

複合多項式による最小二乗近似の誤差解析†

秦 野 和 郎††

等間隔離散点, $\bar{x}_r = 2\pi r/N$: $0 \leq r \leq N$ 上で関数値が与えられたとき, 複合多項式系 $\{\cos jx, \sin jx | 1 \leq j \leq n-1, x' | 0 \leq j \leq 2m\}$ を使って, すなわち $h(x) = \frac{1}{2} \bar{a}_0' + \sum_{j=1}^{n-1} (\bar{a}_j' \cos jx + \bar{b}_j' \sin jx) + \sum_{j=1}^{2m} \bar{c}_j' x^j$ の形の式を使って元の関数を最小二乗近似すると両端の関数値などが異なるような関数に対しても高精度の近似値を得ることができる. また, Fourier 係数の高精度の近似値を得ることができる. 本論文では複合多項式による最小二乗近似の打ち切り誤差について議論している. この近似法に対する誤差解析の結果, 次のような事実が明白になった. すなわち, この近似法によれば, 両端の関数値や微係数の値が異なるような関数に対して Fourier 係数の近似値を $O(n^{-2m-1})$ 程度の誤差で計算することができ, また $O(n^{-2m})$ 程度の誤差で元の関数を近似できる. さらに, この計算法は $2m$ 次以下の多項式および, $n-1$ 次以下の三角多項式を再現することがわかった.

1. はじめに

等間隔離散点上で観測データが与えられたとき三角多項式を使ってそれらのデータをあてはめる手法, すなわち三角多項式による最小二乗近似は FFT (高速 Fourier 変換) の重要な応用として多くの分野で使われている. 特にこのようにして得られた三角多項式の係数, すなわち離散 Fourier 係数が Fourier 係数の近似値となることからこの方法はスペクトル解析の分野等において基本的な手法の一つになっている¹⁾.

観測データが周期関数の整数周期分を正しくサンプリングして得られたデータならこの手法はきわめて好ましい結果を与える. このような場合には離散 Fourier 係数は一般に次数が増えるにつれてその絶対値が急速に減少するので少ないパラメータで観測データを表現することができる. しかし観測データが周期関数をサンプリングして得られたデータでなかったり周期関数であっても整数周期分をサンプリングして得られたデータでなければ三角多項式を使ったあてはめは一般に好ましい結果を与えない. この不都合は両端の関数値や微係数の値が異なるような関数から得られたデータを, 両端の関数値や微係数の値が常に一致する三角多項式を使って無理にあてはめようとすることにその原因がある.

文献 4) に与えられている複合多項式による最小二乗近似の手法は三角多項式による最小二乗近似を改善した手法である. この手法によれば両端の関数値や微

係数の値が異なっても Fourier 係数の良好な近似値を得ることができる. また, 三角多項式を使った最小二乗近似では両端付近にしばしば奇妙な振動を生ずるが複合多項式による最小二乗近似ではこのような不都合を生じない. しかし, 文献 4) ではこれらのことについて, 二の数値例を使って確認しているに過ぎないのでその結果には一般性がない. 一般性を持たせるためには誤差解析が必要である.

本論文では複合多項式による最小二乗近似の手法が一般的に好ましい結果を与える事実を誤差解析により確認する.

2. 離散 Fourier 係数の誤差

本章では十分に滑らかな関数に対する, 台形則による離散 Fourier 係数の誤差を導く. 本章の内容は文献 3) に与えられている結果の特別な場合であるが, 後章で使う記号を導入するために必要であるから, 簡潔に記述する. また, 後章での参照のために複合多項式近似の誤差について述べる.

さて, m を自然数として

$$\begin{cases} f(x) \in C^{2m}[0, 2\pi], \\ \|f^{(2m+1)}\|_{\infty} = \sup_{0 \leq x \leq 2\pi} |f^{(2m+1)}(x)| < \infty. \end{cases} \quad (2.1)$$

を満たし

$$f(0) = f(2\pi) = \{f(0+) + f(2\pi-)\} / 2. \quad (2.2)$$

であるような実関数 $f(x)$ の全体を $W^{2m}[0, 2\pi]$ とする.

$f(x) \in W^{2m}[0, 2\pi]$ は

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0(f) + \sum_{j=1}^{\infty} \{a_j(f) \cos jx + b_j(f) \sin jx\}. \quad (2.3)$$

† Error Analysis of the Least-Squares Approximation by Composite Polynomials by KAZUO HATANO (Department of Electronics, Faculty of Engineering, Aichi Institute of Technology).

†† 愛知工業大学工学部電子工学科

$$\begin{cases} a_j(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos jx dx : 0 \leq j. \\ b_j(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin jx dx : 1 \leq j. \end{cases} \quad (2.4)$$

と Fourier 展開される.

$f(x) \in W^{2m}[0, 2\pi]$ の値が閉区間 $[0, 2\pi]$ 上の等間隔離散点

$$x = \bar{x}_r = 2\pi r/N : 0 \leq r \leq N. \quad (2.5)$$

において与えられるとする. すなわち $f_r = f(\bar{x}_r) : 0 \leq r \leq N$ が与えられるとする. ただし, f_0, f_N の二つについてはそれぞれ $f(0+), f(2\pi-)$ であるとする. また簡単のために以下では N は偶数であるとする.

$f(x) \in W^{2m}[0, 2\pi]$ に対する, 台形則による離散 Fourier 係数を

$$\begin{cases} \bar{u}_j(f) = \frac{2}{N} \sum_{r=0}^{N/2} f(\bar{x}_r) \cos j\bar{x}_r : 0 \leq j \leq N/2. \\ \bar{v}_j(f) = \frac{2}{N} \sum_{r=0}^{N/2-1} f(\bar{x}_r) \sin j\bar{x}_r : 1 \leq j \leq N/2-1. \end{cases} \quad (2.6)$$

と定義する. ここで

$$\sum_{r=0}^{N/2} A(r) = \frac{1}{2} A(0) + \sum_{r=0}^{N/2-1} A(r) + \frac{1}{2} A(N). \quad (2.7)$$

である.

さて, 式(2.6)に式(2.3)を代入し三角関数の周期性, 対称性を使うと, 離散 Fourier 係数と Fourier 係数との間の関係

$$\begin{cases} \bar{u}_j(f) = a_j(f) + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_{kN+j}(f) + a_{kN-j}(f)\} : \\ \quad 0 \leq j \leq N/2. \\ \bar{v}_j(f) = b_j(f) + \sum_{k=1}^{\infty} \{b_{kN+j}(f) - b_{kN-j}(f)\} : \\ \quad 1 \leq j \leq N/2-1. \end{cases} \quad (2.8)$$

を得る (Aliasing の式)¹⁾.

次に式(2.4)で与えられる Fourier 係数に部分積分を反復適用し,

$$\omega_i(f) = \{f^{(i)}(2\pi-) - f^{(i)}(0+)\} / \pi. \quad (2.9)$$

とおくと Fourier 係数は

$$\begin{cases} a_j(f) = \sum_{i=1}^m \frac{(-1)^{i-1}}{j^{2i}} \omega_{2i-1}(f) \\ \quad + \frac{(-1)^{m+1}}{\pi j^{2m+1}} \int_0^{2\pi} f^{(2m+1)}(t) \sin jtdt \\ \quad : 1 \leq j. \\ b_j(f) = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(-1)^{i-1}}{j^{2i+1}} \omega_{2i}(f) \end{cases}$$

$$\begin{cases} + \frac{(-1)^{m+1}}{\pi j^{2m+1}} \int_0^{2\pi} f^{(2m+1)}(t) (1 - \cos jt) dt \\ \quad : 1 \leq j. \end{cases} \quad (2.10)$$

と書き改められる (Fourier 係数の漸近展開式)^{2), 3)}.

