で打ち切ったものに代入することにより，任意の ν に対して，$I_\nu(x)$ の近似式を得ることができる．本論文では，その近似式の誤差解析を行っており，その結果として，誤差の表示式および有用な誤差の評価式を与えている．

1. はじめに

第1種変形ベッセル関数 $I_\nu(x)$ は $I_{\mu+2k}(x)(k=0,1,\cdots)$ を用いて次式のように展開できる[1]．

$$I_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\rho_k I_{\mu+2k}(x) \tag{1}$$

ここで

$$\rho_k=\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-\mu}\frac{(-1)^k\Gamma(\mu+k)\Gamma(\nu+1-\mu)(\mu+2k)}{k!\Gamma(\nu+1-\mu-k)\Gamma(\nu+k+1)} \tag{2}$$

である．式(1)は，μ が負の整数の場合を除いて，任意の ν と μ に対して成り立つ．任意の ν に対して，$I_\nu(x)$ は，上の展開式により，以下に述べるように，$\mu\geq 0$ に対する従来の計算法すなわち漸化式を用いる方法によって得られる $I_{\mu+2k}(x)(k=0,1,\cdots)$ の計算値を用いて求めることができる．

m を適当に選ばれた正の偶整数とし，α を小さな任意定数とする．

$$G_{\mu+m+1}(x)=0,\quad G_{\mu+m}(x)=\alpha \tag{3}$$

を出発値として，$I_\mu(x)$ が満足する漸化式

$$G_{\mu-1}(x)=\frac{2\mu}{x}G_\mu(x)+G_{\mu+1}(x) \tag{4}$$

を繰り返し使うことにより，$G_{\mu+m-1}(x), G_{\mu+m-2}(x),\cdots, G_\mu(x)$ を順次，計算する．そのとき，$n=0,1,\cdots,m/2$ に対して，近似式

$$I_{\mu+2n}(x)\approx e^x G_{\mu+2n}(x)/\sum_{k=0}^{m}\epsilon_k G_{\mu+k}(x) \tag{5}$$

を得る．ただし，

$$\epsilon_k=2\left(\frac{x}{2}\right)^{-\mu}\frac{(\mu+k)\Gamma(\mu+1)\Gamma(2\mu+k)}{k!\Gamma(2\mu+1)} \tag{6}$$

である．この $I_\mu(x)$ の計算法については，既に二宮[2]，牧之内[3]および吉田ら[4]によって研究されている．この中で二宮はその近似に対する誤差評価式を与えている．

本論文のテーマである $I_\nu(x)$ に対する近似は，式(5)を式(1)の有限項で打ち切ったものに代入することにより得ることができる．これは，$I_\mu(x)$ と $I_\nu(x)(\nu\neq\mu)$ を同時に求めたいとき，あるいは $\nu<0$ の $I_\nu(x)$ を求めるときに有用である．本論文では，$I_\nu(x)$ の近似の誤差の表示式ならびに評価式を導出している．結果として，誤差の比較的簡単な表示式および誤差評価式を得た．誤差の表示式の簡単化のために，本論文では，一般化された超幾何級数の和に関する定理[5]が大きな役割を果たしている．

2. 計算法および誤差解析

n を正整数とし，$\mu\geq 0$ とする．関数 $I_{\mu+n}(x)$ および $\bar{K}_{\mu+n}(x)=(-1)^n K_{\mu+n}(x)$ ($K_\mu(x)$：第2種変形ベッセル関数) は共に同じ漸化式(4)を満足する．逆に式(4)の一般解は

$$G_{\mu+n}(x)=\xi I_{\mu+n}(x)+\eta\bar{K}_{\mu+n}(x) \tag{7}$$

によって表される．ここで ξ および η は任意定数である．これらの任意定数は式(3)によって決定される．式(3)から次式が得られる．

$$G_{\mu+m+1}(x)=\xi I_{\mu+m+1}(x)+\eta\bar{K}_{\mu+m+1}(x)=0 \tag{8}$$

$$G_{\mu+m}(x)=\xi I_{\mu+m}(x)+\eta\bar{K}_{\mu+m}(x)=\alpha \tag{9}$$

式(7)と(8)から η を消去すると次式を得る．

$$G_{\mu+n}(x)=\xi\left(I_{\mu+n}(x)-\frac{I_{\mu+m+1}(x)\bar{K}_{\mu+n}(x)}{\bar{K}_{\mu+m+1}(x)}\right) \tag{10}$$

† Error Analysis of Recurrence Technique for the Calculation of Bessel Function $I_\nu(x)$ by TOSHIO YOSHIDA (College of Business Administration and Information Science, Chubu University).

†† 中部大学経営情報学部経営情報学科

式(10)と次の関係式

$$\sum_{k=0}^{\infty}\epsilon_k I_{\mu+k}(x)=e^x \tag{11}$$

より

$$\sum_{k=0}^{m}\epsilon_k\left(\frac{G_{\mu+k}(x)}{\xi}+\frac{I_{\mu+m+1}(x)\bar{K}_{\mu+k}(x)}{\bar{K}_{\mu+m+1}(x)}\right)+\sum_{k=m+1}^{\infty}\epsilon_k I_{\mu+k}(x)=e^x \tag{12}$$

が得られる．式(10)と(12)からξを消去すると次式が求められる．

$$I_{\mu+n}(x)=\frac{e^x G_{\mu+n}(x)}{\sum_{k=0}^{m}\epsilon_k G_{\mu+k}(x)}(1-\Phi_{\mu,m}(x))+\frac{I_{\mu+m+1}(x)\bar{K}_{\mu+n}(x)}{\bar{K}_{\mu+m+1}(x)} \tag{13}$$

ただし，

$$\Phi_{\mu,m}(x)=e^{-x}\left(\sum_{k=0}^{m}\epsilon_k\frac{I_{\mu+m+1}(x)\bar{K}_{\mu+k}(x)}{\bar{K}_{\mu+m+1}(x)}+\sum_{k=m+1}^{\infty}\epsilon_k I_{\mu+k}(x)\right) \tag{14}$$

である．

それゆえ，式(3)を出発値として，漸化式(4)を繰り返し適用することにより得られた$G_{\mu+m-1}(x)$, $G_{\mu+m-2}(x),\cdots,G_{\mu}(x)$を用いて，

$$I_{\mu+n}(x)\approx e^x G_{\mu+n}(x)/\sum_{k=0}^{m}\epsilon_k G_{\mu+k}(x) \tag{15}$$

により，10進p桁の精度で$I_{\mu+n}(x)$が計算できるためには，

$$|\Phi_{\mu,m}(x)|<0.5\times10^{-p} \tag{16}$$

および

$$|\Theta_{\mu,m,n}(x)|<0.5\times10^{-p} \tag{17}$$

が成り立てばよい．ここで，

$$\Theta_{\mu,m,n}(x)=\frac{I_{\mu+m+1}(x)\bar{K}_{\mu+n}(x)}{I_{\mu+n}(x)\bar{K}_{\mu+m+1}(x)} \tag{18}$$

