

ブール式処理による不完全指定順序機械の最小化†

松 本 忍^{††} 矢 島 脩 三^{††}

不完全指定順序機械の内部状態数を最小化する問題については、従前より様々な解法が研究されてきたが、順序回路の設計自動化という観点から、この問題の重要性はむしろ高まっており、より優れた解法が求められている。本論文ではこの問題に対して、閉じた被覆の条件を表すブール式（閉被覆関数）に基づいた厳密な最小化のための新しい手法を提案する。厳密解の解法を確立することにより、近似解の評価などにも役立てることができる。最初に、最小の閉じた被覆の解の候補として冗長である両立集合を除去するために、閉被覆関数の包含関係を用いた新しい手法を提案する。この手法は従来提案された同様の手法を概念的に包含しており、より強力である。次に、ブール式の効率的な処理を行う二分決定グラフを用いた最小の閉じた被覆の選択の手法について述べる。この手法は二分決定グラフのサブグラフの共有によって、探索空間の共有を実現して、論理関数の表現手法である二分決定グラフを組合せ問題に応用するものである。さらに最小解の状態数の上限値に対して考察を行い、新たな上限値の計算法を提案し、しきい値関数を用いることによって、この上限値を最小解の探索に利用する手法についても述べる。最後に本手法により、いくつかの不完全指定順序機械の厳密な最小化を行った実験結果を示す。

1. はじめに

不完全指定順序機械の内部状態数を最小化するという問題は理論的にも実際的にも重要であり、様々な研究が古くから行われてきた^{1)~6)}。

一般的に設計される順序機械の多くは不完全指定であり、近年の順序回路の設計自動化という観点からも、この問題に対する重要性はむしろ高まってきており、実用化へ向けてのより優れた解法が求められている。

そこで本論文では、閉じた被覆の条件のブール式表現²⁾に着目し、この表現に基づく厳密な最小化手法を提案する。問題を表現するブール式に基づいた問題解決の手法を本論文ではブール式処理と呼ぶ。多くの実用的な設計自動化のシステムは近似解を求めるものが多いが、これらのシステムの評価を行うためにも厳密な最小解を求めることは重要な問題である。

内部状態数の最小化においては、すべての最小解を求めるという立場と、少なくとも1つの最小解を求めるという立場の2つがあるが、本論文では後者の立場に立って議論を行う。

まず最初に、最小の閉じた被覆の条件を表すブール式の包含関係に基づく基本両立集合 (primal compatible) と呼ばれる新しい概念について述べる。これは少なくとも1つの最小の閉じた被覆を求めるためには

冗長である両立集合を除去することによって、最小解を求めるための計算量を減少させる手法である。基本両立集合は従来提案された同様の概念^{2), 4), 5)}を包含しており、より多くの冗長な両立集合を除去できる。

次に、論理関数の効率的な表現方法として提案された二分決定グラフ^{8), 9)}を用いて、最小の閉じた被覆を求める手法を提案する。二分決定グラフは本来論理関数の効率的処理のために提案された表現であるが、二分決定グラフを用いたブール式処理によって最小解の探索に応用する。本手法では二分決定グラフ上のサブグラフの共有によって、探索空間の共有を行い、二分決定グラフの効率的な処理を組合せ問題の解法に応用するものであり、グラフのノード数にほぼ比例した計算時間で最小解を得ることができる。

さらに、より効率的な最小解の探索を実現するために、最小の閉じた被覆の要素数の上限値に関する考察を行う。次に、しきい値関数を用いることによって二分決定グラフを用いた最小解の探索において上限値を利用する手法について述べる。

以下、2章では諸定義を、3章では基本両立集合について、4章では二分決定グラフを用いた最小解の選択について、5章では上限値の利用について、6章ではアルゴリズムの実現と評価について、それぞれ述べる。

2. 準 備

本章では周知ではあるが、以下の議論に必要な諸定義について述べておく。

† Minimization of Incompletely Specified Sequential Machines by Boolean Processing by SHINOBU MATSUMOTO and SHUZO YAJIMA (Department of Information Science, Faculty of Engineering, Kyoto University).

†† 京都大学工学部情報工教室

2.1 不完全指定順序機械に対する諸定義

順序機械 M は以下の5字組 $(S, I, O, \delta, \lambda)$ によって定義される。ここで S は状態を表す有限集合、 I は入力シンボルの有限集合、 O は出力シンボルの有限集合、 δ は $S \times I$ から S の中への写像、 λ は $S \times I$ から O の上への写像を表す。不完全指定順序機械とは、 δ や λ が $S \times I$ のすべての組について定義されおらず、未定義部分を随意 (don't care) としたものである。また記法の簡略化のために、 δ の定義域を以下のように $2^S \times I^*$ に拡張する。

- 1) $\delta(s, wi) = \delta(\delta(s, w), i)$ ($s \in S, i \in I, w \in I^*$)
ただし、 $\delta(s, \varepsilon) = s, \delta(s, w)$ が未定義ならば $\delta(s, wi)$ も未定義とする。
- 2) $\delta(Q, w) = \cup \{\delta(s, w)\}$ ($s \in Q, Q \subseteq S, w \in I^*$)
ただし、 $\delta(s, w)$ が未定義ならば $\{\delta(s, w)\} = \phi$ とする。