これを式(2.8)の右辺第二項に代入すると離散 Fourier 係数の誤差を与える式

$$\begin{cases} \bar{u}_j(f) - a_j(f) = \sum_{i=1}^m \frac{(-1)^{i-1}}{N^{2i}} \bar{\delta}_{2i} \left(\frac{j}{N} \right) \omega_{2i-1}(f) \\ \quad + \frac{(-1)^{m+1}}{\pi N^{2m+1}} \int_0^{2\pi} f^{(2m+1)}(t) \bar{\alpha}_{2m+1} \left(Nt; \frac{j}{N} \right) dt \\ \quad : 0 \leq j \leq N/2. \\ \bar{v}_j(f) - b_j(f) = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(-1)^{i-1}}{N^{2i+1}} \bar{\delta}_{2i+1} \left(\frac{j}{N} \right) \omega_{2i}(f) \\ \quad + \frac{(-1)^{m+1}}{\pi N^{2m+1}} \int_0^{2\pi} f^{(2m+1)}(t) \\ \quad \cdot \left\{ \bar{\delta}_{2m+1} \left(\frac{j}{N} \right) - \bar{\beta}_{2m+1} \left(Nt; \frac{j}{N} \right) \right\} dt \\ \quad : 1 \leq j \leq N/2-1. \end{cases} \quad (2.11)$$

を得ることができる. ただし, ここで

$$\begin{cases} \bar{\delta}_i(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(k+x)^i} + \frac{(-1)^i}{(k-x)^i} \right\}. \\ \bar{\alpha}_{2m+1}(t; x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\sin(k+x)t}{(k+x)^{2m+1}} + \frac{\sin(k-x)t}{(k-x)^{2m+1}} \right\}. \\ \bar{\beta}_{2m+1}(t; x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\cos(k+x)t}{(k+x)^{2m+1}} - \frac{\cos(k-x)t}{(k-x)^{2m+1}} \right\}. \end{cases} \quad (2.12)$$

である. $\bar{\alpha}_{2m+1}(t; x), \bar{\beta}_{2m+1}(t; x)$ の定義は文献3)のそれと符号を除いて同じである.

後の参照のために, 離散 Fourier 係数の別の表現を導く. 式(2.10), (2.11)より離散 Fourier 係数は次の形で与えられる.

$$\begin{cases} \bar{u}_j(f) = \sum_{i=1}^m \frac{(-1)^{i-1}}{N^{2i}} \bar{v}_{2i} \left(\frac{j}{N} \right) \omega_{2i-1}(f) \\ \quad + \frac{(-1)^{m+1}}{\pi N^{2m+1}} \int_0^{2\pi} f^{(2m+1)}(t) \bar{\alpha}_{2m+1} \left(Nt; \frac{j}{N} \right) dt \\ \quad : 1 \leq j \leq N/2. \\ \bar{v}_j(f) = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(-1)^{i-1}}{N^{2i+1}} \bar{v}_{2i+1} \left(\frac{j}{N} \right) \omega_{2i}(f) \\ \quad + \frac{(-1)^{m+1}}{\pi N^{2m+1}} \int_0^{2\pi} f^{(2m+1)}(t) \\ \quad \cdot \left\{ \bar{v}_{2m+1} \left(\frac{j}{N} \right) - \bar{\beta}_{2m+1} \left(Nt; \frac{j}{N} \right) \right\} dt \\ \quad : 1 \leq j \leq N/2-1. \end{cases} \quad (2.13)$$

ここで

$$\begin{cases} \bar{v}_i(x) = 1/x^i + \bar{\delta}_i(x). \\ \bar{\alpha}_{2m+1}(t; x) = \frac{\sin xt}{x^{2m+1}} + \bar{\alpha}_{2m+1}(t; x). \end{cases}$$

$$\left| \beta_{2m+1}(t; x) = \frac{\cos xt}{x^{2m+1}} + \bar{\beta}_{2m+1}(t; x). \right. \quad (2.14)$$

である。

文献 5) によれば $f(x) \in W_{2m}^{2m}[0, 2\pi]$ に対する複合多項式近似,

$$H \left\{ \begin{matrix} 2m \\ n \end{matrix} \right\} (f; x) = \frac{1}{2} a_0(f) + \sum_{j=1}^{n-1} \{ a_j(f) \cos jx + b_j(f) \sin jx \} + \sum_{i=1}^{2m} c_i(f; n) q_i(x; n). \quad (2.15)$$

$$c_i(f; n) = \omega_{i-1}(f) / n^i. \quad (2.16)$$

の誤差は

$$f(x) - H \left\{ \begin{matrix} 2m \\ n \end{matrix} \right\} (f; x) = \frac{1}{\pi n^{2m+1}} \int_0^{2\pi} f^{(2m+1)}(t) \cdot \{ q_{2m+1}(x; n) - q_{2m+1}(x-t; n) \} dt. \quad (2.17)$$

で与えられる。ここで $q_i(x; n)$ は

$$\left\{ \begin{matrix} q_{2i}(x; n) = (-1)^{i-1} n^{2i} \sum_{j=n}^{\infty} \frac{\cos jx}{j^{2i}} & : 1 \leq i. \\ q_{2i+1}(x; n) = (-1)^{i-1} n^{2i+1} \sum_{j=n}^{\infty} \frac{\sin jx}{j^{2i+1}} & : 0 \leq i. \end{matrix} \right. \quad (2.18)$$

で定義される関数で、三角多項式と多項式との和⁴⁾である。

3. 複合多項式による最小二乗近似

本章では後章で参照するために文献 4) で提案された、複合多項式による最小二乗近似の計算法を記述する。

文献 4) によれば $f(x) \in W_{2m}^{2m}[0, 2\pi]$ の値が等間隔離散点上で与えられたとき、複合多項式の一つの表現

$$h(x) = \frac{1}{2} \bar{a}_0 + \sum_{j=1}^{n-1} \{ \bar{a}_j \cos jx + \bar{b}_j \sin jx \} + \sum_{j=1}^{2m} \bar{c}_j q_j(x; n). \quad (3.1)$$

を使って $f(x)$ を最小二乗近似するには、すなわち

$$J = \frac{2}{N} \left[\frac{1}{2} \{ f_0 - h(0+) \}^2 + \sum_{r=1}^{N-1} \{ f_r - h(\bar{x}_r) \}^2 + \frac{1}{2} \{ f_N - h(2\pi-) \}^2 \right]. \quad (3.2)$$

を最小にするためには式 (3.1) のパラメータを次のように決めればよい。

まず、二つの m 元連立一次方程式

$$\left\{ \begin{matrix} \sum_{j=1}^m \phi_{2i, 2j} \bar{c}_{2j} = w_{2i} & : 1 \leq i \leq m. \\ \sum_{j=0}^{m-1} \phi_{2i+1, 2j+1} \bar{c}_{2j+1} = w_{2i+1} & : 0 \leq i \leq m-1. \end{matrix} \right. \quad (3.3)$$

を解き $\bar{c}_j : 1 \leq j \leq 2m$ を得る。この方程式の係数行列、右辺ベクトルの要素は

$$\left\{ \begin{matrix} \phi_{2i, 2j} = (-1)^{i+j} \left(\frac{n}{N} \right)^{2i+2j} \sum_{s=n}^{N/2(3)} \bar{c}_{2i} \left(\frac{s}{N} \right) \bar{c}_{2j} \left(\frac{s}{N} \right). \\ \phi_{2i+1, 2j+1} = (-1)^{i+j} \left(\frac{n}{N} \right)^{2i+2j+2} \cdot \sum_{s=n}^{N/2} \bar{c}_{2i+1} \left(\frac{s}{N} \right) \bar{c}_{2j+1} \left(\frac{s}{N} \right) \\ \quad (i=j=0 \text{ の場合を除く}). \\ \phi_{1,1} = \frac{2}{N} \left(\frac{\pi n}{2} \right)^2 + \left(\frac{n}{N} \right)^2 \sum_{s=n}^{N/2} \left\{ \bar{c}_1 \left(\frac{s}{N} \right) \right\}^2. \\ w_{2i} = (-1)^{i-1} \left(\frac{n}{N} \right)^{2i} \sum_{s=n}^{N/2(3)} \bar{c}_{2i} \left(\frac{s}{N} \right) \cdot \bar{u}_i(f). \\ w_{2i+1} = (-1)^{i-1} \left(\frac{n}{N} \right)^{2i+1} \sum_{s=n}^{N/2} \bar{c}_{2i+1} \left(\frac{s}{N} \right) \cdot \bar{v}_i(f) \\ \quad (i \neq 0). \\ w_1 = \frac{1}{N} \cdot \frac{\pi n}{2} (f_N - f_0) - \frac{n}{N} \sum_{s=n}^{N/2} \bar{c}_1 \left(\frac{s}{N} \right) \cdot \bar{v}_1(f). \end{matrix} \right. \quad (3.4)$$

で与えられる。ここで、

$$\sum_{s=n}^{N/2(3)} A(s) = \sum_{s=n}^{N/2-1} A(s) + \frac{1}{2} A \left(\frac{N}{2} \right). \quad (3.6)$$

である。

次に $\bar{a}_j : 0 \leq j \leq n-1, \bar{b}_j : 1 \leq j \leq n-1$ を

$$\left\{ \begin{matrix} \bar{a}_j = \bar{u}_j(f) - \sum_{i=1}^m \bar{c}_{2i} (-1)^{i-1} \left(\frac{n}{N} \right)^{2i} \bar{\delta}_{2i} \left(\frac{j}{N} \right). \\ \bar{b}_j = \bar{v}_j(f) - \sum_{i=0}^{m-1} \bar{c}_{2i+1} (-1)^{i-1} \left(\frac{n}{N} \right)^{2i+1} \bar{\delta}_{2i+1} \left(\frac{j}{N} \right). \end{matrix} \right. \quad (3.7)$$

