

準等間隔標本点上の実高速フーリエ変換†

杉浦 洋^{††} 鳥居 達生^{††}

区間 $[0, 2\pi)$ の 2 の巾乗等分点の集合は、周期 2π の周期関数に対する FFT の標本点に用いられる。本稿では、同じ要素数で位相の異なる等間隔標本点の複数個の和集合を準等間隔標本点集合と呼ぶ。我々は、実周期関数に対する、準等間隔標本点上の三角多項式補間の高速算法を提案する。我々の算法は実 FFT の一般化になっており、標本点数 n に対して $O(n \log n)$ の計算量で計算できる。この準等間隔標本点集合とその上の補間算法を用いて、標本点数が小さな比率で増加する効率的な自動関数近似法を構成することができる。

1. はじめに

FFT¹⁾ は、区間 $[0, 2\pi)$ の n 等分点 $E_n := \{2\pi k/n \mid 0 \leq k < n\}$ 上で、周期 2π の周期関数 f の三角多項式補間の係数を高速かつ安定に求める算法であり、一般には、高速性を重視して、 n が 2 の巾乗の基数 2 の FFT がよく用いられる。また、関数 f が実関数の場合には、標本値の実数性を利用して、計算量を半減する実 FFT の算法²⁾ が知られている。

この論文では、与えられた標本点上で実周期関数 f の三角多項式補間の係数を求めることを、実離散型フーリエ変換ということにする。我々の目的は、実 FFT の算法を一般化して、ある種の不等間隔標本点上での実離散型フーリエ変換の高速算法を構成することである。

さて、基数 2 の実 FFT の標本点集合列

$$E_1, E_2, E_4, \dots, E_{2^k}, \dots, \quad (1.1)$$

は、 $E_{2^k} \subset E_{2^{k+1}}$, $k \geq 0$, を満たすので標本点数を増加して補間精度を上げる際に、すでに計算した標本値がすべて再利用できて無駄がない。その反面、標本点数は倍々に増加する。

鳥居らは、Van der Corput 列を有限で打ち切った部分列を標本点集合とする補間が、FFT をつかって効率的に構成できることを示した^{3), 4)}。彼らの補間法では、標本点数を増加させる際の標本値の再利用性が自然に確保される。鳥居らの報告⁵⁾⁻⁷⁾の中で、有効性が実証されている標本点数を低倍率で漸増させる方法では、

$$E_{2^{k+1}} = E_{2^k} \cup \left(E_{2^k} + \frac{\pi}{2^k} \right) = \bigcup_{l=0}^3 \left(E_{2^{k-1}} + \frac{l\pi}{2^k} \right)$$

$$= \bigcup_{l=0}^7 \left(E_{2^{k-1}} + \frac{l\pi}{2^k} \right) = \dots, \quad (1.2)$$

に注目して、式(1.1)式の等間隔標本点集合列の E_{2^k} と $E_{2^{k+1}}$ の間に、

$$\begin{aligned} E_{2^k} \cup \left(E_{2^{k-1}} + \frac{\pi}{2^k} \right) &= \bigcup_{l=0}^2 \left(E_{2^{k-1}} + \frac{l\pi}{2^k} \right), \\ E_{2^k} \cup \left(E_{2^{k-1}} + \frac{\pi}{2^k} \right) \\ &= \bigcup_{l=0}^3 \left(E_{2^{k-1}} + \frac{l\pi}{2^{k-1}} \right) \cup \left(E_{2^{k-1}} + \frac{\pi}{2^k} \right), \end{aligned}$$

などを挿入することにより、標本点値の再利用性を保ちつつ、標本点数をゆっくり増大させることを可能とし、きめ細かい精度コントロールを実現している。ここで、集合にスカラー量を加減乗除したものは、集合の各要素にそのスカラー量を加減乗除したものの集合である。

2, 3章においては、鳥居らの標本点集合を、相異なる κ 個の点よりなる集合 $T = \{\tau_i\}_{i=1}^{\kappa} \subset [0, 2\pi)$, $\kappa \geq 1$, によって定義される標本点集合

$$R_M(T) = \bigcup_{k=1}^{\kappa} \left(E_M + \frac{\tau_k}{M} \right), \quad M \geq 1, \quad (1.3)$$