である．

本論文のテーマである$I_\nu(x)$の計算に対しては，式(1)と(13)から次式を得る．

$$I_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\rho_k I_{\mu+2k}(x)=\frac{e^x\sum_{k=0}^{m/2}\rho_k G_{\mu+2k}(x)}{\sum_{k=0}^{m}\epsilon_k G_{\mu+k}(x)}(1-\Phi_{\mu,m}(x))+\frac{I_{\mu+m+1}(x)}{\bar{K}_{\mu+m+1}(x)}\sum_{k=0}^{m/2}\rho_k\bar{K}_{\mu+2k}(x)+\sum_{k=m/2+1}^{\infty}\rho_k I_{\mu+2k}(x) \tag{19}$$

それゆえ，

$$I_\nu(x)\approx\frac{e^x\sum_{k=0}^{m/2}\rho_k G_{\mu+2k}(x)}{\sum_{k=0}^{m}\epsilon_k G_{\mu+k}(x)} \tag{20}$$

により，10進p桁の精度で$I_\nu(x)$が計算できるためには，

$$|\Phi_{\mu,m}(x)|<0.5\times10^{-p} \tag{21}$$

および

$$|\Psi_{\nu,\mu,m}(x)|<0.5\times10^{-p} \tag{22}$$

が成り立てばよい．ただし，

$$\Psi_{\nu,\mu,m}(x)=\frac{1}{I_\nu(x)}\left(\frac{I_{\mu+m+1}(x)}{\bar{K}_{\mu+m+1}(x)}\sum_{k=0}^{m/2}\rho_k\bar{K}_{\mu+2k}(x)+\sum_{k=m/2+1}^{\infty}\rho_k I_{\mu+2k}(x)\right) \tag{23}$$

である．

$\Phi_{\mu,m}(x)$はνと独立であり，$I_{\mu+n}(x)$の計算における条件(16)は，$I_\nu(x)$の計算における条件(21)と同じであることに注意しよう．

3. $\Phi_{\mu,m}(x)$の変形

式(14)で表される$\Phi_{\mu,m}(x)$を変形しよう．

$$\begin{aligned}\Phi_{\mu,m}(x)&=e^{-x}\left(\sum_{k=0}^{m}\epsilon_k\frac{I_{\mu+m+1}(x)\bar{K}_{\mu+k}(x)}{\bar{K}_{\mu+m+1}(x)}+e^x-\sum_{k=0}^{m}\epsilon_k I_{\mu+k}(x)\right)\\&=\frac{e^x K_{\mu+m+1}(x)-\sum_{k=0}^{m}\epsilon_k x^{-1}\bar{R}_{m-k,\mu+k+1}(x)}{e^x K_{\mu+m+1}(x)}\end{aligned} \tag{24}$$

ここで，

$$\bar{R}_{m-k,\mu+k+1}(x)=x(I_{\mu+k}(x)K_{\mu+m+1}(x)+(-1)^{m+k+2}I_{\mu+m+1}(x)K_{\mu+k}(x)) \tag{25}$$

は変形 Lommel 多項式[2]と呼ばれるものである．

式(24)の分子の第1項を書き換えよう．$e^xK_\mu(x)$のKummer の合流形超幾何関数による表示[6]を用いれば，次式が得られる．

$$e^xK_{\mu+m+1}(x)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2m+1}\frac{\Gamma(2\mu+2m+2-k)\Gamma(\mu+m+1-k)}{k!\,\Gamma(2\mu+2m+2-2k)}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{-\mu-1-m+k}+\frac{\pi^{1/2}(-1)^{m+1}(2x)^{m+1}}{2\sin\mu\pi}$$

$$\cdot\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(-\mu+m+k+(3/2))(2x)^{-\mu+k}}{(2m+k+2)!\,\Gamma(-2\mu+k+1)}\right.$$
$$\left.-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\mu+m+k+(3/2))(2x)^{\mu+k}}{k!\,\Gamma(2\mu+2m+k+3)}\right\} \tag{26}$$

一方，式(24)の分子の第２項は次のように変形できる．

$$\sum_{k=0}^{m}\epsilon_k x^{-1}\bar{R}_{m-k,\mu+k+1}(x)$$
$$=\frac{\pi}{2\sin\mu\pi}\sum_{k=0}^{m}\epsilon_k(I_{\mu+k}(x)I_{-\mu-m-1}(x)$$
$$-I_{\mu+m+1}(x)I_{-\mu-k}(x))$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m-1}\sum_{k=0}^{m}\epsilon_k\left(\frac{x}{2}\right)^{k}\sum_{n=0}^{[(m-k)/2]}$$
$$\frac{\Gamma(m-k+1-n)\Gamma(\mu+m+1-n)}{n!\,\Gamma(m-k+1-2n)\Gamma(\mu+k+1+n)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m-1}\sum_{l=0}^{m}\left(\frac{x}{2}\right)^{l}\frac{1}{(m-l)!}$$
$$\times\sum_{n=0}^{[l/2]}\epsilon_{l-2n}\frac{(m-l-1+n)!\,\Gamma(\mu+m+1-n)}{n!\,\Gamma(\mu+l+1-n)}$$
$$=\left(\frac{x}{2}\right)^{-m-1-\mu}\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(2\mu+1)}\sum_{l=0}^{m}\left(\frac{x}{2}\right)^{l}\frac{1}{(m-l)!}$$
$$\times\sum_{n=0}^{[l/2]}\frac{(\mu+l-2n)\Gamma(2\mu+l-2n)}{n!\,\Gamma(l-2n+1)}$$
$$\cdot\frac{(m-l+n)!\,\Gamma(\mu+m+1-n)}{\Gamma(\mu+l+1-n)}$$
$$=\left(\frac{x}{2}\right)^{-m-1-\mu}\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(2\mu+1)}\sum_{l=0}^{m}\left(\frac{x}{2}\right)^{l}\frac{1}{(m-l)!}$$
$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mu+l-2n)\Gamma(2\mu+l-2n)}{n!\,\Gamma(l-2n+1)}$$
$$\cdot\frac{(m-l+n)!\,\Gamma(\mu+m+1-n)}{\Gamma(\mu+l+1-n)}$$
$$=\left(\frac{x}{2}\right)^{-m-1-\mu}\frac{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\mu+m+1)}{\Gamma(2\mu+1)}$$
$$\sum_{l=0}^{m}\left(\frac{x}{2}\right)^{l}\frac{(\mu+l)\Gamma(2\mu+l)}{l!\,\Gamma(\mu+l+1)}$$
$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(1-\frac{\mu+l}{2}\right)_n(m-l+1)_n}{n!\left(-\frac{\mu+l}{2}\right)_n\left(\frac{1}{2}-\frac{2\mu-l}{2}\right)_n}$$
$$\cdot\frac{\left(-\frac{l}{2}\right)_n\left(\frac{1}{2}-\frac{l}{2}\right)_n(-\mu-l)_n}{\left(1-\frac{2\mu+l}{2}\right)_n(-\mu-m)_n} \tag{27}$$