ここでは 2^S は空集合 ϕ を含む S の部分集合全体の集合、 I^* は空系列 ε を含む I 上のすべての有限系列を表す。

“両立集合” “極大両立集合” “閉じた被覆” “最小の閉じた被覆” などの用語は文献10) と同じ意味で用いる。さらに、ある機械のすべての両立集合からなる族を AC とする。また、最小の閉じた被覆を求める際に考慮する両立集合からなる族を RC とする。ただし、AC は固定であるが、RC ははじめ $RC = AC$ であり、冗長な両立集合が除去される度に RC は変化する。

[定義1] 両立集合 C_i, C_j に対して $C_j = \delta(C_i, w)$ ($w \in I^*$) となり、かつ C_j の要素数が2以上のとき、 C_i は C_j を入力系列 w において因由 (imply) するという。

[定義2] 両立集合 C_i の閉包集合 $E(C_i)$ とは、 C_i が因由するすべての両立集合からなる族から、 C_i

の部分集合、およびその族の他の要素の部分集合となる両立集合を除いて得られる両立集合の族である。

また、1-閉包集合 $E_1(C_i)$ とは、 C_i が長さ1の入力系列において因由するすべての両立集合からなる族から、 C_i の部分集合、およびその族の他の要素の部分集合となる両立集合を除いて得られる両立集合の族である。 □

[定義3] 両立集合 C_i が RC の要素である両立集合の閉包集合に属しているとき、 C_i は IC (implied compatible) であるという。 □

例として表1の不完全指定順序機械 $M_1^{5)}$ のすべての両立集合とその閉包集合を表2に示す。ここで $RC = AC$ としたとき、両立集合 $acef$ は $E(bdgh)$ に

表2 M_1 の両立集合とその閉包集合
Table 2 Compatibles and their closure class sets of M_1 .

両立集合	閉包集合
<i>acef</i>	<i>ab, dg, efg</i>
<i>bdgh</i>	<i>ab, acef, efg</i>
<i>ace</i>	<i>ab, dg, ef, fg</i>
<i>acf</i>	<i>ab, ae, dg, ef, eg, fg</i>
<i>aef</i>	<i>ab, dg, efg</i>
<i>cef</i>	ϕ
<i>bdg</i>	<i>ab, aef, efg</i>
<i>bdh</i>	<i>ab, ace, dg, ef, fg</i>
<i>bqh</i>	<i>ab, acf, ae, dg, ef, eg, fg</i>
<i>dqh</i>	<i>ab, cef</i>
<i>abd</i>	<i>ae, dg, ef, fg</i>
<i>acd</i>	<i>ab, ae, ce, dg, ef, fg</i>
<i>cdh</i>	<i>ce</i>
<i>efg</i>	<i>ab, dg</i>
<i>ab</i>	<i>dg, ef</i>
<i>ac</i>	<i>ab, dg, ef</i>
<i>ad</i>	<i>ab, ae, dg, ef, fg</i>
<i>ae</i>	<i>ab, dg, ef, fg</i>
<i>af</i>	<i>ab, ae, dg, ef, eg, fg</i>
<i>bd</i>	<i>ab, ae, dg, ef, fg</i>
<i>bq</i>	<i>ab, ae, af, dg, ef, eg, fg</i>
<i>bh</i>	<i>ab, ac, dg, ef</i>
<i>cd</i>	<i>ce</i>
<i>ce</i>	ϕ
<i>cf</i>	ϕ
<i>ch</i>	ϕ
<i>dg</i>	<i>ab, ef</i>
<i>dh</i>	<i>ce</i>
<i>ef</i>	ϕ
<i>eg</i>	ϕ
<i>fg</i>	<i>ab, dg, ef</i>
<i>qh</i>	<i>ab, cf, dg, ef</i>
<i>a~h</i>	ϕ

表1 不完全指定順序機械 $M_1^{4)}$
Table 1 Incompletely specified sequential machine M_1 .

	i_1	i_2	i_3	i_4
<i>a</i>	-, -	<i>g, 0</i>	<i>e, 1</i>	<i>d, -</i>
<i>b</i>	<i>a, -</i>	<i>d, -</i>	-, -	-, 0
<i>c</i>	<i>c, -</i>	-, 0	-, -	<i>g, 1</i>
<i>d</i>	<i>e, 0</i>	-, -	<i>a, -</i>	-, -
<i>e</i>	-, 1	<i>f, -</i>	-, 1	-, 1
<i>f</i>	-, 1	<i>e, -</i>	<i>a, 1</i>	-, 1
<i>g</i>	<i>f, -</i>	-, 1	<i>b, -</i>	<i>h, -</i>
<i>h</i>	<i>c, -</i>	-, -	<i>a, 0</i>	-, -

属しているため、IC である。

2.2 閉じた被覆の条件を表すブール式

与えられた不完全指定順序機械 M に対して閉じた被覆の条件を命題論理のブール式で記述する方法が知られている²⁾。

M の RC に属するすべての両立集合 C_i に対してブール変数 x_{C_i} を考える。 C_i が閉じた被覆の要素として選択されたならば、 $x_{C_i}=1$ となり、そうでないならば、 $x_{C_i}=0$ となる。

状態 s に対する被覆性は、 s を被覆し、かつ RC に属する両立集合を C_1, C_2, \dots, C_k としたとき、以下のブール式で記述される。

$$g_s = (x_{C_1} + x_{C_2} + \dots + x_{C_k})$$

$g_s=1$ ならば、 s に対する閉包性は満たされている。

また、 $E_1(C_i) = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ なる両立集合 C_i に対する閉包性は、 C_j を包含し、かつ RC に属する両立集合を C_j', C_j'', \dots とするとき、以下のブール式で記述される。

$$hc_i = (\overline{x_{C_i}} + \Pi(x_{C_j'} + x_{C_j''} + \dots)) \quad (1 \leq j \leq k)$$