により求める。

次章以降では上のようにして求めた $\bar{a}_j, \bar{b}_j, \bar{c}_i$ をそれぞれ $\bar{a}_j(f), \bar{b}_j(f), \bar{c}_i(f; n)$ と書く。また、式 (3.1) にこれらを代入した式を $\bar{K} \left\{ \begin{matrix} 2m \\ n \end{matrix} \right\} (f; x)$ と書く。すなわち

$$\bar{K} \left\{ \begin{matrix} 2m \\ n \end{matrix} \right\} (f; x) = \frac{1}{2} \bar{a}_0(f) + \sum_{j=1}^{n-1} \{ \bar{a}_j(f) \cos jx + \bar{b}_j(f) \sin jx \} + \sum_{i=1}^{2m} \bar{c}_i(f; n) q_i(x; n). \quad (3.8)$$

である。

4. 複合多項式による最小二乗近似の誤差

本章では、前章で与えられた計算法により得られる諸量の誤差解析を行う。まず、式(2.15)と式(3.8)とを比較するとわかるように、 $\bar{a}_j(f): 0 \leq j \leq n-1$, $\bar{b}_j(f): 1 \leq j \leq n-1$ は式(2.4)で与えられる Fourier 係数の近似値である。また、 $\bar{c}_i(f; n): 1 \leq i \leq 2m$ は、 $c_i(f; n) = \omega_{i-1}(f)/n^i$ の近似値である。すなわち式(2.9)で与えられる、両端の高次微係数の差の定数倍である。また、 $\bar{K} \left\{ \frac{2m}{n} \right\} (f; x)$ は $f(x)$ を近似する。したがってこれらの近似の誤差がどのような形で与えられるかを解析することが本章の主題である。

さて、まず $\bar{c}_i(f; n): 1 \leq i \leq 2m$ の誤差を導く。

式(3.3)の第一式で \bar{c}_{2j} , すなわち $\bar{c}_{2j}(f; n)$ の代わりにその誤差を代入しさらに式(3.3)の第1式を使うと、

$$\sum_{j=1}^m \phi_{2i, 2j} \{ \bar{c}_{2j}(f; n) - \omega_{2j-1}(f)/n^{2j} \} = w_{2i} - \sum_{j=1}^m \phi_{2i, 2j} \omega_{2j-1}(f)/n^{2j}. \quad (4.1)$$

を得ることができる。次に式(3.5)の第一式に式(2.13)の第一式を代入すると、式(4.1)における w_{2i} は

$$w_{2i} = (-1)^{i-1} \left(\frac{n}{N} \right)^{2i} \sum_{s=n}^{N/2(3)} \bar{c}_{2i} \left(\frac{s}{N} \right) \cdot \left[\sum_{j=1}^m \frac{(-1)^{j-1}}{N^{2j}} \bar{c}_{2j} \left(\frac{s}{N} \right) \omega_{2j-1}(f) + \frac{(-1)^{m+1}}{\pi N^{2m+1}} \int_0^{2\pi} f^{(2m+1)}(t) \bar{\alpha}_{2m+1} \left(Nt; \frac{s}{N} \right) dt \right] = \sum_{j=1}^m \phi_{2i, 2j} \omega_{2j-1}(f)/n^{2j} + \frac{(-1)^{m+1}}{\pi N^{2m+1}} (-1)^{i-1} \left(\frac{n}{N} \right)^{2i} \sum_{s=n}^{N/2(3)} \bar{c}_{2i} \left(\frac{s}{N} \right) \cdot \int_0^{2\pi} f^{(2m+1)}(t) \bar{\alpha}_{2m+1} \left(Nt; \frac{s}{N} \right) dt. \quad (4.2)$$

となる。上式を得るに際して式(3.4)の第一式を使った。式(4.2)を式(4.1)に代入すると、 $\bar{c}_{2j}(f; n): 1 \leq j \leq m$ の誤差を未知数とする連立一次方程式は

$$\sum_{j=1}^m \phi_{2i, 2j} \{ \bar{c}_{2j}(f; n) - \omega_{2j-1}(f)/n^{2j} \} = \frac{(-1)^{m+1}}{\pi N^{2m+1}} (-1)^{i-1} \left(\frac{n}{N} \right)^{2i} \sum_{s=n}^{N/2(3)} \bar{c}_{2i} \left(\frac{s}{N} \right) \cdot \int_0^{2\pi} f^{(2m+1)}(t) \bar{\alpha}_{2m+1} \left(Nt; \frac{s}{N} \right) dt. \quad (4.3)$$

となることがわかる。式(4.1)では右辺に $\omega_i(f)$ が現

れているが、式(4.3)の右辺では消滅している。

同じようにして

$$\sum_{j=0}^{m-1} \phi_{2i+1, 2j+1} \{ \bar{c}_{2j+1}(f; n) - \omega_{2j}(f)/n^{2j+1} \} = \frac{(-1)^{m+1}}{\pi N^{2m+1}} (-1)^{i-1} \left(\frac{n}{N} \right)^{2i+1} \sum_{s=n}^{N/2} \bar{c}_{2i+1} \left(\frac{s}{N} \right) \cdot \int_0^{2\pi} f^{(2m+1)}(t) \left\{ \bar{c}_{2m+1} \left(\frac{s}{N} \right) - \beta_{2m+1} \left(Nt; \frac{s}{N} \right) \right\} dt. \quad (4.4)$$

を得ることができる。

連立一次方程式、式(3.3)第一式の係数行列

$$\begin{pmatrix} \phi_{2,2} & \phi_{2,4} & \cdots & \phi_{2,2m} \\ \phi_{4,2} & \phi_{4,4} & \cdots & \phi_{4,2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_{2m,2} & \phi_{2m,4} & \cdots & \phi_{2m,2m} \end{pmatrix}$$

の逆行列を

$$\begin{pmatrix} \psi_{2,2} & \psi_{2,4} & \cdots & \psi_{2,2m} \\ \psi_{4,2} & \psi_{4,4} & \cdots & \psi_{4,2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_{2m,2} & \psi_{2m,4} & \cdots & \psi_{2m,2m} \end{pmatrix}$$

とする。同じように式(3.3)第二式の係数行列

$$\begin{pmatrix} \phi_{1,1} & \phi_{1,3} & \cdots & \phi_{1,2m+1} \\ \phi_{3,1} & \phi_{3,3} & \cdots & \phi_{3,2m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_{2m+1,1} & \phi_{2m+1,3} & \cdots & \phi_{2m+1,2m+1} \end{pmatrix}$$

の逆行列を

$$\begin{pmatrix} \psi_{1,1} & \psi_{1,3} & \cdots & \psi_{1,2m+1} \\ \psi_{3,1} & \psi_{3,3} & \cdots & \psi_{3,2m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_{2m+1,1} & \psi_{2m+1,3} & \cdots & \psi_{2m+1,2m+1} \end{pmatrix}$$

とする。

これらを使うと $\bar{c}_i(f; n): 1 \leq i \leq 2m$ の誤差は式(4.3)および、式(4.4)から

$$\left\{ \begin{aligned} & \bar{c}_{2i}(f; n) - \omega_{2i-1}(f)/n^{2i} \\ & = \frac{(-1)^{m+1}}{\pi N^{2m+1}} \int_0^{2\pi} f^{(2m+1)}(t) \\ & \quad \cdot \sum_{s=n}^{N/2(3)} \left\{ \sum_{j=1}^m \phi_{2i, 2j} (-1)^{j-1} \left(\frac{n}{N} \right)^{2j} \bar{c}_{2j} \left(\frac{s}{N} \right) \right\} \\ & \quad \cdot \bar{\alpha}_{2m+1} \left(Nt; \frac{s}{N} \right) dt. \\ & \bar{c}_{2i+1}(f; n) - \omega_{2i}(f)/n^{2i+1} \\ & = \frac{(-1)^{m+1}}{\pi N^{2m+1}} \int_0^{2\pi} f^{(2m+1)}(t) \\ & \quad \cdot \sum_{s=n}^{N/2} \left\{ \sum_{j=0}^{m-1} \phi_{2i+1, 2j+1} (-1)^{j-1} \right. \\ & \quad \cdot \left. \left(\frac{n}{N} \right)^{2j+1} \bar{c}_{2j+1} \left(\frac{s}{N} \right) \right\} \end{aligned} \right.$$

$$\left[\bar{c}_{2m+1}\left(\frac{s}{N}\right) - \beta_{2m+1}\left(Nt; \frac{s}{N}\right) \right] dt. \quad (4.5)$$