として一般化し、その上での高速補間法を構成する。

集合 $R_M(T)$ は、いくつかの、要素数が同じで位相の異なる等間隔標本点集合の和集合である。このような標本点集合を、準等間隔と呼ぶことにする。我々の準等間隔標本点上の三角多項式補間法は、従来の実 FFT の算法の基本的な考え方の自然な拡張になっており、 $N \log_2 N + O(N)$ 回の実乗算で計算できる。ここで、 N は標本点数 κM である。

4章では、準等間隔標本点集合を用いて、標本値の再利用性を確保しつつ、標本点数の増加率が任意に小さくとれる補間系列を構成する。

5章では、我々の算法にしたがって実際に数値計算を行い、計算されたフーリエ係数の精度を調べる。

† Real Fast Fourier Transform on Quasi-Equidistant Sample Points by HIROSHI SUGIURA and TATSUO TORII (Department of Information Engineering, Faculty of Engineering, Nagoya University).

†† 名古屋大学工学部情報工学科

2. 実離散型フーリエ変換

この章では、周期 2π の実周期関数 f の三角多項式補間を Lagrange 補間の形式で記述し、その特性を調べる。

この論文では、 e^{ikt} , $k \in \mathbf{Z}$, を周期関数族の基底とし、周期関数をこの基底で展開したものをフーリエ展開の標準型とする。その係数は、断らない限り複素数である。また、 n 次の三角多項式を、

$$g(t) = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^n c_k e^{ikt}, \quad c_0 \in \mathbf{R}, \quad (2.1)$$

の形式で級数表現する。ここで、 Σ^n は、初項と末項を $1/2$ 倍して総和とすることを意味する。

本論文では、我々の算法で重要となる、標本点数が偶数の場合に限定して考察する。区間 $[0, 2\pi)$ 上の大きさ $N=2n$ の標本点集合を U とする。記述を簡単にするために、倍周期三角関数、

$$s(t) := \sin \frac{t}{2}, \quad c(t) := \cos \frac{t}{2}, \quad (2.2)$$

を定義して、 U 上の三角多項式補間の基本多項式を、

$$w(U, \theta; t) := \left\{ \prod_{\varphi \in U - \{\theta\}} \frac{s(t-\varphi)}{s(\theta-\varphi)} \right\} c(t-\theta), \quad \theta \in U, \quad (2.3)$$

と定義する。関数 $w(U, \theta; t)$, $\theta \in U$ は、式(2.2)で定義された倍周期三角関数の偶数個の積の実数倍であるから、周期 2π の n 次実三角多項式であり、

$$w(U, \theta; \theta) = 1, \quad w(U, \theta; \varphi) = 0, \quad \varphi \in U - \{\theta\}, \quad (2.4)$$

が成立する。

以上により、周期 2π の実周期関数 f に対して、

$$L(U)f(t) := \sum_{\theta \in U} w(U, \theta; t) f(\theta), \quad (2.5)$$

は f の U 上の n 次実三角多項式補間である。

$\theta \in U$ について、

$$w(U, \theta; t) = \frac{e^{i(t-\theta)/2} + e^{-i(t-\theta)/2}}{2} \prod_{\varphi \in U - \{\theta\}} \frac{e^{i(t-\varphi)/2} - e^{-i(t-\varphi)/2}}{2is(\theta-\varphi)},$$

であるから、その e^{int} の係数を $w_{\theta,n}$ とすると、

$$w_{\theta,n} = \left\{ \prod_{\varphi \in U - \{\theta\}} 2s(\theta-\varphi) \right\}^{-1} (-i)^{2n-1} \prod_{\varphi \in U} e^{-i\varphi/2},$$

すなわち、

$$w_{\theta,n} \in \alpha(U)\mathbf{R}, \quad \theta \in U, \quad \alpha(U) := (-1)^{n+1} i \prod_{\varphi \in U} e^{-i\varphi/2}, \quad (2.6)$$

である。式(2.5)で、 $f(\theta) \in \mathbf{R}$, $\theta \in U$, であるから、 U 上の三角補間多項式 $L(U)f$ の e^{int} の係数は $\alpha(U)\mathbf{R}$

に属する。したがって、

$$L(U)f(t) \in \Pi(U) := \left\{ \operatorname{Re} \sum_{k=0}^n c_k e^{ikt} \mid c_0 \in \mathbf{R}, c_n \in \alpha(U)\mathbf{R} \right\}, \quad (2.7)$$

を得る。このことより、次の補間の一意性の定理を得る。

[定理 2.1] f を周期 2π の実周期関数、 $f_n \in \Pi(U)$ とする。 f_n が f の U 上の補間なら、 $f_n = L(U)f$ である。