ここで \bar{x} は x の否定を、 Π は論理積を表す。 $hc_i=1$ ならば、 C_i に対する閉包性は満たされている。ただし、 $E_1(C_i) = \phi$ なる両立集合に対しては常に $hc_i=1$ であるとする。

よって、

$$f_M = \Pi g_s \cdot \Pi hc \quad (s \in S, C \in RC)$$

なるブール関数 f_M に対して、 $f_M=1$ となる両立集合の族は閉じた被覆となる。以後、このブール関数 f_M を M の閉被覆関数 (closed cover function) と呼ぶ。

3. 基本両立集合の生成

3.1 基本両立集合

本節では、最小の閉じた被覆を求める計算量を削減するために、両立集合の除去の新しい概念である基本両立集合を定義する。

【定理 1】 f_M を順序機械 M の閉被覆関数としたとき、

$$f_M|_{C_i=0, C_j=1} \geq f_M|_{C_i=1, C_j=0}, \text{ かつ}$$

$$f_M|_{C_i=0, C_j=1} \geq f_M|_{C_i=1, C_j=1}$$

となるブール関数の包含関係 ($f + \bar{g} = 1$ なるとき、 $f \geq g$ と記す) が RC に属する両立集合 C_i, C_j に対して成立するとき、RC より C_i を除去しても少なくとも 1 つの最小の閉じた被覆を残る RC 中から得ることができる。

ただし、 $f_M|_{C_i=a, C_j=b} = f_M(x_{C_1}, \dots, x_{C_{i-1}}, a, x_{C_{i+1}}, \dots, x_{C_{j-1}}, b, x_{C_{j+1}}, \dots, x_{C_n})$ とする。 \square

(証明) RC 中から得られるすべての最小の閉じた被覆 $MCC_k (1 \leq k \leq n)$ が C_i を含んでいると仮定する。

$MCC_k \ni C_j$ の場合、両立集合の族 ($MCC_k - \{C_i\}$) に対して、 $f_M|_{C_i=1, C_j=0} = 1$ となり、よって、 $f_M|_{C_i=0, C_j=1} = 1$ となる。したがって、 $((MCC_k - \{C_i\}) \cup \{C_j\})$ は最小の閉じた被覆となり、仮定に矛盾する。

$MCC_k \ni C_j$ の場合、両立集合の族 ($MCC_k - (\{C_i\} \cup \{C_j\})$) に対して $f_M|_{C_i=1, C_j=1} = 1$ となり、よって、 $f_M|_{C_i=0, C_j=1} = 1$ となる。したがって、 $(MCC_k - \{C_i\})$ は最小の閉じた被覆となり、仮定に矛盾する。

よって、定理は証明された。 (q. e. d.)

【定義 4】 定理 1 を適用しても除去できない両立集合を基本両立集合 (primal compatible) と呼ぶ。 \square

両立集合の除去の順序によっては、基本両立集合は異なったものとなるが、基本両立集合の個数は一意に定まる⁷⁾。以下の 3.2 節に示される必要十分条件から明らかなように、この基本両立集合の概念は、従来提案されている両立集合の除去の概念を包含しており、より強力である。

3.2 基本両立集合の生成アルゴリズム

定理 1 の適用によって、基本両立集合を求めることができるが、計算量が膨大となる。そこで本節ではまず関数の包含関係の必要十分条件を示す。次にこの条件を用いて、基本両立集合を生成するアルゴリズムについて述べる。

【定義 5】 両立集合 C_i に対して、

$$ex(C_i) = C_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_n$$

とする。ここで C_1, C_2, \dots, C_n は C_i を包含し、かつ RC に属する両立集合とする。 \square

【定義 6】 関数 δ' (定義域 $2^S \times I^*$) を以下のように定義する。

$$\delta'(Q, wi) = ex(\delta(\delta'(Q, w), i)) \quad (Q \subseteq S, i \in I, w \in I^*)$$

ただし、 $\delta'(Q, \varepsilon) = Q$ 、 $\delta'(Q, w)$ が未定義ならば $\delta'(Q, wi)$ も未定義とする。

両立集合 C_i の拡張閉包集合 $EE(C_i)$ とは、 $C = \delta'(C_i, w) (w \in I^*)$ となるすべての両立集合 C からなる族から、 C_i の部分集合、およびその族の他の要素の部分集合となる両立集合を除いて得られる両立集合の族である。 \square

例として、表 1 の M_1 において両立集合 ab が除去されたとしよう。このとき、 $ex(ab) = abd$ となるた

め, $EE(dgh) = \{abd, ae, cef, fg\}$ となる.

【定義7】 両立集合の族 $P_i (1 \leq i \leq k)$ を考える. $\forall i$ に対して $C \subseteq \exists C' \in P_i$ となるような両立集合 C からなる族から, その族の他の要素の部分集合となる両立集合を除いて得られる両立集合の族を $P_1 * P_2 * \dots * P_k$ で表す. \square

【定義8】 両立集合 C_i に対して, C_i にまた $EE(C_i)$ にも被覆されない状態を s_1, s_2, \dots, s_k とする.