となることがわかる。

以上を使って、次に $\bar{a}_j(f): 0 \leq j \leq n-1, \bar{b}_j(f): 1 \leq j \leq n-1$ の誤差を導く。

まず、式(3.7)第一式の右辺に式(2.11)から得られる $\bar{u}_j(f)$ および式(4.5)から得られる $\bar{c}_{2i}(f; n)$ を代入すると、

$$\begin{aligned} \bar{a}_j(f) &= a_j(f) + \sum_{i=1}^m \frac{(-1)^{i-1}}{N^{2i}} \bar{\delta}_{2i}\left(\frac{j}{N}\right) \omega_{2i-1}(f) \\ &\quad + \frac{(-1)^{m+1}}{\pi N^{2m+1}} \int_0^{2\pi} f^{(2m+1)}(t) \bar{\alpha}_{2m+1}\left(Nt; \frac{j}{N}\right) dt \\ &\quad - \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} \left(\frac{n}{N}\right)^{2i} \bar{\delta}_{2i}\left(\frac{j}{N}\right) \cdot \left[\frac{\omega_{2i-1}(f)}{n^{2i}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(-1)^{m+1}}{\pi N^{2m+1}} \int_0^{2\pi} f^{(2m+1)}(t) \right. \\ &\quad \left. \cdot \sum_{s=n}^{N/2(3)} \left\{ \sum_{k=1}^m \phi_{2i,2k}(-1)^{k-1} \left(\frac{n}{N}\right)^{2k} \bar{c}_{2k}\left(\frac{s}{N}\right) \right\} \right. \\ &\quad \left. \cdot \bar{\alpha}_{2m+1}\left(Nt; \frac{s}{N}\right) dt \right] \\ &= a_j(f) + \frac{(-1)^{m+1}}{\pi N^{2m+1}} \int_0^{2\pi} f^{(2m+1)}(t) \\ &\quad \cdot \left[\bar{\alpha}_{2m+1}\left(Nt; \frac{j}{N}\right) - \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} \right. \\ &\quad \cdot \left(\frac{n}{N}\right)^{2i} \bar{\delta}_{2i}\left(\frac{j}{N}\right) \\ &\quad \left. \cdot \sum_{s=n}^{N/2(3)} \left\{ \sum_{k=1}^m \phi_{2i,2k}(-1)^{k-1} \left(\frac{n}{N}\right)^{2k} \bar{c}_{2k}\left(\frac{s}{N}\right) \right\} \right. \\ &\quad \left. \cdot \bar{\alpha}_{2m+1}\left(Nt; \frac{s}{N}\right) \right] dt. \quad (4.6) \end{aligned}$$

となる。これから $\bar{a}_j(f)$ の誤差は

$$\begin{aligned} \bar{a}_j(f) - a_j(f) &= \frac{(-1)^{m+1}}{\pi N^{2m+1}} \int_0^{2\pi} f^{(2m+1)}(t) \\ &\quad \cdot \left[\bar{\alpha}_{2m+1}\left(Nt; \frac{j}{N}\right) - \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} \left(\frac{n}{N}\right)^{2i} \bar{\delta}_{2i}\left(\frac{j}{N}\right) \right. \\ &\quad \left. \cdot \sum_{s=n}^{N/2(3)} \left\{ \sum_{k=1}^m \phi_{2i,2k}(-1)^{k-1} \left(\frac{n}{N}\right)^{2k} \bar{c}_{2k}\left(\frac{s}{N}\right) \right\} \right. \\ &\quad \left. \cdot \bar{\alpha}_{2m+1}\left(Nt; \frac{s}{N}\right) \right] dt. \quad (4.7) \end{aligned}$$

で与えられることがわかる。同じようにして

$$\begin{aligned} \bar{b}_j(f) - b_j(f) &= \frac{(-1)^{m+1}}{\pi N^{2m+1}} \int_0^{2\pi} f^{(2m+1)}(t) \\ &\quad \cdot \left[\bar{\delta}_{2m+1}\left(\frac{j}{N}\right) - \beta_{2m+1}\left(Nt; \frac{j}{N}\right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{i-1} \left(\frac{n}{N}\right)^{2i+1} \bar{\delta}_{2i+1}\left(\frac{j}{N}\right) \\ &\quad \cdot \sum_{s=n}^{N/2} \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} \phi_{2i+1,2k+1}(-1)^{k-1} \right. \\ &\quad \left. \cdot \left(\frac{n}{N}\right)^{2k+1} \bar{c}_{2k+1}\left(\frac{s}{N}\right) \right\} \\ &\quad \cdot \left[\bar{c}_{2m+1}\left(\frac{s}{N}\right) - \beta_{2m+1}\left(Nt; \frac{s}{N}\right) \right] dt. \quad (4.8) \end{aligned}$$

を得ることができる。

以上では、式(4.7)は $0 \leq j \leq n-1$ に対してのみ成り立ち、式(4.8)は $1 \leq j \leq n-1$ に対してのみ成り立つと考えてきた。実際には式(3.7)を使って $\bar{a}_j(f): 0 \leq j \leq N/2$ および $\bar{b}_j(f): 1 \leq j \leq N/2-1$ を計算することができ、それらの誤差を与える式、式(4.7), (4.8)はそれぞれ $0 \leq j \leq N/2, 1 \leq j \leq N/2-1$ に対して成り立つ。

続いて $\bar{K}\left\{\frac{2m}{n}\right\}(f; x)$ の誤差を導く。まず、

$$\begin{aligned} f(x) - \bar{K}\left\{\frac{2m}{n}\right\}(f; x) &= \left[f(x) - H\left\{\frac{2m}{n}\right\}(f; x) \right] \\ &\quad + \left[H\left\{\frac{2m}{n}\right\}(f; x) - \bar{K}\left\{\frac{2m}{n}\right\}(f; x) \right] \quad (4.9) \end{aligned}$$

である。ここで、右辺第一項は式(2.17)で与えられる。右辺第二項は、式(2.15)および、式(3.8)からその具体的な形がわかる。すなわち複合多項式による最小二乗近似の誤差は

$$\begin{aligned} f(x) - \bar{K}\left\{\frac{2m}{n}\right\}(f; x) &= \frac{1}{\pi n^{2m+1}} \int_0^{2\pi} f^{(2m+1)}(t) \\ &\quad \cdot \{q_{2m+1}(x; n) - q_{2m+1}(x-t; n)\} dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \{a_0(f) - \bar{a}_0(f)\} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n-1} [\{a_j(f) - \bar{a}_j(f)\} \cos jx \\ &\quad + \{b_j(f) - \bar{b}_j(f)\} \sin jx] \\ &\quad + \sum_{i=1}^{2m} \{c_i(f; n) - \bar{c}_i(f; n)\} q_i(x; n). \quad (4.10) \end{aligned}$$

で与えられる。この式に、式(4.5), (4.7), (4.8)を代入すれば誤差の、より具体的な形を得ることができる。しかし、長くなることおよび、後の議論ではそのようにして得られた具体的な式をそのままの形では使

わないので省略する.

以上から諸量の誤差はいずれも

$$E(f) = \int_0^{2\pi} f^{(2m+1)}(t)G(t)dt. \quad (4.11)$$

の形で与えられることがわかる. ここで上式における $G(t)$ がどの場合にも

$$G(t) = \lambda + \sum_{j=n}^{\infty} (\mu_j \cos jt + \nu_j \sin jt). \quad (4.12)$$

の形になることから

- (1) $f(x)$ が $2m$ 次以下の多項式であるか,
- (2) $f(x)$ が $n-1$ 次以下の三角多項式, すなわち $1/2, \{\cos jx, \sin jx \mid 1 \leq j \leq n-1\}$ のみの線形結合のとき,
- (3) $f(x)$ が $2m$ 次以下の多項式と $n-1$ 次以下の三角多項式との和のとき,

には $\bar{c}_i(f; n): 1 \leq i \leq 2m, \bar{a}_j(f): 0 \leq j \leq n-1, \bar{b}_j(f): 1 \leq j \leq n-1, \bar{K} \left\{ \begin{smallmatrix} 2m \\ n \end{smallmatrix} \right\}(f; x)$ の誤差は零になることが

わかる. すなわち, $f(x)$ が $2m$ 次以下の多項式ならば式(4.11)における $f^{(2m+1)}(t)$ は恒等的に零になるし, $f(x)$ が $n-1$ 次以下の三角多項式であれば $f^{(2m+1)}(t)$ は $\{\cos jt, \sin jt \mid 1 \leq j \leq n-1\}$ のみの線形結合になる. 式(4.11)における $G(t)$ には $n-1$ 次以下の三角多項式の成分を含んでいないので $f^{(2m+1)}(t)$ と $G(t)$ との積の一周期にわたる積分は零となるのである.