(証明) 空間 $\Pi(U)$ の \mathbf{R} 上の次元は N で、標本点数と一致する。また、式(2.4)、(2.6)より $w(U, \theta; t)$, $\theta \in U$, は、 $\Pi(U)$ の N 個の一時独立な要素であり、その基底をなす。ゆえに、 f_n は、基底 $w(U, \theta; t)$, $\theta \in U$, の線形結合で一意に表される。 f_n の補間条件より、それは、

$$f_n(t) = \sum_{\theta \in U} w(U, \theta; t) f(\theta),$$

にはかならない。//

我々の定義(2.5)が、従来の離散型実フーリエ展開の拡張となっていることを示すために、 U を等間隔標本点 $E_N + \tau/N$ にとってみる。この場合、

$$\alpha\left(E_N + \frac{\tau}{N}\right) = (-1)^{n+1} i \prod_{l=0}^{N-1} e^{-i((\pi l/n) + (\tau/N))/2} = (-1)^{n+1} i e^{-i(n-1/2)\pi - i\tau/2} = e^{-i\tau/2}, \quad (2.8)$$

である。

実 FFT は、実周期関数 f の E_N 上の三角多項式補間 f_n を、

$$f_n(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) + \frac{1}{2} a_n \cos nt,$$

の形式で求める高速算法である。ここで、 a_k , $0 \leq k \leq n$, b_k , $1 \leq k \leq n-1$, は実数である。

$\tau \neq 0$ のときは、関数 $f(t + \tau/N)$ を E_N 上で離散型実フーリエ展開して、 $f_n(t + \tau/N)$ とする。すなわち、

$$f_n(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(a_k \cos k\left(t - \frac{\tau}{N}\right) + b_k \sin k\left(t - \frac{\tau}{N}\right) \right) + \frac{1}{2} a_n \cos n\left(t - \frac{\tau}{N}\right),$$

である。これを、基底、 $\{1, \cos t, \dots, \cos nt, \sin t, \dots, \sin nt\}$ で展開し、展開係数を求める。さらに、これ

を、基底 $\{e^{ikl}\}_{-n \leq k \leq n}$ で展開すれば、その e^{ikl} の係数 c_n は、

$$c_n = \frac{1}{2} a_n e^{-i\tau/2} \in \alpha \left(E_N + \frac{\tau}{N} \right) \mathbf{R},$$

を満たす。ゆえに、 $f_n \in \Pi(E_N + \tau/N)$ で、定理 2.1 より、 $f_n = L(E_N + \tau/N)f$ となる。すなわち、等間隔標本点 $U = E_N + \tau/N$ をとれば、我々の実離散型フーリエ変換は従来のものと一致する。

3. 準等間隔標本点上の高速算法

この章では、定められた $T = \{\tau_k\}_{k=1}^{\kappa} \subset [0, 2\pi)$, $\kappa \geq 1$, について、式 (1.3) で定義された準等間隔標本点集合 $R_M(T)$ 上の三角多項式補間の算法を構成する。 M は 2 の中で 2 以上の整数とする。 $\mu = M/2$ として、

$$\begin{cases} E_{M,k} := E_M + \frac{\tau_k}{M} = \{u_{m,k}\}_{m=0}^{M-1}, \\ u_{m,k} := \frac{\pi m}{\mu} + \frac{\tau_k}{M}, \\ w_{m,k}(t) := w(R_M(T), u_{m,k}; t), \\ 0 \leq m \leq M-1, 1 \leq k \leq \kappa, \end{cases}$$

と定義すると、定義式 (2.3) より、

$$\begin{aligned} w_{m,k}(t) &= \left\{ \prod_{j=1, j \neq k}^{\kappa} \prod_{l=0}^{M-1} \frac{s\left(t - \frac{\pi}{\mu} l - \frac{\tau_j}{M}\right)}{s\left(\frac{\pi}{\mu} m + \frac{\tau_k}{M} - \frac{\pi}{\mu} l - \frac{\tau_j}{M}\right)} \right\} \\ &\quad \times \left\{ \prod_{l=0, l \neq m}^{M-1} \frac{s\left(t - \frac{\pi}{\mu} l - \frac{\tau_k}{M}\right)}{s\left(\frac{\pi}{\mu} m - \frac{\pi}{\mu} l\right)} \right\} c\left(t - \frac{\pi}{\mu} m - \frac{\tau_k}{M}\right) \\ &= \left\{ \prod_{j=1, j \neq k}^{\kappa} \prod_{l=0}^{M-1} \frac{s\left(t - \frac{\pi}{\mu} l - \frac{\tau_j}{M}\right)}{s\left(\frac{\pi}{\mu} m + \frac{\tau_k}{M} - \frac{\pi}{\mu} l - \frac{\tau_j}{M}\right)} \right\} \\ &\quad \times w(E_{M,k}, u_{m,k}; t), \end{aligned}$$