一般化された超幾何級数の和に関する定理[5]

$${}_5F_4\left(a,1+\frac{a}{2},b,c,d;\right.$$
$$\left.\frac{a}{2},1+a-b,1+a-c,1+a-d;1\right)$$
$$=\frac{\Gamma(1+a-b)\Gamma(1+a-c)}{\Gamma(1+a)\Gamma(1+a-b-c)}$$
$$\cdot\frac{\Gamma(1+a-d)\Gamma(1+a-b-c-d)}{\Gamma(1+a-b-d)\Gamma(1+a-c-d)} \tag{28}$$

を用いれば，次式が得られる．

$$\sum_{k=0}^{m}\epsilon_k x^{-1}\bar{R}_{m-k,\mu+k+1}(x)$$
$$=\left(\frac{x}{2}\right)^{-m-1-\mu}\frac{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\mu+m+1)\Gamma(-\mu-m)}{\Gamma(2\mu+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu\right)}$$
$$\times\sum_{l=0}^{m}\left(\frac{x}{2}\right)^{l}\frac{\Gamma(2\mu+l)\Gamma\left(1-\mu-\frac{l}{2}\right)}{l!\,\Gamma(\mu+l)\Gamma(1-\mu-l)}$$
$$\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu-\frac{l}{2}\right)\Gamma\left(-\mu-m+l-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\mu-m+\frac{l}{2}\right)\Gamma\left(-\mu-m+\frac{l}{2}-\frac{1}{2}\right)}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m}\frac{\Gamma(2\mu+2m+2-k)\Gamma(\mu+m+1-k)}{k!\,\Gamma(2\mu+2m+2-2k)}$$
$$\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{-\mu-1-m+k} \tag{29}$$

このように，一般化された超幾何級数の和に関する定理を用いて，２重の和が１重の和に変換された．式の簡単化にとって，この定理が大きな役割を担っていることがわかるであろう．式(26)と(29)を式(24)に代入すると，次式を得る．

$$\Phi_{\mu,m}(x)$$
$$=\left[\frac{1}{2}\sum_{k=m+1}^{2m+1}\frac{\Gamma(2\mu+2m+2-k)\Gamma(\mu+m+1-k)}{k!\,\Gamma(2\mu+2m+2-2k)}\right.$$
$$\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{-\mu-1-m+k}+\frac{\pi^{1/2}(-1)^{m+1}(2x)^{m+1}}{2\sin\mu\pi}$$
$$\cdot\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(-\mu+m+k+\frac{3}{2}\right)(2x)^{-\mu+k}}{(2m+k+2)!\,\Gamma(-2\mu+k+1)}\right.$$
$$\left.\left.-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\mu+m+k+\frac{3}{2}\right)(2x)^{\mu+k}}{k!\,\Gamma(2\mu+2m+k+3)}\right\}\right]\Big/$$
$$\{e^{x}K_{\mu+m+1}(x)\} \tag{30}$$

上式において，$\mu\ll m$ ならば，[　]の第２の部分は第１の部分と比べて無視できるほど小さい．また，第１の部分において，x/m が小さいならば，$k=m+1$ の項である初項が主要項である．したがって，$\Phi_{\mu,m}(x)$ に対する有用な評価式として，次式が得られる．

$$\Phi_{\mu,m}(x)\approx\frac{\Gamma(2\mu+m+1)\Gamma(\mu+1)}{(m+1)!\,\Gamma(2\mu+1)e^{x}K_{\mu+m+1}(x)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\mu} \tag{31}$$

式(30)および評価式(31)は，二宮[2]の結果と一致する．二宮は，式(24)の分子の第2項が式(29)の形になることを予想し，非常に面倒な式変形を行って，数学帰納法により証明した．本論文での導出は，上述のように直接的であることが特長である．しかし，それでも多少の面倒な式変形を必要とする．

4. $I_{\mu+n}(x)$ の計算について

$\mu\ll m$ および x/m が小さいとき，式(14)で与えられる $\Phi_{\mu,m}(x)$ の絶対値は，固定された μ および x に対して，m の単調減少関数であることが，評価式(31)からわかる．同様に，式(18)で与えられる $\Theta_{\mu,m,n}(x)$ の絶対値も，固定された μ, n, x に対して，mの単調減少関数であることが，ベッセル関数の性質から容易にわかる．したがって，固定された μ および x に対して，式(16)を満足する最小の m を M とし，$|\Theta_{\mu,M,n}(x)|<0.5\times10^{-p}$ を満足する非負の n が存在したとき，その最大値を N とすれば，$0\le n\le N$ に対して，式(15)により10進 p 桁の精度で $I_{\mu+n}(x)$ が計算できることになる（$n>N$ に対しては，$|\Theta_{\mu,m,n}(x)|<0.5\times10^{-p}$ を満足するように，m の値を M より大きく選ぶ必要がある）．牧之内[3]，二宮[2]の論文では，$0\le\mu<1$ の場合を扱っており，そのとき，それらの論文の数表より，$|\Theta_{\mu,M,n}(x)|<0.5\times10^{-p}$ を満足する非負の n は存在し，N の値は $M/2$～$2M/3$ 程度であることがわかる．

$I_{\mu+n}(x)$ の近似式(15)の相対精度 $E_{\mu,n}(x)$ は，式(13)より，

$$E_{\mu,n}(x)=\frac{\Phi_{\mu,m}(x)-\Theta_{\mu,m,n}(x)}{1-\Phi_{\mu,m}(x)} \tag{32}$$

と表され，さらに，$|\Phi_{\mu,m}(x)|\ll1$ のときには，

$$E_{\mu,n}(x)\approx\Phi_{\mu,m}(x)-\Theta_{\mu,m,n}(x) \tag{33}$$

と表される．

表1(a)，表1(b)および表1(c)には，表題に記されている x,μ,m および表中に記されている n に対して，$I_{\mu+n}(x)$ の近似式(15)の値，その相対精度，$\Phi_{\mu,m}(x)$ の値（式(14)の計算値），その評価式(31)の値および $\Theta_{\mu,m,n}(x)$の値（式(18)の計算値）を示す．計算はFACOM M 760を用い，倍精度演算で行った（以下も同様）．表1(a)を見よう．$n=0$ の場合には $\Theta_{\mu,m,n}(x)$ の値は $\Phi_{\mu,m}(x)$ の値と比べて十分に小さいことがわかる．したがって，この場合には，$E_{\mu,n}(x)\approx\Phi_{\mu,m}(x)$ となっている．$n=6$ の場合には，$\Phi_{\mu,m}(x)$ と $\Theta_{\mu,m,n}(x)$ が同程度であるので，$E_{\mu,n}(x)\approx\Phi_{\mu,m}(x)-\Theta_{\mu,m,n}(x)$ となっている．表1(b)および表1(c)についても表1(a)の場合と同様なことがいえる．また，これらの表は $\Phi_{\mu,m}(x)$ に対して，評価式(31)が妥当であることを示している．