諸量の誤差を与える式には, 正規方程式の係数行列の逆行列の要素を含んでいる. これらの値がどのようなものかが不明なために, たとえば収束率のような誤差についての重要な性質がわからない. そこで次章では誤差限界を数値的に計算して誤差の性質を検討する.

5. 複合多項式による最小二乗近似の誤差限界

前章の結果を使って本章ではまず, 諸量の誤差限界を導く. 得られる誤差限界には正規方程式の係数行列の, 逆行列の要素を含んでいる. したがってそのままでは誤差限界がどのような性質を持つかがわからない. そこで, ここでは多くの N や $n, 2m$ に対して誤差限界を計算し, ある程度一般的な結論を引き出すことにしたい.

第4章で述べたように諸量の誤差は, 式(4.5), 式(4.7), (4.8), 式(4.10)からわかるように, いずれも

$$E(f) = \int_0^{2\pi} f^{(2m+1)}(t)G(t)dt. \quad (5.1)$$

の形をしている. したがって諸量の誤差限界はそれぞれの式に Hoelder の不等式

$$|E(f)| \leq \|f^{(2m+1)}\| \cdot \int_0^{2\pi} |G(t)| dt. \quad (5.2)$$

および, 必要ならば Minkowski の不等式を適用することにより得ることができる.

まず, いくつかの準備をする. 式(2.12)から

$$\begin{cases} \int_0^{2\pi} \left| \bar{\alpha}_{2m+1} \left(Nt; \frac{j}{N} \right) \right| dt \leq 4\bar{\delta}_{2m+1} \left(\frac{j}{N} \right). \\ \int_0^{2\pi} \left| \bar{\delta}_{2m+1} \left(\frac{j}{N} \right) - \bar{\beta}_{2m+1} \left(Nt; \frac{j}{N} \right) \right| dt \\ \leq 2\pi \bar{\delta}_{2m+1} \left(\frac{j}{N} \right). \end{cases} \quad (5.3)$$

を得ることができる. ただしここで

$$\bar{\delta}_{2m+1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(k+x)^{2m+1}} + \frac{1}{(k-x)^{2m+1}} \right\}. \quad (5.4)$$

である. さらに式(2.14)から

$$\begin{cases} \int_0^{2\pi} \left| \bar{\alpha}_{2m+1} \left(Nt; \frac{j}{N} \right) \right| dt \leq 4\bar{\tau}_{2m+1} \left(\frac{j}{N} \right). \\ \int_0^{2\pi} \left| \bar{\tau}_{2m+1} \left(\frac{j}{N} \right) - \bar{\beta}_{2m+1} \left(Nt; \frac{j}{N} \right) \right| dt \\ \leq 2\pi \bar{\tau}_{2m+1} \left(\frac{j}{N} \right). \end{cases} \quad (5.5)$$

を得ることができる. ここで

$$\bar{\tau}_{2m+1}(x) = \frac{1}{x^{2m+1}} + \bar{\delta}_{2m+1}(x). \quad (5.6)$$

である.

次に式(4.10)右辺第一項の上限を導く.

$$R_1 = \left| \frac{1}{\pi n^{2m+1}} \int_0^{2\pi} f^{(2m+1)}(t) \{q_{2m+1}(x; n) - q_{2m+1}(x-t; n)\} dt \right|. \quad (5.7)$$

に式(2.18)第二式を代入し Hoelder の不等式を適用して

$$\int_0^{2\pi} |\sin jx - \sin j(x-t)| dt \leq 2\pi |\sin jx| + 4 \leq 2\pi + 4.$$

であることを使うと

$$R_1 \leq (2+4/\pi) \cdot \zeta(2m+1; n) \cdot \|f^{(2m+1)}\| \cdot. \quad (5.8)$$

を得ることができる. ここで

$$\zeta(k; n) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j+n)^k}. \quad (5.9)$$

は一般化された Riemann の Zeta 関数である.

以上を使って諸量の誤差限界を導く.

$$\begin{cases} |c_i(f; n) - \bar{c}_i(f; n)| \\ \leq C_i(n, N, 2m) \cdot \|f^{(2m+1)}\| \cdot. \end{cases}$$

$$\begin{cases} |a_j(f) - \bar{a}_j(f)| \leq A_j(n, N, 2m) \cdot \|f^{(2m+1)}\|_{\infty} \\ |b_j(f) - \bar{b}_j(f)| \leq B_j(n, N, 2m) \cdot \|f^{(2m+1)}\|_{\infty} \\ |f(x) - \bar{K} \left\{ \begin{matrix} 2m \\ n \end{matrix} \right\} (f; x)| \\ \leq F(x; n, N, 2m) \cdot \|f^{(2m+1)}\|_{\infty}. \end{cases} \quad (5.10)$$

とおく.

式(4.5)に Hoelder の不等式を適用すると

$$\begin{cases} C_{2i}(n, N, 2m) = \frac{4}{\pi n^{2m+1}} \\ \cdot \sum_{s=n}^{N/2(3)} \left| \sum_{j=1}^m \phi_{2i, 2j} (-1)^{j-1} \right. \\ \cdot \left(\frac{n}{N} \right)^{2j} \bar{\tau}_{2j} \left(\frac{s}{N} \right) \left| \right. \\ \cdot \left(\frac{n}{N} \right)^{2m+1} \bar{\tau}_{2m+1} \left(\frac{s}{N} \right). \\ C_{2i+1}(n, N, 2m) = \frac{2}{n^{2m+1}} \\ \cdot \sum_{s=n}^{N/2} \left| \sum_{j=0}^{m-1} \phi_{2i+1, 2j+1} (-1)^{j-1} \right. \\ \cdot \left(\frac{n}{N} \right)^{2j+1} \bar{\tau}_{2j+1} \left(\frac{s}{N} \right) \left| \right. \\ \cdot \left(\frac{n}{N} \right)^{2m+1} \bar{\tau}_{2m+1} \left(\frac{s}{N} \right). \end{cases} \quad (5.11)$$

となる.

次に式(4.7)および式(4.8)に Hoelder の不等式を適用すると

$$\begin{cases} A_j(n, N, 2m) \\ = \frac{4}{\pi n^{2m+1}} \left[\left(\frac{n}{N} \right)^{2m+1} \delta_{2m+1} \left(\frac{j}{N} \right) \right. \\ + \sum_{s=n}^{N/2(3)} \left| \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} \left(\frac{n}{N} \right)^{2i} \delta_{2i} \left(\frac{j}{N} \right) \right. \\ \cdot \sum_{k=1}^m \phi_{2i, 2k} (-1)^{k-1} \left(\frac{n}{N} \right)^{2k} \bar{\tau}_{2k} \left(\frac{s}{N} \right) \left| \right. \\ \cdot \left(\frac{n}{N} \right)^{2m+1} \bar{\tau}_{2m+1} \left(\frac{s}{N} \right) \left. \right]. \\ B_j(n, N, 2m) \\ = \frac{2}{n^{2m+1}} \left[\left(\frac{n}{N} \right)^{2m+1} \delta_{2m+1} \left(\frac{j}{N} \right) \right. \\ + \sum_{s=n}^{N/2} \left| \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{i-1} \left(\frac{n}{N} \right)^{2i+1} \delta_{2i+1} \left(\frac{j}{N} \right) \right. \\ \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \phi_{2i+1, 2k+1} (-1)^{k-1} \left(\frac{n}{N} \right)^{2k+1} \bar{\tau}_{2k+1} \left(\frac{s}{N} \right) \left| \right. \\ \cdot \left(\frac{n}{N} \right)^{2m+1} \bar{\tau}_{2m+1} \left(\frac{s}{N} \right) \left. \right]. \end{cases} \quad (5.12)$$

を得ることができる.

最後に式(4.10), (5.8)から

$$\begin{aligned} F(x; n, N, 2m) &= (2+4/\pi)\zeta(2m+1; n) \\ &+ \sum_{j=0}^{n-1(2)} A_j(n, N, 2m) |\cos jx| \\ &+ \sum_{j=1}^{n-1} B_j(n, N, 2m) |\sin jx| \\ &+ \sum_{i=1}^{2m} C_i(n, N, 2m) |q_i(x; n)|. \end{aligned} \quad (5.13)$$

となる. ただし, ここで

$$\sum_{j=0}^{n-1(2)} A(j) = \frac{1}{2} A(0) + \sum_{j=1}^{n-1} A(j). \quad (5.14)$$

である.