また, $C_{j_1}, C_{j_2}, \dots, C_{j_m}$ を RC に属しており, s_j を被覆する両立集合としたとき, $T_j = (EE(C_{j_1}) \cup \{C_{j_1}\}) * (EE(C_{j_2}) \cup \{C_{j_2}\}) * \dots * (EE(C_{j_m}) \cup \{C_{j_m}\})$ とする.

両立集合 C_i の状態被覆集合 $SE(C_i)$ とは, $T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_k$ の要素となるすべての両立集合からなる族から, C_i の部分集合, およびその族の他の要素の部分集合となる両立集合を除いて得られる両立集合の族である. \square

例として, 表1の M_1 において両立集合 bdh, cdh, bh, ch, dh が除去されたでしょう. このとき, 状態 h を被覆する両立集合は $bdgh, bgh, dgh, gh$ だけであるため, $SE(ac) = \{ab, cf, dg, ef, gh\}$ となる.

【定義9】 RC に属する両立集合 C_i に対して, $EE(C_i) \cup SE(C_i)$ なる両立集合の族から, その族の他の要素の部分集合となる両立集合を除いて得られる両立集合の族を $ES(C_i)$ で表す. \square

すなわち $ES(C_i)$ に含まれる両立集合は, C_i を含むすべての閉じた被覆において, それに属するいずれかの両立集合に必ず包含される.

【補題1】 $\Omega_k (1 \leq k \leq n)$ を両立集合 C_i を含み, RC に属する両立集合から成るすべての閉じた被覆とする. このとき, $(\Omega_1 - \{C_i\}) * (\Omega_2 - \{C_i\}) * \dots * (\Omega_n - \{C_i\}) = ES(C_i)$ である. \square

(証明) $\Omega = (\Omega_1 - \{C_i\}) * (\Omega_2 - \{C_i\}) * \dots * (\Omega_n - \{C_i\})$ とする. $\Omega \supseteq ES(C_i)$ は定義より明らか. $C \in \Omega, C \notin ES(C_i)$ なる両立集合 C が存在すると仮定した場合, $C \notin EE(C_i), C \notin SE(C_i)$ より C を包含しない両立集合の族と C_i によって, 閉包性, 被覆性が満足された両立集合の族が少なくとも1つは構成できることになり, $C \in \Omega$ に矛盾する. よって $\Omega \subseteq ES(C_i)$ となる. (q. e. d.)

【定理2】 $f_M|_{C_i=0, C_j=1} \geq f_M|_{C_i=1, C_j=0}$, かつ $f_M|_{C_i=0, C_j=1} \geq f_M|_{C_i=1, C_j=1}$ となるための必要十分条件は, 以下の3条件がすべて満たされることである.

(条件1) $s \in C_i$ なるすべての状態 s が, $\{C_j\} \cup$

$ES(C_i)$ に被覆される.

(条件2) $E(C_j)$ の要素であるすべての両立集合 C が, $ES(C_i)$ に属する両立集合に包含される.

(条件3) C_i の部分集合であり, かつ IC であるすべての両立集合 C に対して, 以下の2条件のいずれかが成立する.

a) C が $\{C_j\} \cup ES(C_i)$ に属する両立集合に包含される.

b) $C \in EE(C')$ なるすべての両立集合 C' において, $ES(C')$ に C_i に包含されず, かつ C を包含するような両立集合が属している. \square

(証明) 必要条件: $\Omega_k (1 \leq k \leq n)$ を両立集合 C_i を含み, RC に属する両立集合から成るすべての閉じた被覆とする. また, Ω_k' を Ω_k において C_i を C_j で置き換えて得られる両立集合の族とする. このとき, 条件1から Ω_k' の被覆性が, 条件2, 3から Ω_k' の閉包性が成り立つのは明らかである. よって, $f_M|_{C_i=1, C_j=0} = 1$, または $f_M|_{C_i=1, C_j=1} = 1$ となる両立集合の族に対して, $f_M|_{C_i=0, C_j=1} = 1$ となる.

十分条件: 関数の包含関係から Ω_k' において, 被覆性, 閉包性が満足されていることは明らかである. このとき条件1, 2, 3のいずれかが満たされていないと仮定すると, 補題1より, Ω_k' において被覆性, 閉包性いずれかが満たされていないものが必ず存在する. 条件1, 2に対しては明らかであり, 条件3に対しては C_i, C' を含む閉じた被覆の中に, C_i の除去によって C' の閉包性が満足されないものが存在する. よって矛盾が生じる. (q. e. d.)

以下に, 定理2を用いた基本両立集合の生成アルゴリズムを示そう.

(基本両立集合の生成アルゴリズム)

【手順1】 機械 M のすべての両立集合 C_i を求め, $ES(C_i)$ を計算する. $RC = AC$ とし, IC を求める.

【手順2】 定理2を適用して RC より除去できる両立集合を除去する. この処理をどの両立集合も除去できなくなるまで繰り返す. 1つの両立集合も除去できなかった場合は手順4へ. さもなければ手順3へ.

【手順3】 除去して得られた新たな RC に属するすべての両立集合 C_i に対して, $ES(C_i)$ を再計算する. また, 新たな RC における IC を求める. 手順2へ.

表 3 M_1 の基本両立集合
Table 3 Primal compatibles of M_1 .