二宮は式(16)の $\Phi_{\mu,m}(x)$ を評価式(31)により近似したもの，および，式(18)のベッセル関数をDebye近似したもの用いて，$I_\mu(x)$ の能率的な計算法を導いた．詳細は文献2)に述べられている．

5. $\Psi_{\nu,\mu,m}(x)$ の変形

式(23)で表される $\Psi_{\nu,\mu,m}(x)$ を変形しよう．以下の変形による結果は，本論文によって初めて明らかにされたものである．

$$\begin{aligned}\Psi_{\nu,\mu,m}(x)&=\frac{1}{I_\nu(x)}\left(\frac{I_{\mu+m+1}(x)}{\overline{K}_{\mu+m+1}(x)}\sum_{k=0}^{m/2}\rho_k\overline{K}_{\mu+2k}(x)\right.\\&\qquad\left.+I_\nu(x)-\sum_{k=0}^{m/2}\rho_kI_{\mu+2k}(x)\right)\\&=\frac{1}{I_\nu(x)\overline{K}_{\mu+m+1}(x)}\{I_\nu(x)\overline{K}_{\mu+m+1}(x)\end{aligned}$$

表 1(a)　$x=2,\ \mu=0.8,\ m=8$ の場合の $\Phi_{\mu,m}(x)$ および $\Theta_{\mu,m,n}(x)$

Table 1(a)　$\Phi_{\mu,m}(x)$ and $\Theta_{\mu,m,n}(x)$ in the case of $x=2,\ \mu=0.8,\ m=8$.

	$n=0$	$n=6$
$I_{\mu+n}(x)$ の近似式(15)の値	$1.78652363802\times10^{0}$	$3.36327131660\times10^{-4}$
上記の値の相対精度 $E_{\mu,n}(x)$	3.39×10^{-6}	6.30×10^{-6}
$\Phi_{\mu,m}(x)$	3.39×10^{-6}	3.39×10^{-6}
$\Phi_{\mu,m}(x)$ の評価式(31)の値	3.35×10^{-6}	3.35×10^{-6}
$\Theta_{\mu,m,n}(x)$	-3.39×10^{-13}	-2.91×10^{-6}

表 1(b)　$x=10,\ \mu=0.2,\ m=20$ の場合の $\Phi_{\mu,m}(x)$ および $\Theta_{\mu,m,n}(x)$

Table 1(b)　$\Phi_{\mu m}(x)$ and $\Theta_{\mu,m,n}(x)$ in the case of $x=10,\ \mu=0.2,\ m=20$.

	$n=0$	$n=15$
$I_{\mu+n}(x)$ の近似式(15)の値	$2.80977329595\times10^{3}$	$8.17154947291\times10^{-2}$
上記の値の相対精度 $E_{\mu,n}(x)$	5.28×10^{-9}	-7.92×10^{-8}
$\Phi_{\mu,m}(x)$	5.28×10^{-9}	5.28×10^{-9}
$\Phi_{\mu,m}(x)$ の評価式(31)の値	5.35×10^{-9}	5.35×10^{-9}
$\Theta_{\mu,m,n}(x)$	1.30×10^{-16}	8.45×10^{-8}

表 1(c)　$x=30,\ \mu=0.4,\ m=40$ の場合の $\Phi_{\mu,m}(x)$ および $\Theta_{\mu,m,n}(x)$

Table 1(c)　$\Phi_{\mu,m}(x)$ and $\Theta_{\mu,m,n}(x)$ in the case of $x=30,\ \mu=0.4,\ m=40$.

	$n=0$	$n=30$
$I_{\mu+n}(x)$ の近似式(15)の値	$7.79554677952\times10^{11}$	$3.75134623393\times10^{5}$
上記の値の相対精度 $E_{\mu,n}(x)$	7.32×10^{-12}	2.21×10^{-10}
$\Phi_{\mu,m}(x)$	7.32×10^{-12}	7.32×10^{-12}
$\Phi_{\mu,m}(x)$ の評価式(31)の値	7.34×10^{-12}	7.34×10^{-12}
$\Theta_{\mu,m,n}(x)$	-7.04×10^{-23}	-2.14×10^{-10}

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{k=0}^{m/2}\rho_k(I_{\mu+m+1}(x)\bar{K}_{\mu+2k}(x)\\
&-\bar{K}_{\mu+m+1}(x)I_{\mu+2k}(x))\}\\
=&\frac{1}{I_\nu(x)K_{\mu+m+1}(x)}\Big\{I_\nu(x)K_{\mu+m+1}(x)\\
&-\sum_{k=0}^{m/2}\rho_k x^{-1}\bar{R}_{m-2k,\mu+2k+1}(x)\Big\}
\end{aligned}
\tag{34}
$$

式(34)の右辺の{ }の第1項を書き直そう.

$$
\begin{aligned}
&I_\nu(x)K_{\mu+m+1}(x)\\
&=\frac{\pi I_\nu(x)}{2\sin(\mu+m+1)\pi}\{I_{-\mu-m-1}(x)-I_{\mu+m+1}(x)\}\\
&=\frac{(-1)^{m+1}\pi}{2\sin\mu\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu\sum_{i=0}^\infty\frac{(x/2)^{2i}}{i!\,\Gamma(\nu+i+1)}\\
&\times\left\{\left(\frac{x}{2}\right)^{-\mu-m-1}\sum_{j=0}^\infty\frac{(x/2)^{2j}}{j!\,\Gamma(-\mu-m+j)}\right.\\
&\left.-\left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+m+1}\sum_{j=0}^\infty\frac{(x/2)^{2j}}{j!\,\Gamma(\mu+m+2+j)}\right\}\\
&=\frac{(-1)^{m+1}\pi}{2\sin\mu\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu\sum_{n=0}^\infty\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}\left\{\left(\frac{x}{2}\right)^{-\mu-m-1}\sum_{l=0}^n\right.\\
&\frac{1}{l!\,\Gamma(n-l+1)\Gamma(-\mu-m+l)\Gamma(\nu+n-l+1)}\\
&-\left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+m+1}\sum_{l=0}^n\\
&\left.\frac{1}{l!\,\Gamma(n-l+1)\Gamma(\mu+m+2+l)\Gamma(\nu+n-l+1)}\right\}\\
&=\frac{(-1)^{m+1}\pi}{2\sin\mu\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu\sum_{n=0}^\infty\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}\\
&\times\left\{\left(\frac{x}{2}\right)^{-\mu-m-1}\frac{1}{n!\,\Gamma(-\mu-m)\Gamma(\nu+n+1)}\right.\\
&\cdot\sum_{l=0}^\infty\frac{(-n)_l(-\nu-n)_l}{l!(-\mu-m)_l}\\
&-\left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+m+1}\frac{1}{n!\,\Gamma(\mu+m+2)\Gamma(\nu+n+1)}\\
&\left.\cdot\sum_{l=0}^\infty\frac{(-n)_l(-\nu-n)_l}{l!(\mu+m+2)_l}\right\}
\end{aligned}
\tag{35}
$$