さて, $N+1$ 個のデータ $f_r, 0 \leq r \leq N$ が与えられたとき第3章で述べた計算法を使って $f(x) \in W_{2m}^{2m} [0, 2\pi]$ の Fourier 係数の近似値や, $f(x)$ の近似値を得ようとするとき $n, 2m$ をどのように選ぶかが問題になる. もしこれらを任意に選ぶことができるなら, なるべくよい結果を得られるように選択すべきである. すなわち計算される近似値の誤差が小さくなるようにすべきである. 文献4)によれば第3章で述べた計算法では, 一般に n を大きくするにつれて数値的安定性が悪くなる. この傾向は $2m$ が大きいとき特に顕著になる. したがって n をむやみに大きくすべきではなく, 経験的に $n=N/4$ 程度が適切である⁴⁾. すぐ後に述べるように打ち切り誤差を小さくする観点からも, $n=N/4$ 程度が適切であることがわかる.

以上を具体的に確認するために式(5.12), (5.13)で与えられる量を多くの $n, N, 2m, j$ について計算した. 次にその計算結果について述べる.

まず, $N, 2m$ を与えて $A_j(n, N, 2m)$ および $B_j(n, N, 2m)$ を, 若干個の n に対して計算した. 図1にその一例を図示する. 図1は $N=2048, 2m=12$ についての結果である. 左側は $A_j(n, N, 2m)$ であり, 右側は $B_j(n, N, 2m)$ である. j を横軸にとっており横軸, 縦軸共に対数目盛りである. 上からそれぞれ $n=128, n=896, n=512$ に対する $A_j(n, N, 2m)$ または $B_j(n, N, 2m)$ の, j に対する変化である. この図から $A_j(n, N, 2m)$ は j にほとんど依存せず一定であり, $B_j(n, N, 2m)$ はほぼ j に比例して変化することがわかる(図1の右側の図で, $j=1$ における値と $j=1024$ における値とを比較するとほぼ 10^3 程度異なる). また, 図に示した三種の n のうちでは, $n=N/4$ のときが $A_j(n, N, 2m), B_j(n, N, 2m)$ は共に最も小さい.

$2m$ を $2m=2, 4, 6, 8, 10, 12$ と変え, 多くの N について同じような計算をしたが, $2m=2$ の場合を除き

図1と同じような傾向を示すことがわかった。

j を変えたときに $A_j(n, N, 2m)$, $B_j(n, N, 2m)$ がどのような変化をするかがわかったので、次に n を変えたときにこれらがどのように変化するかを調べた。

図2は、 n を横軸にとって $A_j(n, N, 2m)$ および $B_j(n, N, 2m)$ の変化を図示したものである。図2は $N=2048$, $2m=12$ に対する結果である。図には6本の曲線が描かれているが、下から順に $j=1, 5, 10, 15, 20, 25$ に対する結果である。横軸は平等目盛りで右端は $n=N/2$ である。縦軸は対数目盛りとしている。左側は $A_j(n, N, 2m)$ の変化であり、右側は $B_j(n, N, 2m)$ の変化である。 $A_j(n, N, 2m)$ が j にほとんど依存しないために、左側の図では6本の曲線が重なってしまっている。また、左右のどの曲線も $n=N/4$ の付近で最低になっている。しかし $n=N/4$ の付近での曲線の変化はゆるやかである。

上のように図2では j をパラメータとし $2m$ を固定して、 n を横軸にとり $A_j(n, N, 2m)$ 等を図示した。次に j を $j=1$ と固定し、 $2m$ をパラメータとして $A_j(n, N, 2m)$ 等を図示する。

図3は $2m$ をパラメータとし、 n を横軸(平等目盛り)にとって $A_1(n, N, 2m)$ および $B_1(n, N, 2m)$ の変化を図示したものである。図3の左側は $A_1(n, N, 2m)$ であり右側は $B_1(n, N, 2m)$ である。縦軸は対数目盛りである。上から順に $2m=2, 4, 6, 8, 10, 12$ に対する結果である。また、 N は $N=2048$ とした。図からわかるように $2m=2$ のときは n を大きくすると $A_1(n, N, 2m)$ 等は単調に減少する。また、 $2m$ が大きくなるにつれて $A_1(n, N, 2m)$ 等が最小になる n は次第に小さくなってゆき、 $2m=12$ では $n=N/4$ 程度で最小になる。

次に $n=N/4$ として、 n を大きくしたときの $\bar{a}_j(f)$ および $\bar{b}_j(f)$ の誤差の収束率を知るために、 $2m=2, 4, 6, 8, 10, 12$; $N=2^p=4n$: $p=5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$ に対して $n^{2m+1}A_j(n, 4n, 2m)$ および $n^{2m+1}B_j(n, 4n, 2m)$ を計算した。図4は $j=1$ に対する結果である。図では p (したがって N) を横軸にとっている。横軸 p は平等目盛り(したがって N については対数目盛り)と

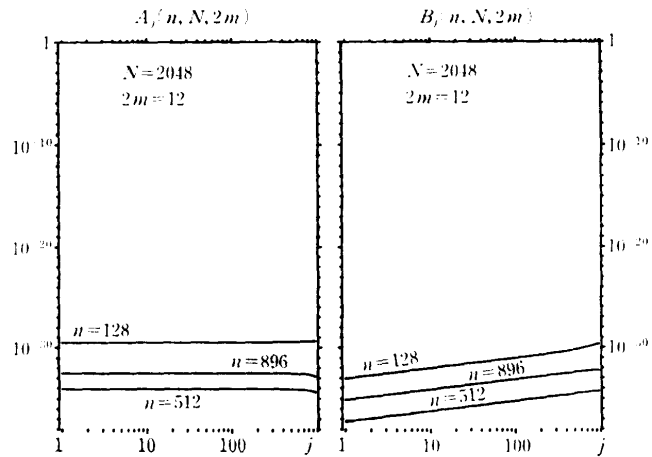


図1 $N=2048$, $2m=12$ に対する $A_j(n, N, 2m)$, $B_j(n, N, 2m)$ の値
Fig. 1 The values of $A_j(n, N, 2m)$, $B_j(n, N, 2m)$ for $N=2048$, $2m=12$.

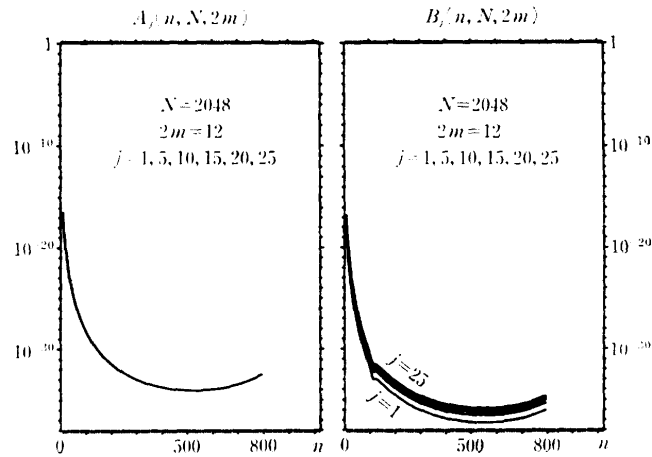


図2 $N=2048$, $2m=12$ に対する $A_j(n, N, 2m)$, $B_j(n, N, 2m)$ の値
Fig. 2 The values of $A_j(n, N, 2m)$, $B_j(n, N, 2m)$ for $N=2048$, $2m=12$.

している。縦軸は対数目盛りである。左側の図は $n^{2m+1}A_j(n, 4n, 2m)$ であり右側の図は $n^{2m+1}B_j(n, 4n, 2m)$ である。

図4において、左側の図では N を大きくしてゆくと、 $2m$ によって値は異なるが急速に一定値に近づくことがわかる。したがって $n=N/4$ なる条件のもとの $\bar{a}_j(f)$ の誤差の収束率は少なくとも $O(n^{-2m-1})$ 程度であると判断できる。一方、右側の図では N を大きくしてゆくと、 $2m=2, 4$ については一定値になると判断できる。それ以外では N が大きくなると減少する傾向にある。図4において目盛りに注意すると、特

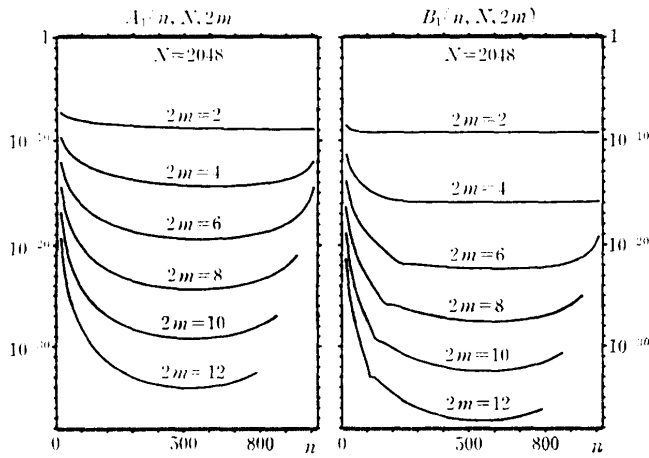


図 3 $N=2048$ に対する $A_1(n, N, 2m)$, $B_1(n, N, 2m)$ の値
Fig. 3 The values of $A_1(n, N, 2m)$, $B_1(n, N, 2m)$ for $N=2048$.