基本両立集合	拡張閉包集合	状態被覆集合
cdh	cef	a, b, g
cef	ϕ	a, b, dh, g
dgh	ab, cef	ϕ
ab	cef, dgh	ϕ
eg	ϕ	a, b, cef, dh
a	ϕ	b, cef, dh, g
b	ϕ	a, cef, dh, g

[手順 4] RC に属する両立集合が基本両立集合である。終了。

例として、 M_1 の基本両立集合とその拡張閉包集合、状態被覆集合を表 3 に示す。最小解の要素の候補とすべき両立集合の個数は 40 から 7 へと削減された。

4. 二分決定グラフを用いた最小の閉じた被覆の選択

本章では、最小解の要素の候補となる両立集合の中から最小の閉じた被覆を選択する手法について考察する。閉被覆関数のすべての素項の中で正のリテラル数が最小の素項を求めることができれば、与えられた機械に対する最小の閉じた被覆を得ることができる。しかし、候補となる両立集合の個数を n としたとき、最小解の探索空間は 2^n となり、膨大な計算量となる。従前から、最小解探索のための様々な手法^{2), 3), 5), 6)} が提案されているが、 n が大きい場合問題があった。

そこで、ブール関数の効率的な表現方法として提案された二分決定グラフ⁸⁾ を用いて、最小の閉じた被覆を選択する手法を提案する。

二分決定グラフはシャノンの展開を再帰的に繰り返すことによって得られる二分木のグラフから、冗長なノードの削除と同形なサブグラフの共有を行ったもので、入力変数の順序を固定することによって、ブール関数に対して一意にグラフが定まるという性質を持つ。図 1 に $f = x_1 \cdot x_2 + x_3$ なる関数を二分決定グラフで表現した例を示す。

二分決定グラフは実用的な多くの関数を比較的少ないノード数で表現可能であるという性質を持つ。そこで閉被覆関数を二分決定グラフで表現し、そのグラフ上で最小の閉じた被覆を探索することによって、二分決定グラフのこの性質を利用した効率的な最小解の選択が可能になると考えられる。

二分決定グラフ上でグラフの根から“1”の葉に至るパスを 1-パス、1-パス上で“1”エッジの現れる

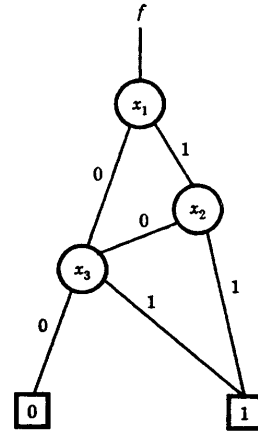


図 1 二分決定グラフ
Fig. 1 Binary decision diagram.

回数をその 1-パスの重みと呼ぶことにしよう。このとき、次の定理が成り立つ。

【定理 3】 ブール関数 f を表す二分決定グラフにおいて、最小の 1-パスの重みが k であるとき、 f のすべての素項の中で正のリテラル数最小のものにおいて、その正のリテラル数は k である。 □

(証明) 正のリテラル数 k の積項が存在するのは明らか。また、もし正のリテラル数 $k-1$ の積項が存在すると仮定すると、重み $k-1$ の 1-パスが存在するはずであるから、正のリテラル数 $k-1$ の積項は存在しない。よって、これらのことから正のリテラル数 k の素項が存在し、かつ最小の正のリテラル数であることが証明される。 (q. e. d.)

したがって、最小の閉じた被覆を求める問題は、閉被覆関数を表す二分決定グラフ上で最小重みの 1-パスを求める問題として考えることができる。

例として表 4 の機械 M_2 について考えよう。表 5 に M_2 のすべての両立集合とその 1-閉包集合を示す。また、図 2 に $AC=RC$ としたときの閉被覆関数 f_{M_2} を示す。図 3 は f_{M_2} を表す二分決定グラフである。太線で表された 1-パスが最小重みのものである。こ

表 4 不完全指定順序機械 M_2
Table 4 Incompletely specified sequential machine M_2 .

	i_1	i_2	i_3	i_4
a	$c, 0$	$a, 1$	-, -	-, -
b	$b, 0$	$a, -$	-, -	$b, -$
c	-, -	$e, 1$	-, -	$a, 1$
d	$e, 1$	-, -	$a, -$	$e, -$
e	$d, -$	$b, 1$	$b, 0$	-, 0

表 5 M_1 の両立集合とその 1-閉包集合
Table 5 Compatibles and their 1-closure class sets of M_1 .

両立集合	1-閉包集合
abc	ae
ab	bc
ac	ae
ae	ab, cd
bc	ab, ae
cd	ae
de	ab
a	ϕ
b	ϕ
c	ϕ
d	ϕ
e	ϕ

$$\begin{aligned}
 f_{M_1} = & (x_a + x_{ab} + x_{ac} + x_{ae} + x_{abc}) \\
 & \cdot (x_b + x_{ab} + x_{bc} + x_{abc}) \\
 & \cdot (x_c + x_{ac} + x_{bc} + x_{cd} + x_{abc}) \\
 & \cdot (x_d + x_{cd} + x_{de}) \\
 & \cdot (x_e + x_{ae} + x_{de}) \\
 & \cdot (\overline{x_{ab}} + (x_{bc} + x_{abc})) \\
 & \cdot (\overline{x_{ac}} + (x_{ae})) \\
 & \cdot (\overline{x_{ae}} + (x_{cd}) \cdot (x_{ab} + x_{abc})) \\
 & \cdot (\overline{x_{bc}} + (x_{ab} + x_{abc}) \cdot (x_{ae})) \\
 & \cdot (\overline{x_{cd}} + (x_{ae})) \\
 & \cdot (\overline{x_{de}} + (x_{ab} + x_{abc})) \\
 & \cdot (\overline{x_{abc}} + (x_{ae}))
 \end{aligned}$$

図 2 機械 M_1 の閉被覆関数 f_{M_1}
Fig. 2 Closed cover function f_{M_1} of machine M_1 .