Gauss の公式[7]

$$
{}_2F_1(a,b;c;1)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}
\tag{36}
$$

を用いると次式を得る.

$$
\begin{aligned}
I_\nu(x)K_{\mu+m+1}(x)=&\frac{(-1)^{m+1}\pi}{2\sin\mu\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu\sum_{n=0}^\infty\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}\\
&\times\left\{\left(\frac{x}{2}\right)^{-\mu-m-1}\frac{\Gamma(\nu-\mu-m+2n)}{n!\,\Gamma(-\mu-m+n)\Gamma(\nu-\mu-m+n)\Gamma(\nu+n+1)}\right.\\
&\left.-\left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+m+1}\frac{\Gamma(\nu+\mu+m+2n+2)}{n!\,\Gamma(\mu+m+n+2)\Gamma(\nu+\mu+m+n+2)\Gamma(\nu+n+1)}\right\}
\end{aligned}
\tag{37}
$$

次に，式(34)の右辺の第2項を書き直そう.

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{m/2}\rho_k x^{-1}\bar{R}_{m-2k,\mu+2k+1}(x)\\
&=\sum_{k=0}^{m/2}\rho_k\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{(m-2k)/2}\frac{(m-2k-n)!\,\Gamma(\mu+m-n+1)}{n!(m-2k-2n)!\,\Gamma(\mu+2k+n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2k+2n}\\
&=\frac{1}{x}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m}\sum_{n=0}^{m/2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}\sum_{i=0}^n\rho_i\frac{(m-n-i)!\,\Gamma(\mu+m-n+1+i)}{(m-2n)!\,\Gamma(n-i+1)\Gamma(\mu+n+1+i)}\\
&=\frac{1}{x}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m}\sum_{n=0}^{m/2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}\sum_{i=0}^\infty\rho_i\frac{(m-n-i)!\,\Gamma(\mu+m-n+1+i)}{(m-2n)!\,\Gamma(n-i+1)\Gamma(\mu+n+1+i)}\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-\mu-m-1}\sum_{n=0}^{m/2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}\frac{\Gamma(\mu+1)\Gamma(m-n+1)\Gamma(\mu+m-n+1)}{n!(m-2n)!\,\Gamma(\nu+1)\Gamma(\mu+n+1)}\\
&\quad\times\sum_{i=0}^\infty\frac{(\mu)_i(\mu-\nu)_i\left(\frac{\mu}{2}+1\right)_i(\mu+m-n+1)_i(-n)_i}{i!\left(\frac{\mu}{2}\right)_i(n-m)_i(\nu+1)_i(\mu+n+1)_i}\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-\mu-m-1}\sum_{n=0}^{m/2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}\frac{(-1)^n\Gamma(\mu+m-n+1)\Gamma(\nu-\mu-m+2n)}{n!\,\Gamma(\nu-\mu-m+n)\Gamma(\nu+n+1)}\\
&=\frac{(-1)^{m+1}\pi}{2\sin\mu\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-\mu-m-1}\sum_{n=0}^{m/2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}\frac{\Gamma(\nu-\mu-m+2n)}{n!\,\Gamma(-\mu-m+n)\Gamma(\nu-\mu-m+n)\Gamma(\nu+n+1)}
\end{aligned}
\tag{38}
$$

上式において示した式の変形（簡単化）において，関係式(28)を用いた.

式(37)と(38)を式(34)に代入すると，次式を得る．

$$\begin{aligned}\Psi_{\nu,\mu,m}(x)=&\frac{1}{I_\nu(x)K_{\mu+m+1}(x)}\Bigg[\frac{(-1)^{m+1}\pi}{2\sin\mu\pi}\\&\times\Bigg\{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-\mu-m-1}\sum_{n=m/2+1}^{\infty}\frac{\Gamma(\nu-\mu-m+2n)(x/2)^{2n}}{n!\Gamma(-\mu-m+n)\Gamma(\nu-\mu-m+n)\Gamma(\nu+n+1)}\\&-\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+\mu+m+1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\nu+\mu+m+2n+2)(x/2)^{2n}}{n!\Gamma(\mu+m+n+2)\Gamma(\nu+\mu+m+n+2)\Gamma(\nu+n+1)}\Bigg\}\Bigg]\\=&\frac{1}{I_\nu(x)K_{\mu+m+1}(x)}\Bigg[\frac{(-1)^{m+1}\pi}{2\sin\mu\pi}\\&\times\Bigg\{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-\mu-m-1}\sum_{n=m/2+1}^{\infty}\frac{\Gamma(\nu-\mu-m+2n)(x/2)^{2n}}{n!\Gamma(-\mu-m+n)\Gamma(\nu-\mu-m+n)\Gamma(\nu+n+1)}\\&+\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-\mu-m-1}\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{\Gamma(\nu-\mu-m+2n)(x/2)^{2n}}{n!\Gamma(-\mu-m+n)\Gamma(\nu-\mu-m+n)\Gamma(\nu+n+1)}\\&-\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+\mu+m+1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\nu+\mu+m+2n+2)(x/2)^{2n}}{n!\Gamma(\mu+m+n+2)\Gamma(\nu+\mu+m+n+2)\Gamma(\nu+n+1)}\Bigg\}\Bigg]\end{aligned}\tag{39}$$

このようにして，次式に示す $\Psi_{\nu,\mu,m}(x)$ の表式を得ることができる．

$$\begin{aligned}\Psi_{\nu,\mu,m}(x)=&\Bigg[\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-\mu-m-1}\sum_{n=m/2+1}^{m}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}\frac{(-1)^n\Gamma(\mu+m-n+1)\Gamma(\nu-\mu-m+2n)}{n!\Gamma(\nu-\mu-m+n)\Gamma(\nu+n+1)}\\&+\Bigg\{\left(\frac{x}{2}\right)^{-\mu}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\nu-\mu+m+2n+2)(x/2)^{2n}}{(n+m+1)!\Gamma(-\mu+n+1)\Gamma(\nu-\mu+n+1)\Gamma(\nu+m+n+2)}\\&-\left(\frac{x}{2}\right)^{\mu}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\nu+\mu+m+2n+2)(x/2)^{2n}}{n!\Gamma(\mu+m+n+2)\Gamma(\nu+\mu+m+n+2)\Gamma(\nu+n+1)}\Bigg\}\\&\times\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+m+1}\frac{(-1)^{m+1}\pi}{2\sin\mu\pi}\Bigg]\Big/\{I_\nu(x)K_{\mu+m+1}(x)\}\end{aligned}\tag{40}$$