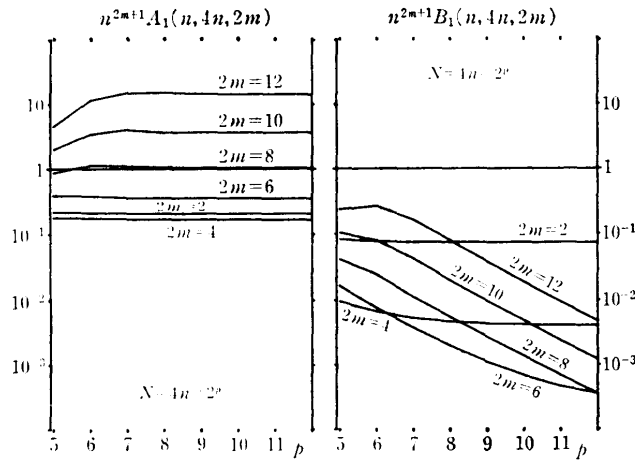


図 4 $n^{2m+1}A_1(n, 4n, 2m)$, $n^{2m+1}B_1(n, 4n, 2m)$ の値
Fig. 4 The values of $n^{2m+1}A_1(n, 4n, 2m)$, $n^{2m+1}B_1(n, 4n, 2m)$.

に $2m=12$ では N が大きいとき、 N が 2 倍になると $n^{2m+1}B_j(n, 4n, 2m)$ はほぼ 1/2 倍になることがわかる。このことから、 $n=N/4$ なる条件のもとでの $\bar{b}_j(f)$ の誤差の収束率は、 $2m$ が大きいときは $O(n^{-2m-2})$ と判断でき、 $2m$ が小さいときは $O(n^{-2m-1})$ と判断できる。

本章で得られた $\bar{b}_j(f)$ の誤差限界についてこのように説明の困難な状況が生ずることについては若干の注釈を必要とする。実際、 $\bar{b}_j(f)$ の誤差限界については図 4 だけでなく図 2 および図 3 においても奇妙な角が生じている。これは、式 (5.12) で与えられる $B_j(n, N, 2m)$ が性質の異なる二つの項の和から成るためであると考えられる。

文献 3) によれば、式 (2.12) で定義される $\bar{\delta}_i(x)$ は

$$\begin{cases} \bar{\delta}_{2i}(x) = 2 \sum_{r=i}^{\infty} \binom{2r-1}{2i-1} \zeta(2r) x^{2r-2i}, \\ \bar{\delta}_{2i+1}(x) = -2x \sum_{r=i+1}^{\infty} \binom{2r-1}{2i} \zeta(2r) x^{2r-2i-2}. \end{cases} \quad (5.15)$$

と級数展開される。ここで

$$\zeta(2r) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{2r}}. \quad (5.16)$$

は Riemann の Zeta 関数である。式 (5.15) を得たのと同じ手順により

$$\bar{\delta}_{2m+1}(x) = 2 \sum_{r=m}^{\infty} \binom{2r}{2m} \zeta(2r+1) x^{2r-2m}. \quad (5.17)$$

を得ることができる。 x が零に近いときこれらの展開式から

$$\begin{cases} \bar{\delta}_{2i}(x) \doteq 2\zeta(2i), \\ \bar{\delta}_{2i+1}(x) \doteq -2(2i+1)\zeta(2i+2)x, \\ \bar{\delta}_{2m+1}(x) \doteq 2\zeta(2m+1). \end{cases} \quad (5.18)$$

である。すなわち、 $\bar{\delta}_{2i}(x)$, $\bar{\delta}_{2m+1}(x)$ は x に関係なく一定であり、 $\bar{\delta}_{2i+1}(x)$ は x に比例する。

さて、式 (5.12) によれば $A_j(n, N, 2m)$ は $\bar{\delta}_{2m+1}\left(\frac{j}{N}\right)$ を含む項と $\bar{\delta}_{2i}\left(\frac{j}{N}\right)$ を含む項とから成る。 $j \ll N$ のとき、これらは j に依存せず一定である。したがって $A_j(n, N, 2m)$ は $j \ll N$ のとき、 j の変化に対して図 2 からわかるようにほとんど変化しない。

一方、 $B_j(n, N, 2m)$ は $\bar{\delta}_{2m+1}\left(\frac{j}{N}\right)$ を含む項と $\bar{\delta}_{2i+1}\left(\frac{j}{N}\right)$ を含む項とから成る。 $j \ll N$ のとき

$\bar{\delta}_{2m+1}\left(\frac{j}{N}\right)$ は j や N の変化によらず一定であるが、

$\bar{\delta}_{2i+1}\left(\frac{j}{N}\right)$ は j/N に比例する。すなわち N が一定なら j に比例するし、 j が一定なら N に逆比例する。

したがってどちらの項が優勢であるかによって $B_j(n, N, 2m)$ の振舞が異なる。 $2m$ が大きいときには一般に式 (5.12) における $\psi_{2i+1, 2i+1}$ の絶対値は非常に大きくなる。したがって $\bar{\delta}_{2i+1}\left(\frac{j}{N}\right)$ を含む項が優勢になる。

図 4 から $\bar{b}_j(f)$ の誤差の収束率を判定しにくいのはこのためである。すなわち $\bar{\delta}_{2i+1}\left(\frac{j}{N}\right)$ を含む項が優勢項であれば収束率は $O(n^{-2m-2})$ になるし、 $\bar{\delta}_{2m+1}\left(\frac{j}{N}\right)$ を含む項が優勢項であれば $O(n^{-2m-1})$ となるのである。

しかし j を固定した状態で、図 4 に示した以上に N が大きくなれば $2m$ にかかわらず $\delta_{2i+1} \left(\frac{j}{N} \right)$ を含む項は無視しうようになり $B_j(n, 4n, 2m)$ の収束率は $O(n^{-2m-1})$ となるはずである。したがって本章の結論としては、 $\bar{a}_j(f), \bar{b}_j(f)$ の誤差の収束率はいずれも $O(n^{-2m-1})$ とすべきであると考えられる。

最後に $\bar{K} \left\{ \frac{2m}{n} \right\} (f; x)$ の誤差限界に関連した量、 $F(x; n, N, 2m)$ を計算した。図 5 は $N=1024, 2m=12$ として、 $n=64, 256, 448$ に対して計算した $F(x; n, N, 2m)$ の値である。横軸は $x \in [0, 2\pi]$ であり平等目盛りである。図では実際には $\bar{x}_r: 0 \leq r \leq N$ における r を目盛っている。縦軸は対数目盛りである。 $F(x; n, N, 2m)$ の値をそのままで図示すると図が錯綜するので $x \in [\bar{x}_r, \bar{x}_{r+1}]$: $0 \leq r \leq N-1$ をそれぞれ 8 等分し、両端を含めて 9 個の点で $F(x; n, N, 2m)$ を計算しこれらの最大値 M_r をその部分区間にプロットすべき値とした。すなわち $(\bar{x}_r + \pi/N, M_r)$: $0 \leq r \leq N-1$ を順に結んで図 5 とした。上から順に $n=64, n=448, n=256$ に対する結果である。この図から n を変えると誤差限界がどのように変わるかがわかる。この図では、 $n=256=N/4$ に対する $F(x; n, N, 2m)$ が全域で小さい。

次に n を変えたいときに、

$$M(n, N, 2m) = \max_{x \in [0, 2\pi]} F(x; n, N, 2m). \tag{5.19}$$

がどのような変化をするかを見るために N を固定し、 $2m$ をパラメータとして、 n を横軸にとり、 $M(n, N, 2m)$ をプロットした。ここで $M(n, N, 2m)$ の正確な値を計算することは困難であるから $x = \frac{2\pi s}{8N}$: $0 \leq s \leq 8N$ における $F(x; n, N, 2m)$ の値を計算し、その最大値を $M(n, N, 2m)$ とした。 $N=512$ として計算した結果を図 6 に示す。図 6 において横軸 (平等目盛り) は n で左端は $n=0$ 、右端は $n=N/2$ である。縦軸は対数目盛りである。上から順に $2m=2, 4, 6, 8, 10, 12$ に対する結果である。