の 1-パスは、最小の閉じた被覆 $\{ae, abc, cd\}$ に対応している。

ここで、この 1つの 1-パスは多くの閉じた被覆に対応していることに注意されたい。つまり、サブグラフの共有によって冗長なノードが 9 個削除されているので、 2^9 個の閉じた被覆がこの 1-パスによって表されている。二分決定グラフのサブグラフの共有は、最小の閉じた被覆の探索という意味においては、閉じた被覆の共有としてとらえることができ、これによって膨大な探索空間が比較的小さな空間に縮小されている。二分決定グラフでは、グラフ作成時においても同形なサブグラフの共有が行われるので、同一の両立集合の族が多くの閉じた被覆において存在する場合、大きな効果が期待できる。

この例では、すべての両立集合を最小の閉じた被覆

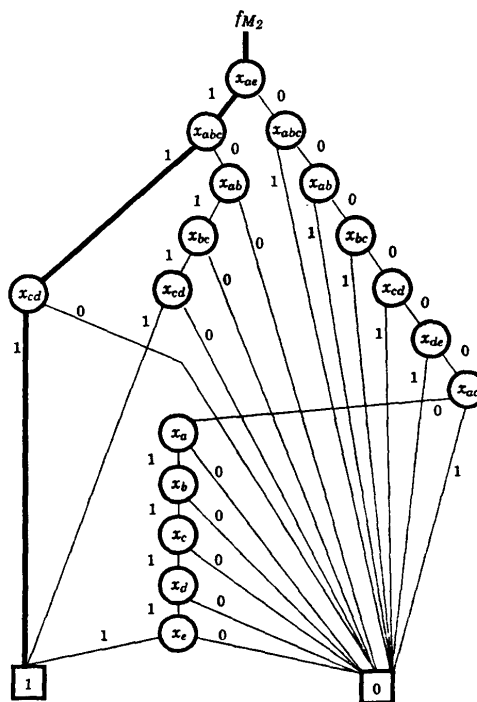


図 3 閉被覆関数 f_{M_1} の二分決定グラフ
Fig. 3 Binary decision diagram of closed cover function f_{M_1} .

の要素の候補として考えているが、少なくとも 1つの最小の閉じた被覆を求めるためには 3 章で述べた基本両立集合のみを最小解の候補とすれば良いので、さらに効率的に最小解を求めることができる。

二分決定グラフ上で最小重みの 1-パスを求めるために、各ノード v に対して、以下の定義による属性値 $weival(v)$ を計算する。

- もし v がグラフの葉であるならば、
 - v が "1" の葉であるならば $weival(v) = 0$
 - v が "0" の葉であるならば $weival(v) = \infty$
- もし v がグラフの葉でないならば、
 $weival(v) = \min(weival(low(v)), weival(high(v)) + 1)$

ここで $low(v)$, $high(v)$ はそれぞれ、 v の "0" エッジの指す子ノード、 v の "1" エッジの指す子ノードを表すとする。各ノードに対して $weival(v)$ を計算するためには、グラフを返りがけ順になぞればよいので、グラフのノード数に比例した時間で計算可能である。

以下に二分決定グラフを用いて、1つの最小の閉じた被覆の選択を行うためのアルゴリズムを示す。

(最小の閉じた被覆の選択アルゴリズム)

[手順 1] 機械 M に対して、2 章で述べたアルゴ

リズムを用いて基本両立集合を求める。基本両立集合を RC として、閉被覆関数 f_M を作成し、 f_M を二分決定グラフで表現する。このグラフを f_{BDD} とする。

【手順2】 f_{BDD} の各ノード v に対して $weival(v)$ を計算する。

【手順3】 変数 $cnode$ と配列 MCC を用意する。 $cnode$ に f_{BDD} の根を代入する。

【手順4】 もし、 $cnode$ がグラフの葉であるならば、手順6へ。そうでないならば、手順5へ。

【手順5】 もし、 $weival(low(cnode)) < weival(high(cnode)) + 1$ ならば、 $cnode$ に $low(cnode)$ を代入して、手順4へ。そうでないならば、 MCC に $cnode$ を記録し、 $cnode$ に $high(cnode)$ を代入して、手順4へ。

【手順6】 MCC に記録されているノードの集合に対応する両立集合の族が最小の閉じた被覆である。終了。

通常、最小の閉じた被覆にとって必須とする両立集合をあらかじめ選択して探索の効率化が図られる。しかし本アルゴリズムでは、二分決定グラフの変数の順序付けに動的重み付け法⁹⁾を用いることによって、必須となる両立集合は自動的にグラフの根に近い位置に順序付けられるため、特にそのような処理を行わなくとも、十分効率的に探索が行われる。

5. 最小の閉じた被覆の上限値の利用

本章では、最小の閉じた被覆の要素数の上限値を最小解の探索において利用する手法について述べる。

まず最初に基本両立集合の生成の際に定義された拡張閉包集合、状態被覆集合の概念を用いた最小の閉じた被覆の要素数の上限値に関する定理について述べる。以下では、最小の閉じた被覆の要素数を $|MCC|$ で表す。

【定義10】 極大基本両立集合とは、他のどの基本両立集合にも含まれない基本両立集合である。□

【定理4】 極大基本両立集合の個数を p としたとき、 $|MCC| \leq p$ である。□

(証明) すべての極大基本両立集合からなる族が被覆性、閉包性を満足していることは明らか。

(q. e. d.)