$\nu-\mu$ が整数に非常に近くなければ，式(40)の[ ]の第2の部分は，第1の部分と比べて無視できるほど小さい．そのとき，第1の部分において，x/m^2 が小さいならば，その初項 $(n=m/2+1)$ が主要項である．したがって，$\Psi_{\nu,\mu,m}(x)$ の評価式として，

$$\Psi_{\nu,\mu,m}(x)\approx\frac{1/2(-1)^{m/2+1}(x/2)^{\nu-\mu+1}\Gamma(\mu+m/2)\Gamma(\nu-\mu+2)}{(m/2+1)!\Gamma(\nu-\mu-m/2+1)\Gamma(\nu+m/2+2)I_\nu(x)K_{\mu+m+1}(x)}\tag{41}$$

を得る．ただし，上式が零，あるいは，零に非常に近い値となる場合すなわち $\nu-\mu$ が整数 $-1, 0, \cdots, m/2-1$ に非常に近い場合を除く．

式(40)の[ ]の第1の部分は，$\nu-\mu=-1$ あるいは0の場合には零となる．$\nu-\mu$ が $-1\leq\nu-\mu\ll m/2$ における整数である場合には，$\Psi_{\nu,\mu,m}(x)$ は非常に小さくなることがわかるであろう．

表2(a)および表2(b)には，表題の場合の $\Psi_{\nu,\mu,m}(x)$ に対して，$\nu-\mu$ が -1 のときおよび -1 に近いときについて，式(23)の計算値と評価式(41)の比較を示している．表2(a)，表2(b)以外の場合も同様であり，式(41)は $\nu-\mu$ が整数から，ほんの少しでも離れていれば，評価式として有効であるということができる．

6. $I_\nu(x)$ の計算について

与えられた ν と x，および，適当に選ばれた μ に対して，式(21)および(22)の両方を同時に満足する最小の m を M' とする（後述するように，$\nu\geq-1$ のときには，この最小値 M' は式(21)を満足する m の最小値 M と一致する）．そのとき，式(3)において，能率の観点から m を M' と選んだものを出発値として，漸化式(4)を繰り返し適用することにより得られた $G_{\mu+m-1}(x), G_{\mu+m-2}(x), \cdots, G_\mu(x)$ の値を式(20)に代入すれば，原理的には，$I_\nu(x)$ を10進 p 桁の精度で求めることができることになる．しかし，これは有効桁の減少がないときに実現できるということに注意しなければならない．

式(20)の右辺に注目しよう．$\mu\geq0$ であるので，

$\epsilon_k(k=0, 1, \cdots)$ は正である．$\rho_k(k=0, 1, \cdots)$ は，μ および ν の値によって，同符号になる場合とそうでない場合がある．したがって，式(20)の右辺において，項の和の計算では桁落ちの可能性がある．また，固定された ν, m および x に対して，式(20)による $I_\nu(x)$ の精度は，μ が小さいほど高い．それゆえ，桁落ちが問題にならないならば，μ はなるべく小さくとると，同じ精度を達成する m は少なくて済むので能率的である．

$I_\nu(x)$ を精度よく（桁落ちなしに，あるいは，ほとんど桁落ちなしに）計算するためには，以下に述べるように，x および ν の値によっては，μ を適当に選ぶ必要がある．

$\nu \geq -1$ の場合には，$\mu \geq \nu$ と選べば，式(20)の右辺の項は同符号となり，桁落ちはない．$\mu < \nu$ と選んでも，$\mu \approx \nu$ であれば（例えば，$\nu=3.7$, $\mu=3$），その和の計算において桁落ちは無視できる程度に小さい．したがって，$I_\nu(x)$ を精度よく計算するためには，$\mu \approx \nu$ ととればよい（μ を整数に選べば，ϵ_k にはガンマ関数の計算が不要となるので有利である）．ただし，$0 \leq x < 2$ あるいは $x \approx 2$ では，$\nu \gg 1$ のとき，$\mu=0$ と選んでも桁落ちはほとんどないので，そのように選べば能率的である．$x \gg 2$ では，$\nu \gg 1$ のときには，$\mu=0$ と選ぶと，式(20)の右辺の計算において桁落ちが生じる．例えば，$x=20$, $\nu=18.3$, $m=20$ のとき，$\mu=0$ と選ぶと，約5桁の桁落ちが起こる．この場合には，$\mu=19$ あるいは 18 と選べば安全である．また，桁落ちは，x 以外の条件が同じとき，x が大きくなればなるほど大きい．

$\nu < -1$ の場合には，式(20)の右辺の分子の項は同符号にはならない．μ の値を大きく選ぶほど，式(20)の右辺の桁落ちは少なくなるが，$\mu \approx |\nu|$ と選べば，桁落ちは高々 10 進 1 桁程度であるので十分と考えられる．$0 \leq x < 2$ あるいは $x \approx 2$ では，$|\nu| \gg 1$ のとき，$\mu=0$ と選んでも桁落ちはほとんどないので，そのように選べば能率的である．

表 2(a) $x=10$, $m=20$, $\nu=2.3$ の場合の $\Psi_{\nu,\mu,m}(x)$

Table 2(a) $\Psi_{\nu,\mu,m}(x)$ in the case of $x=10$, $m=20$, $\nu=2.3$.

	$\mu = 3.3$	$\mu = 3.300000001$	$\mu = 3.3000001$	$\mu = 3.30001$
$\Psi_{\nu,\mu,m}(x)$	1.39×10^{-20}	2.72×10^{-20}	1.34×10^{-18}	1.33×10^{-16}
$\Psi_{\nu,\mu,m}(x)$ の評価式(41)の値	0	1.32×10^{-20}	1.32×10^{-18}	1.32×10^{-16}

表 2(b) $x=10$, $m=20$, $\nu=-0.75$ の場合の $\Psi_{\nu,\mu,m}(x)$

Table 2(b) $\Psi_{\nu,\mu,m}(x)$ in the case of $x=10$, $m=20$, $\nu=-0.75$.

	$\mu = 0.25$	$\mu = 0.2500001$	$\mu = 0.250001$	$\mu = 0.25001$
$\Psi_{\nu,\mu,m}(x)$	1.18×10^{-16}	2.67×10^{-16}	1.60×10^{-15}	1.50×10^{-14}
$\Psi_{\nu,\mu,m}(x)$ の評価式(41)の値	0	1.48×10^{-16}	1.48×10^{-15}	1.48×10^{-14}

表 3(a) $x=2$, $m=8$ の場合の $\Phi_{\mu,m}(x)$ および $\Psi_{\nu,\mu,m}(x)$

Table 3(a) $\Phi_{\mu,m}(x)$ and $\Psi_{\nu,\mu,m}(x)$ in the case of $x=2$, $m=8$.