となる。したがって、公式

$$\begin{aligned} \prod_{l=0}^{n-1} \sin\left(x - \frac{\pi}{n} l\right) &= \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \sin nx, \quad n \geq 1, \\ \sin(x + \pi m) &= (-1)^m \sin x, \quad m \in \mathbf{Z}, \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} w_{m,k}(t) &= W_k(\mu t) (-1)^{(\kappa-1)m} w(E_{M,k}, u_{m,k}; t), \\ 0 \leq m \leq M-1, 1 \leq k \leq \kappa, \end{aligned} \quad (3.1)$$

を得る。ここで、

$$W_k(t) := \prod_{j=1, j \neq k}^{\kappa} \frac{s(2t - \tau_j)}{s(\tau_k - \tau_j)}, \quad 1 \leq k \leq \kappa, \quad (3.2)$$

である。以上により、

$$\begin{aligned} L(R_M(T))f(t) &= \sum_{k=1}^{\kappa} W_k(\mu t) \sum_{m=0}^{M-1} w(E_{M,k}, u_{m,k}; t) \\ &\quad \times (-1)^{(\kappa-1)m} f(u_{m,k}), \end{aligned} \quad (3.3)$$

となる。

したがって、 T の要素数 κ が奇数のときは、

$$L(R_M(T))f(t) = \sum_{k=1}^{\kappa} W_k(\mu t) L(E_{M,k})f(t), \quad (3.4)$$

T の要素数 κ が偶数のときは、 $t \in E_{M,k}$, $m \in \mathbf{Z}$ のとき、 $\cos(\mu t - \tau_k/2) = (-1)^m$, であるから、

$$\begin{aligned} L(R_M(T))f(t) &= \sum_{k=0}^{\kappa} W_k(\mu t) L(E_{M,k}) \left\{ \cos\left(\mu t - \frac{\tau_k}{2}\right) f(t) \right\}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

が得られる。

ここで、

$$L(E_{M,k})f(t) = \operatorname{Re} \sum_{j=0}^{\mu} C_{k,j} e^{ijt}, \quad 1 \leq k \leq \kappa, \quad (3.6)$$

$$L(R_M(T))f(t) = \operatorname{Re} \sum_{l=0}^{\kappa\mu} c_l e^{ilt}, \quad (3.7)$$

とおく。 M は 2 の中だから、式 (3.6) の $\{C_{k,j}\}_{j=0}^{\mu}$, $1 \leq k \leq \kappa$, は、各 k につき、基数 2 の実 FFT で求められ、その計算に要する実乗算の総数 m_{FFT} は、

$$\begin{aligned} m_{\text{FFT}} &= \kappa(M \log_2 M + O(M)) \\ &= N \log_2 N + O(N), \end{aligned} \quad (3.8)$$

である。ここで $N = \kappa M$ は標本点数である。

次に、式 (3.4), (3.5) により、 $\{C_{k,j}\}_{j=0}^{\mu}$, $1 \leq k \leq \kappa$, から、 $L(R_M(T))f$ の係数 c_l , $0 \leq l \leq \kappa\mu$, の係数を合成する算法を示そう。

3.1 κ が奇数のときの合成則

式 (3.2) の $W_k(t)$, $1 \leq k \leq \kappa$, は、

$$s(2t - \tau_j) = \frac{e^{-it\tau_j/2}}{2i} e^{it} - \frac{e^{it\tau_j/2}}{2i} e^{-it}, \quad 1 \leq j \leq \kappa, \quad (3.9)$$

の偶数個の積の実数倍であるから、

$$\begin{aligned} W_k(t) &= w_{k,0} + \sum_{l=1}^{(\kappa-1)/2} (w_{k,l} e^{2ilt} + w_{k,l} e^{-2ilt}), \\ 1 \leq k \leq \kappa, \end{aligned} \quad (3.10)$$