【定理5】 基本両立集合 C_i に対して、 $q(C_i)$ を $\{C_i\} \cup ES(C_i)$ なる両立集合の族の要素数とする。

このとき、 $q = \min_i (q(C_i))$ とすると $|MCC| \leq q$ である。□

(証明) $\{C_i\} \cup ES(C_i)$ なる族が、被覆性、閉包性を満足していることは明らか。(q. e. d.)

これらの上限値は基本両立集合を生成した後であれば、簡単に計算することができる。よって、与えられた機械の状態数を n 、極大両立集合の個数を m とするとき、最小の閉じた被覆の要素数の上限値 u として、 $u = \min(n, m, p, q)$ なる値を用いる。

以上述べた上限値を4章で述べた最小解の選択において利用する手法について、以下では考察する。

閉被覆関数を二分決定グラフによって表現することができれば、グラフのノード数に比例した時間で最小の閉じた被覆を求めることが可能である。しかしながら、考慮すべき両立集合の個数が多い場合、グラフのノード数が非常に多くなり、限られたメモリ上においては閉被覆関数を二分決定グラフによって表現できない場合がある。

しかしこの場合、明らかに重みが u より大きい値をとる1-パスは、最小の閉じた被覆の生成において考慮される必要はない。したがって、これらの1-パスをグラフ上から除去することを考える。

ここでは、しきい値関数を用いて冗長な1-パスを除去する手法について述べる。以下では、 T_i を入力ベクトルのハミング重みが i 以上のとき、出力が1となるしきい値関数とする。

しきい値関数 T_{u+1} (u は上限値) の否定 $\overline{T_{u+1}}$ と閉被覆関数 f_M の論理積を二分決定グラフによって表現することによって、冗長である1-パスはグラフ上から除去される。 $\overline{T_{u+1}}$ なる関数はたかだかノード数 $(u+1) \cdot (k-u)$ (k は最小解の要素の候補となる両立集合の個数) なる二分決定グラフとして表現され、関数どうしの論理演算はグラフのノード数にほぼ比例した時間で行えるため、この処理は大きな計算量の増加を伴わずに行える。すなわち、まず $\overline{T_{u+1}}$ のグラフを作成しておき、そのグラフと閉被覆関数の各和項のグラフとの間の論理積をとるという処理を繰り返せばよい。

$\overline{T_{u+1}} \cdot f_M$ なるブール関数を上限値付き閉被覆関数 (upper bounded closed cover function) と呼ぶことにしよう。上限値付き閉被覆関数を用いた場合、サブグラフの共有が阻害されてノード数が増加することも考えられるが、例えば、基本両立集合の個数が非常に多いような機械に対しては有効な手法であると考えら

表 6 実験結果
Table 6 Experimental results.

	機械データ			項目 (A)			項目 (B)				
	状態数	入力数	出力数	AC	SC	PC	# MCC	上限値なし		上限値あり	
								ノード数	CPU (秒)	ノード数	CPU (秒)
ISSM 1	6	3	2	19	7	6	3	3	1.4	2	1.5
ISSM 2	8	4	2	40	10	7	3	3	1.7	3	1.7
ISSM 3	9	4	2	97	44	41	4	985	6.7	416	7.4
ISSM 4	22	4	2	509	113	88	9	46450	112.1	8622	193.8
ISSM 5	11	3	4	1151	49	20	2	185	28.8	219	29.0
ISSM 6	13	10	10	63	23	11	6	18	2.2	24	2.2
ISSM 7	22	7	10	143	70	36	10	398	11.7	781	12.5
ISSM 8	15	4	4	67	17	5	5	1	1.9	1	1.9
ISSM 9	25	3	2	157	70	53	17	27209	21.9	48664	77.7
ISSM 10	12	4	3	255	213	213	3	-	-	1082	565.9

AC は全両立集合の個数を, SC は symbolic compatible の個数を, PC は primal compatible の個数を示す.
“-” は二分決定グラフのノード数が 200000 をオーバーして最小解を得られなかったことを示す.

れる.

また, 以上の議論では冗長な 1-パスを除去するためにしきい値関数を用いたが, バイナリサーチなどの手法を用いて, 解の探索にしきい値関数との論理積を用いる手法も考えられる.

6. 実現と評価

本論文で述べた最小化アルゴリズムを UNIX 上の C 言語で実現した. なお, 実現においては, 共有二分決定グラフ⁹⁾を用いている. 共有二分決定グラフは複数の関数間でのサブグラフの共有を行う二分決定グラフであり, 種々の効率化手法によってより少ないノード数で関数を表現可能である.

評価のために様々な文献より採った 10 個の不完全指定順序機械に対して厳密な最小化を Sun 3/60 上で行った結果を表 6 に示す.

項目(A)は基本両立集合の個数と, Rao & Biswas によって提案された symbolic compatible⁵⁾の個数との比較である. この結果より基本両立集合がより多くの両立集合を除去しており, 最小解を求めるための計算量をより削減しようということが確認された.