	$\nu = 5.3$ $\mu = 6$	$\nu = 5.3$ $\mu = 6.3$	$\nu = 5.3$ $\mu = 0$
$I_\nu(x)$ の近似式(20)の値	$5.79790756948 \times 10^{-3}$	$5.79792011789 \times 10^{-3}$	$5.79769433158 \times 10^{-3}$
上記の値の相対精度 $\Delta_{\nu,\mu}(x)$	3.76×10^{-5}	3.98×10^{-5}	8.56×10^{-7}
$\Phi_{\mu,m}(x)$	3.76×10^{-5}	3.98×10^{-5}	8.25×10^{-7}
$\Phi_{\mu,m}(x)$ の評価式(31)の値	3.36×10^{-5}	3.54×10^{-5}	8.44×10^{-7}
$\Psi_{\nu,\mu,m}(x)$	-3.11×10^{-12}	1.03×10^{-20}	-3.18×10^{-8}
$\Psi_{\nu,\mu,m}(x)$ の評価式(41)の値	-3.11×10^{-12}	0	-3.58×10^{-8}
	$\nu = -0.65$ $\mu = 0.3$	$\nu = -0.65$ $\mu = 0.35$	$\nu = -0.65$ $\mu = 0.4$
$I_\nu(x)$ の近似式(20)の値	$1.99406575759 \times 10^{0}$	$1.99406603336 \times 10^{0}$	$1.99406631690 \times 10^{0}$
上記の値の相対精度 $\Delta_{\nu,\mu}(x)$	1.63×10^{-6}	1.77×10^{-6}	1.91×10^{-6}
$\Phi_{\mu,m}(x)$	1.62×10^{-6}	1.77×10^{-6}	1.93×10^{-6}
$\Phi_{\mu,m}(x)$ の評価式(31)の値	1.63×10^{-6}	1.78×10^{-6}	1.93×10^{-6}
$\Psi_{\nu,\mu,m}(x)$	-1.43×10^{-8}	2.24×10^{-12}	1.61×10^{-8}
$\Psi_{\nu,\mu,m}(x)$ の評価式(41)の値	-1.42×10^{-8}	0	1.61×10^{-8}
	$\nu = -4.65$ $\mu = 5$	$\nu = -4.65$ $\mu = 0$	$\nu = -4.65$ $\mu = 5, m = 12$
$I_\nu(x)$ の近似式(20)の値	$3.14404654717 \times 10^{0}$	$3.14519599004 \times 10^{0}$	$3.15303786036 \times 10^{0}$
上記の値の相対精度 $\Delta_{\nu,\mu}(x)$	-2.86×10^{-3}	-2.49×10^{-3}	-6.39×10^{-6}
$\Phi_{\mu,m}(x)$	3.03×10^{-5}	8.25×10^{-7}	5.11×10^{-9}
$\Phi_{\mu,m}(x)$ の評価式(31)の値	2.74×10^{-5}	8.44×10^{-7}	4.82×10^{-9}
$\Psi_{\nu,\mu,m}(x)$	2.89×10^{-3}	2.49×10^{-3}	6.39×10^{-6}
$\Psi_{\nu,\mu,m}(x)$ の評価式(41)の値	2.72×10^{-3}	2.44×10^{-3}	6.31×10^{-6}

表 3(b) $x=10$, $m=20$ の場合の $\Phi_{\mu,m}(x)$ および $\Psi_{\nu,\mu,m}(x)$

Table 3(b) $\Phi_{\nu,m}(x)$ and $\Psi_{\nu,\mu,m}(x)$ in the case of $x=10$, $m=20$.

	$\nu=8.6$ $\mu=9$	$\nu=8.6$ $\mu=9.6$	$\nu=8.6$ $\mu=0$
$I_\nu(x)$ の近似式(20)の値	$7.26209575979\times10^{1}$	$7.26210799043\times10^{1}$	$7.26203570087\times10^{1}$
上記の値の相対精度$\Delta_{\nu,\mu}(x)$	8.27×10^{-6}	9.96×10^{-6}	2.79×10^{-9}
$\Phi_{\mu,m}(x)$	8.27×10^{-6}	9.96×10^{-6}	2.79×10^{-9}
$\Phi_{\mu,m}(x)$ の評価式(31)の値	6.64×10^{-6}	7.92×10^{-6}	2.85×10^{-9}
$\Psi_{\nu,\mu,m}(x)$	-4.78×10^{-16}	3.06×10^{-27}	1.85×10^{-13}
$\Psi_{\nu,\mu,m}(x)$ の評価式(41)の値	-4.77×10^{-16}	0	2.22×10^{-13}
	$\nu=-0.75$ $\mu=0.2$	$\nu=-0.75$ $\mu=0.25$	$\nu=-0.75$ $\mu=0.3$
$I_\nu(x)$ の近似式(20)の値	$2.73332857300\times10^{3}$	$2.73332857499\times10^{3}$	$2.73332857715\times10^{3}$
上記の値の相対精度$\Delta_{\nu,\mu}(x)$	5.35×10^{-9}	6.08×10^{-9}	6.87×10^{-9}
$\Phi_{\mu,m}(x)$	5.28×10^{-9}	6.08×10^{-9}	6.95×10^{-9}
$\Phi_{\mu,m}(x)$ の評価式(31)の値	5.35×10^{-9}	6.14×10^{-9}	7.01×10^{-9}
$\Psi_{\nu,\mu,m}(x)$	-6.67×10^{-11}	1.18×10^{-18}	8.24×10^{-11}
$\Psi_{\nu,\mu,m}(x)$ の評価式(41)の値	-6.64×10^{-11}	0	8.21×10^{-11}
	$\nu=-6.75$ $\mu=7$	$\nu=-6.75$ $\mu=0$	$\nu=-6.75$ $\mu=7, m=30$
$I_\nu(x)$ の近似式(20)の値	$2.73022755651\times10^{2}$	$2.78966772778\times10^{2}$	$2.81223843728\times10^{2}$
上記の値の相対精度$\Delta_{\nu,\mu}(x)$	-2.92×10^{-2}	-8.03×10^{-3}	-4.58×10^{-7}
$\Phi_{\mu,m}(x)$	3.97×10^{-6}	2.79×10^{-9}	1.23×10^{-12}
$\Phi_{\mu,m}(x)$ の評価式(31)の値	3.30×10^{-6}	2.85×10^{-9}	1.12×10^{-12}
$\Psi_{\nu,\mu,m}(x)$	2.92×10^{-2}	8.03×10^{-3}	4.58×10^{-7}
$\Psi_{\nu,\mu,m}(x)$ の評価式(41)の値	2.54×10^{-2}	7.64×10^{-3}	4.44×10^{-7}

表 3(c) $x=25$, $m=34$ の場合の $\Phi_{\mu,m}(x)$ および $\Psi_{\nu,\mu,m}(x)$

Table 3(c) $\Phi_{\mu,m}(x)$ and $\Psi_{\nu,\mu,m}(x)$ in the case of $x=25$, $m=34$.