図 6 から $2m=2$ に対する $\bar{K} \left\{ \frac{2m}{n} \right\} (f; x)$ の誤差限界は図示された範囲内では n を大きくするほど、小さくなるのがわかる。一方、 $2m=4, 6, 8, 10, 12$ に対

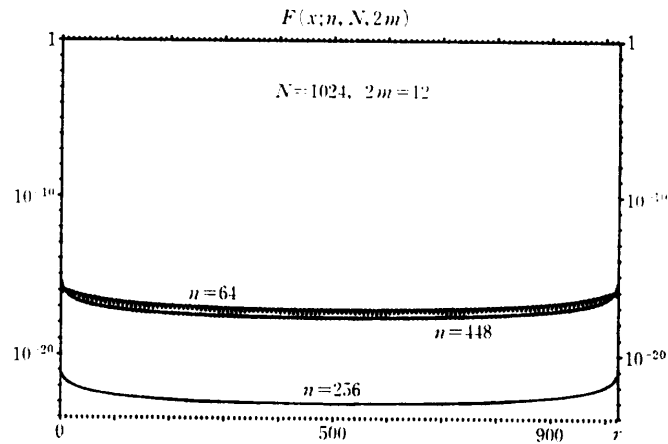


図 5 $N=1024, 2m=12$ に対する $F(x; n, N, 2m)$ の値
Fig. 5 The values of $F(x; n, N, 2m)$ for $N=1024, 2m=12$.

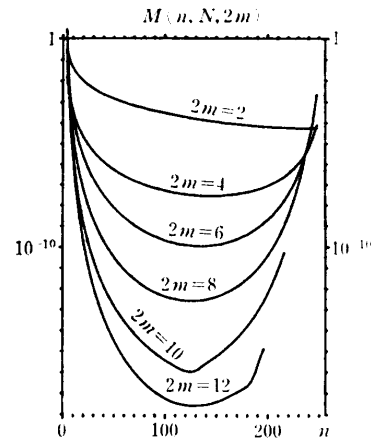


図 6 $N=512$ に対する $M(n, N, 2m)$ の値
Fig. 6 The values of $M(n, N, 2m)$ for $N=512$.

しては $n=N/4$ の付近で $\bar{K} \left\{ \frac{2m}{n} \right\} (f; x)$ の誤差限界は最小になる。

最後に $n=N/4$ として n を大きくしたときの $\bar{K} \left\{ \frac{2m}{n} \right\} (f; x)$ の誤差の収束率を知るために、 $2m=2, 4, 6, 8, 10, 12$; $N=2^p=4n$: $p=5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$ に対して $n^{2m}M(n, 4n, 2m)$ を計算した。結果を p (したがって N) を横軸にとって図 7 に示す。横軸 p は平等目盛り (したがって N については対数目盛り) であり縦軸は対数目盛りである。上から順に $2m=12, 10, 8, 6, 4, 2$ に対する結果である。 $2m$ に応じて値は異なるが、図 7 からわかるように n が大きくなると $n^{2m}M(n, 4n, 2m)$ は急速に一定値に近づく。すなわち、 $\bar{K} \left\{ \frac{2m}{n} \right\} (f; x)$ の誤差の収束率は少なくとも $O(n^{-2m})$

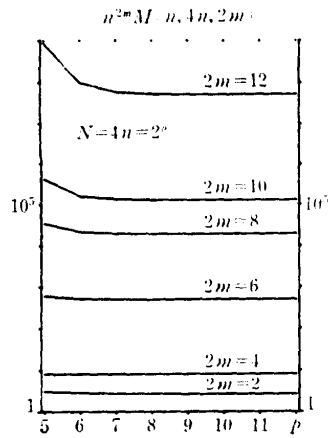


図 7 $n^{2m}M(n, 4n, 2m)$ の値
Fig. 7 The values of $n^{2m}M(n, 4n, 2m)$.

程度であると判断できる。

以上に述べたように高精度を要求されるときには $2m$ を大きくとるとよい。ただし、 $2m$ が大きくなるにつれて多くの場合、式(5.10)における $\|f^{(2m+1)}\|_{\infty}$ が急激に大きくなるのでそのことも考慮に入れなければならない。 n は $n=N/4$ とするのが妥当であると思われる。

6. おわりに

複合多項式による最小二乗近似は実質的には三角級数による最小二乗近似であると言える。このことは次のようにして説明できる。まず、三角級数が十分に滑らかな関数を近似するとき無限個あるその係数は桁数を限って言えば、勝手な値をとるのではなくきわめて規則的な値をとる。最初の数個ないし数十個の係数を除けば三角級数の係数すなわち、Fourier 係数またはその近似値は両端の関数値の差および高次微係数の差によって全部決ってしまう(式(2.10)参照)。この性質を巧妙に利用したのが複合多項式である⁵⁾。すなわち十分に滑らかな関数を近似する限りにおいては、三角級数と複合多項式とは実質的に等価である。このように無限個のパラメータを持つ関数系が実際には有限個のパラメータをもつ関数系と実用上等価とみなしうるのは興味深いことである。

本論文では複合多項式による最小二乗近似が $2m$ 次以下の多項式や $n-1$ 次以下の三角多項式を再現すること等を明らかにした。しかし、ここでは誤差限界を“数値的な手段”によって得ている。この意味で誤差限界に関しては若干説得力に欠ける結果であるかもしれない。本論文での解析にはそのような弱点はあるが

複合多項式による最小二乗近似の係数、 $\bar{a}_j(f)$, $\bar{b}_j(f)$ の Fourier 係数に対する誤差の収束率が $O(n^{-2m-1})$ 程度であること等は感覚的に予測できることであり、これらのことを数値的な手段であるにせよ確認できた意義は大きいと思われる。

およそ近似法には誤差限界に関する知識が必須である。誤差限界に関する知識の不足している近似法は実際問題への適用に当たって危険な方法であると言っても過言ではない。三角補間やその最初の部分和である三角多項式による最小二乗近似が誤差限界に関する知識の不足したままで長い間多くの分野で使われてきていることは合理性に欠けたことである。複合多項式による最小二乗近似は本論文で示したように誤差の性質が明らかになった近似法である。したがって今後多くの分野での使用が期待される。

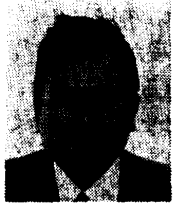
謝辞 ご指導頂いた中部大学、二宮市三教授⁶⁾、原稿に目を通し適切なご指摘を頂いた名古屋大学、鳥居達生教授、議論して頂いた中京大学、秦野甯世教授⁶⁾ に深く感謝します。

参考文献

- 1) Hamming, R. W.: *Numerical Methods for Scientists and Engineers*, 2nd ed., p. 721, McGraw-Hill, Kogakusha, Tokyo (1973).
- 2) Lyness, J. N.: The Calculation of Fourier Coefficients by the Moebius Inversion of the Poisson Summation Formula, Part I, Functions whose Early Derivatives are Continuous, *Math. Comp.*, Vol. 24, pp. 101-135 (1970).
- 3) 秦野和郎: 三角補間の誤差解析, 情報処理学会論文誌, Vol. 30, No. 2, pp. 150-158 (1989).
- 4) 秦野和郎: 複合多項式による最小二乗近似, 情報処理学会論文誌, Vol. 30, No. 6, pp. 679-688 (1989).
- 5) 秦野和郎, 秦野甯世, 二宮市三: 複合多項式による関数近似, 情報処理学会論文誌, Vol. 23, No. 6, pp. 617-624 (1982).
- 6) 秦野和郎, 秦野甯世, 二宮市三: 複合多項式による離散近似の誤差解析, 第 22 回情報処理学会全国大会論文集, 2F-6, pp. 801-802 (1981).

(平成元年 11 月 24 日受付)

(平成 2 年 4 月 17 日採録)

**秦野 和郎** (正会員)

昭和 16 年生. 昭和 39 年名古屋大学工学部電気学科卒業. (株)日立製作所を経て昭和 43 年名古屋大学大学院工学研究科修士課程電気工学専攻課程修了. 名古屋大学大型計算機センター, 福井大学工学部情報工学科を経て現在, 愛知工業大学電子工学科教授. 工学博士. 数値計算に興味を持っている. 電気学会, 電子情報通信学会各会員.