項目(B)は作成したプログラムによって最小化を行った結果である. #MCC は最小の閉じた被覆の要素数を, 次に閉被覆関数を用いた場合の実行時間とグラフのノード数を, 最後に上限値付き閉被覆関数を用いた場合の実行時間とグラフのノード数をそれぞれ示している. ここで実行時間は基本両立集合の生成から, 最小の閉じた被覆の選択までの時間をすべて含んで

いる.

実行時間には二分決定グラフ上での探索時間以外も含まれているため, 必ずしもグラフのノード数に比例した時間となっていないが, 明らかな関連は見えてくることできる. また, ノード数は解の候補となる両立集合数の指数オーダーである全探索空間に比べ, はるかに小さくなっており, 以上の結果よりこのような組合せ問題に対して, 二分決定グラフを用いた手法が有効であることが確認された.

上限値付き閉被覆関数を用いることによって, 実行時間の大きな増加を招くことなく, ISSM3, 4, 10 においてはノード数の削減が行われている. 特に ISSM 10 は閉被覆関数を用いた場合, グラフの計算途中でノード数が用意されていたメモリ (最大 20 万ノード) をオーバーフローしてしまい最小解が求められなかったが, 上限値付き閉被覆関数を用いることによって最小解を求めることができた. ただし, ISSM 5, 6, 7, 9 に対しては, 逆にノード数の増加が観察された. これはサブグラフの共有が阻害されたためであり, このような機械に対する対策を考慮する必要がある.

7. おわりに

本稿ではブール式処理に基づく不完全指定順序機械の最小化について述べた. 閉被覆関数の包含関係に基づく基本両立集合の概念と, 最小の閉じた被覆を選択するために二分決定グラフを用いて解空間の共有を行う手法からなるアルゴリズムを提案し, 実験結果による評価を行った. 特に二分決定グラフの組合せ問題に

おける利用は、広く応用が考えられる。

アルゴリズムの基本として、ブール式を用いているため、さらに新たな条件を追加して考えることも容易である。そこで今後の課題として、状態数の最小化だけではなく、順序機械の状態割当をも同時に考えるといった新たな問題への応用が考えられる。順序機械の設計自動化において、真に最小な実現を求めるという意味からも非常に重要な問題であろう。

謝辞 本研究の遂行にあたり、ご討論、ご助言いただいた本学情報工学教室の平石裕実助教授、高木直史博士、石浦菜岐佐氏、荻野博幸氏をはじめとする矢島研究室の諸氏に深謝いたします。特に二分決定グラフに関して有意義なご助言をいただいた湊真一氏に感謝いたします。

参 考 文 献

- 1) Paul, M. C. and Unger, S. H.: Minimizing the Number of States in Incompletely Specified Sequential Switching Functions, *IRE Trans. Electron. Comput.*, Vol. EC-8, pp. 356-367 (1959).
- 2) Grasselli, A. and Luccio, F.: A Method for Minimizing the Number of Internal States in Incompletely Specified Sequential Networks, *IEEE Trans. Electron. Comput.*, Vol. EC-14, pp. 350-359 (1965).
- 3) Meisel, W. S.: A Note on Internal State Minimization in Incompletely Specified Sequential Networks, *IEEE Trans. Electron. Comput.*, Vol. EC-16, pp. 508-509 (1967).
- 4) Luccio, F.: Extending the Definition of Prime Compatibility Classes of States in Incomplete Sequential Machine Reduction, *IEEE Trans. Comput.*, Vol. C-18, pp. 537-540 (1969).
- 5) Rao, C. V. S. and Biswas, N. N.: Minimization of Incompletely Specified Sequential Machines, *IEEE Trans. Comput.*, Vol. C-24, pp. 1089-1100 (1975).

- 6) Yamamoto, M.: A Method for Minimizing Incompletely Specified Sequential Machines, *IEEE Trans. Comput.*, Vol. C-29, pp. 732-736 (1980).
- 7) Matsumoto, S.: Minimization of Incompletely Specified Sequential Machines by Boolean Processing, 京都大学修士論文 (1990).
- 8) Bryant, R. E.: Graph-based Algorithms for Boolean Function Manipulation, *IEEE Trans. Comput.*, Vol. C-35, pp. 677-691 (1986).
- 9) 湊 真一, 石浦菜岐佐, 矢島脩三: 論理関数の共有二分決定グラフによる表現とその効率的処理手法, 電子情報通信学会研究報告, VLD 89-80, pp. 39-45 (1989).
- 10) Kohavi, Z.: *Switching and Finite Automata Theory*, McGraw-Hill, New York (1970).

(平成2年3月19日受付)

(平成2年9月11日採録)



松本 忍 (正会員)

昭和39年生。昭和63年京都大学工学部情報工学科卒業。平成2年同大学院修士課程修了。同年、東京電力(株)入社。この間、論理設計理論、論理設計CAD、コンピュータ・グラフィクス等の研究に従事。



矢島 脩三 (正会員)

昭和8年生。昭和31年京都大学工学部電気工学科卒業。同大学院博士課程修了。工学博士。昭和36年より京都大学工学部に勤務。昭和46年情報工学科教授。昭和35年京都大学第一号計算機KDC-1を設計稼動。以来、計算機、論理設計、オートマトン等の研究教育に従事。著書は「電子計算機の機能と構造」(岩波, 57年)等。本学会元常務理事、元会誌編集委員(地方)、元JIP編集委員。電子情報通信学会元評議員およびオートマトンと言語研専元委員長、North-Holland出版元IPL編集委員、IEEE Senior Member。