	$\nu=11.4$ $\mu=12$	$\nu=11.4$ $\mu=12.4$	$\nu=11.4$ $\mu=0$
$I_\nu(x)$ の近似式(20)の値	$4.26413098070\times10^{8}$	$4.26413640793\times10^{8}$	$4.26409722674\times10^{8}$
上記の値の相対精度$\Delta_{\nu,\mu}(x)$	7.92×10^{-6}	9.19×10^{-6}	4.91×10^{-11}
$\Phi_{\mu,m}(x)$	7.92×10^{-6}	9.19×10^{-6}	4.91×10^{-11}
$\Phi_{\mu,m}(x)$ の評価式(31)の値	5.81×10^{-6}	6.69×10^{-6}	5.00×10^{-11}
$\Psi_{\nu,\mu,m}(x)$	-4.74×10^{-18}	-2.95×10^{-28}	-1.56×10^{-17}
$\Psi_{\nu,\mu,m}(x)$ の評価式(41)の値	-4.73×10^{-18}	0	-1.39×10^{-17}
	$\nu=-0.25$ $\mu=0.7$	$\nu=-0.25$ $\mu=0.75$	$\nu=-0.25$ $\mu=0.8$
$I_\nu(x)$ の近似式(20)の値	$5.76719611414\times10^{9}$	$5.76719611444\times10^{9}$	$5.76719611477\times10^{9}$
上記の値の相対精度$\Delta_{\nu,\mu}(x)$	4.16×10^{-10}	4.68×10^{-10}	5.26×10^{-10}
$\Phi_{\mu,m}(x)$	4.15×10^{-10}	4.68×10^{-10}	5.27×10^{-10}
$\Phi_{\mu,m}(x)$ の評価式(31)の値	4.12×10^{-10}	4.64×10^{-10}	5.21×10^{-10}
$\Psi_{\nu,\mu,m}(x)$	-6.41×10^{-13}	1.69×10^{-20}	8.32×10^{-13}
$\Psi_{\nu,\mu,m}(x)$ の評価式(41)の値	-6.38×10^{-13}	0	8.29×10^{-13}
	$\nu=-7.25$ $\mu=8$	$\nu=-7.25$ $\mu=0$	$\nu=-7.25$ $\mu=0.8, m=44$
$I_\nu(x)$ の近似式(20)の値	$1.98304719887\times10^{9}$	$1.98998863520\times10^{9}$	$1.99041144822\times10^{9}$
上記の値の相対精度$\Delta_{\nu,\mu}(x)$	-3.70×10^{-3}	-2.13×10^{-4}	-9.91×10^{-7}
$\Phi_{\mu,m}(x)$	1.23×10^{-6}	4.91×10^{-11}	2.27×10^{-11}
$\Phi_{\mu,m}(x)$ の評価式(31)の値	9.81×10^{-7}	5.00×10^{-11}	1.97×10^{-11}
$\Psi_{\nu,\mu,m}(x)$	3.70×10^{-3}	2.13×10^{-4}	9.91×10^{-7}
$\Psi_{\nu,\mu,m}(x)$ の評価式(41)の値	3.17×10^{-3}	2.05×10^{-4}	9.32×10^{-7}

$I_\nu(x)$ の相対精度 $\Delta_{\nu,\mu}(x)$ は，式(19)より，

$$\Delta_{\nu,\mu}(x)=\frac{\Phi_{\mu,m}(x)-\Psi_{\nu,\mu,m}(x)}{1-\Phi_{\mu,m}(x)} \tag{42}$$

と表され，さらに $|\Phi_{\mu,m}(x)|\ll 1$ のときには，

$$\Delta_{\nu,\mu}(x)\approx\Phi_{\mu,m}(x)-\Psi_{\nu,\mu,m}(x) \tag{43}$$

と表される．

表3(a)，表3(b)および表3(c)には，表題に記されている x, m に対して，$I_\nu(x)$ の近似式(20)の値，その相対精度 $\Delta_{\nu,\mu}(x)$，$\Phi_{\mu,m}(x)$ の値（式(14)の計算値），その評価式(31)の値，$\Psi_{\nu,\mu,m}(x)$ の値（式(23)の計算値），および，その評価式(41)の値を示す．ただし，それぞれの表の最後のものについては，m は表題のものではなくて，表中に指定したものとする．表3(a)を見よう．$\nu-\mu=-1$ のときには，$\Psi_{\nu,\mu,m}(x)$ が小さくなることを示している．$\nu=-4.65$, $\mu=5$ の場合，$I_\nu(x)$ の精度を10進で3桁程度高くするためには，m を8から12に増す必要があることがわかるであろう．表3(b)および表3(c)についても同様なことがいえる．

また，いろいろな数値実験の結果から，$\nu\geq-1$ の

ときには，$|\Phi_{\mu,m}(x)|>|\Psi_{\nu,\mu,m}(x)|$ であることがわかった（理論的な証明には成功していないが）．そのとき，式(21)が満たされれば，式(22)は自動的に満たされることになるので，$I_\nu(x)$ の値が，式(20)により，10進 p 桁の精度で計算できるためには，$|\Phi_{\mu,m}(x)|<0.5\times10^{-p}$ が満足されればよいことになる．したがって，式(21)（=式(16)）を満足する m の最小値 M（$|\Phi_{\mu,M}(x)|>|\Psi_{\nu,\mu,M}(x)|$ であるので，この M は前述の M' と等しい）を m の値とすれば，その精度で $I_\nu(x)$ を計算できることになる．

7. おわりに

本論文では，式(1)の有限項で打ち切ったものに，漸化式を用いる方法で計算された $I_{\mu+2k}(x)(\mu\geq0)$ を代入することにより得られる $I_\nu(x)$ の近似式(20)の誤差解析を行い，誤差の表示式および有用な誤差の評価式を与えた．また，数値実験の結果を示し，評価式が有効であることを例証した．

謝辞　日頃，有益なご助言をいただく本学二宮市三教授に深謝します．

参考文献

1) Watson, G. N.: *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, p. 139, Cambridge University Press (1966).

2) 二宮市三：漸化式による Bessel 関数の計算，電子計算機のための数値計算法 II，pp. 103-121，培風館，東京 (1965).

3) 牧之内三郎：漸化式を用いる $I_\nu(x)$ の近似計算，情報処理，Vol. 6, No. 5, pp. 247-252 (1965).

4) 吉田年雄ほか：漸化式を用いる複素変数のベッセル関数 $I_n(z)$ の数値計算，情報処理，Vol. 14, No. 1, pp. 23-29 (1973).

5) Slater, L. J.: *Generalized Hypergeometric Functions*, p. 56, Cambridge University Press (1966).

6) Abramowitz, M. and Stegun, I. A.: *Handbook of Mathematical Functions*, p. 510, Dover, New York (1968).

7) 犬井鉄郎：特殊函数，p. 165，岩波書店，東京 (1976).

（平成元年 11 月 27 日受付）
（平成 2 年 4 月 17 日採録）

吉田　年雄（正会員）

昭和 19 年名古屋市生．昭和 43 年慶応義塾大学工学部電気工学科卒業．昭和 45 年名古屋大学大学院工学研究科修士課程（電子工学専攻）修了．昭和 48 年同博士課程満了．同年名古屋大学工学部助手．昭和 60 年同講師．昭和 61 年中部大学工学部助教授，昭和 63 年同経営情報学部に配置換．平成 2 年同教授．数値解析の研究に従事．特殊関数とくにベッセル関数の数値計算法の研究，開発に興味をもっている．工学博士．電子情報通信学会員．