とかける。式 (3.6), (3.10) を式 (3.4) に代入して、

$$\left\{ \begin{aligned} c_{2l\mu+j} &= \sum_{k=1}^{\kappa} w_{k,l} C_{k,j}, & 0 \leq j \leq \mu-1, \quad 0 \leq l \leq (\kappa-1)/2, \\ c_{2l\mu+\mu} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\kappa} (w_{k,l} C_{k,\mu} + w_{k,l+1} \overline{C_{k,\mu}}), & 0 \leq l \leq (\kappa-3)/2, \\ c_{2l\mu-j} &= \sum_{k=1}^{\kappa} w_{k,l} \overline{C_{k,j}}, & 1 \leq j \leq \mu-1, \quad 1 \leq l \leq (\kappa-1)/2, \\ c_{\kappa\mu} &= \sum_{k=1}^{\kappa} w_{k,(\kappa-1)/2} C_{k,\mu} \end{aligned} \right. \quad (3.11)$$

を得る。

3.2 κ が偶数のときの合成則

式(3.2)の $W_k(t)$, $1 \leq k \leq \kappa$, は, 式(3.9)の $s(2t - \tau_j)$, $1 \leq j \leq \kappa$, の奇数個の積の実数倍であるから,

$$W_k(t) = \sum_{l=0}^{\kappa/2-1} (w_{k,l} e^{i(2l+1)t} + w_{k,l} e^{-i(2l+1)t}), \quad 1 \leq k \leq \kappa, \quad (3.12)$$

とかける。式(2.8)より,

$$\alpha_k := e^{-i\tau_k/2} = \alpha(E_{M,k}), \quad 1 \leq k \leq \kappa, \quad (3.13)$$

とすると,

$$\left\{ \begin{aligned} \cos\left(\mu t - \frac{\tau_k}{2}\right) &= \frac{1}{2} \alpha_k e^{i\mu t} + \frac{1}{2} \overline{\alpha_k} e^{-i\mu t}, \quad 1 \leq k \leq \kappa, \\ e^{\pm i\mu t} &= \alpha_k^{\mp 2}, \quad t \in E_{M,k}, \end{aligned} \right.$$

であるから, $t \in E_{M,k}$, $1 \leq k \leq \kappa$ で,

$$\begin{aligned} \cos\left(\mu t - \frac{\tau_k}{2}\right) e^{ij t} &= \frac{1}{2} \alpha_k e^{i(j+\mu)t} + \frac{1}{2} \overline{\alpha_k} e^{i(j-\mu)t} \\ &= \frac{1}{2} \alpha_k \alpha_k^{-2} e^{i(j-\mu)t} + \frac{1}{2} \overline{\alpha_k} e^{i(j-\mu)t} \\ &= \overline{\alpha_k} e^{i(j-\mu)t}, \quad 0 \leq j \leq \mu, \end{aligned}$$

また上式両辺の複素共役をとって,

$$\cos\left(\mu t - \frac{\tau_k}{2}\right) e^{-ij t} = \alpha_k e^{i(\mu-j)t}, \quad 0 \leq j \leq \mu,$$

となる。これと, 式(3.6)より, $1 \leq k \leq \kappa$ で,

$$\begin{aligned} \cos\left(\mu t - \frac{\tau_k}{2}\right) f(t) &= \cos\left(\mu t - \frac{\tau_k}{2}\right) L(E_{M,k}) f(t) \\ &= \operatorname{Re} \sum_{j=0}^{\mu} \alpha_k \overline{C_{k,\mu-j}} e^{ij t}, \quad t \in E_{M,k}. \end{aligned}$$

$C_{k,0} \in \mathbf{R}$ より, この式の最右辺の級数の $e^{ij t}$ の係数 $\alpha_k \overline{C_{k,0}}$ は $\alpha_k \mathbf{R}$ に属す。したがって, この級数は $\Pi(E_{M,k})$ に属し, 定理 2.1 より,

$$\begin{aligned} L(E_{M,k}) \left\{ \cos\left(\mu t - \frac{\tau_k}{2}\right) f(t) \right\} \\ = \operatorname{Re} \sum_{j=0}^{\mu} \alpha_k \overline{C_{k,\mu-j}} e^{ij t}, \quad 1 \leq k \leq \kappa, \end{aligned} \quad (3.14)$$

である。

式(3.6), (3.14)を式(3.5)に代入して,

$$\left\{ \begin{aligned} c_0 &= \sum_{k=1}^{\kappa} \operatorname{Re}(w_{k,0} \overline{\alpha_k}) C_{k,0}, \\ c_{2l\mu+j} &= \sum_{k=1}^{\kappa} w_{k,l} \overline{\alpha_k} C_{k,j}, & 1 \leq j \leq \mu, \quad 0 \leq l \leq \kappa/2-1, \\ c_{2l\mu-j} &= \sum_{k=1}^{\kappa} w_{k,l} \alpha_k \overline{C_{k,j}}, & 0 \leq j \leq \mu-1, \quad 1 \leq l \leq \kappa/2, \\ c_{2l\mu} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\kappa} (w_{k,l} \overline{\alpha_k} + w_{k,l+1} \alpha_k) C_{k,0}, & 1 \leq l \leq \kappa/2-1, \\ c_{\kappa\mu} &= \sum_{k=1}^{\kappa} w_{k,\kappa/2-1} \alpha_k C_{k,0}, \end{aligned} \right. \quad (3.15)$$

を得る。

標本点数を $N = \kappa M$ とおくと, 式(3.11)の右辺の計算には, 複素乗算が総計 $\kappa N/2 + O(1)$ 回必要である。また, 式(3.15)の右辺も,

$$w_{k,l} \alpha_k, w_{k,l}, \overline{\alpha_k}, \quad 0 \leq l \leq \mu, \quad 1 \leq k \leq \kappa/2-1,$$

をあらかじめ計算しておけば, $\kappa N/2 + O(1)$ 回の複素乗算で計算できる。したがって, $\{C_{k,j}\}_{j=0}^{\mu}, 1 \leq k \leq \kappa$, から, $c_l, 0 \leq l \leq \kappa\mu$, を合成するのに要する実乗算回数 m_{syn} は, κ の偶奇によらず,

$$m_{\text{syn}} = 2\kappa N + O(1), \quad (3.16)$$

である。これと式(3.8)より, 我々の算法に要求される実乗算回数 m_{total} は,

$$m_{\text{total}} = m_{\text{FFT}} + m_{\text{syn}} = N \log_2 N + O(N), \quad (3.17)$$

であり, 通常の等間隔標本点上的実 FFT の計算量とはほぼ等しい。

標本点数が N 個の三角多項式補間法を, 簡単に N 点則と呼ぶことにしよう。我々の算法では, $L(R_{2^m}(T))f$ の係数を計算する $\kappa 2^m$ 点則を, 合成則(3.11), (3.15)により, $L(E_{2^m + \tau_k/2^m})f, 1 \leq k \leq \kappa$, の係数を求める κ 個の等間隔 2^m 点則の問題に簡約した。

今まで記述してきた算法では, これを既成の基数 2 の実 FFT にゆだねた。しかし, 式(1.2)より,

$$\begin{aligned} E_{2^m + \frac{\tau}{2^m}} &= \left(E_{2^{m-1} + \frac{\tau}{2^m}} \right) \cup \left(E_{2^{m-1} + \frac{\tau}{2^m} + \frac{\pi}{2^{m-1}}} \right) \\ &= R_{2^{m-1}} \left(\left\{ \frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2} + \pi \right\} \right). \end{aligned}$$

であるから, この κ 個の 2^m 点則は, 合成則(3.15)を介して, 2κ 個の 2^{m-1} 点則に簡約される。この操作

を繰り返して、結局、 $\kappa 2^m$ 点則は、 $2^{m-1}\kappa$ 個の 2 点則に帰着される。すなわち、 $2^{m-1}\kappa$ 個の 2 点則を、簡約の操作を逆にたどって合成して $\kappa 2^m$ 点則を得る。ここで、 $\kappa=1$, $T=\{0\}$ としたものは、Swarztrauber の記述法による基数 2 の実 FFT⁹⁾ と一致する。

4. 再利用可能標本点集合列

この章では、区間 $[0, 2\pi)$ 上の標本点集合の無限列、 $\{U_n\}_{n \geq 0}$ とその上での三角多項式補間列を考える。標本点集合列が、

$$U_0 \subset U_1 \subset \dots \subset U_n \subset \dots, \tag{4.1}$$

を満たすとき、この系列にしたがって、標本点数を増加する際に、以前の標本値が無駄なく再利用できる。我々は、式(4.1)を満たす標本点集合列を、簡単に再利用可能と呼ぶ。

$U_n, n \geq 0$, を、等間隔標本点集合に限定すれば、再利用性を仮定とすると、相続く標本点集合の標本点数の比は 2 以上となり、標本点数の増加率は大きくならざるを得ない。特に、これを多次元の問題に直積として用いたときは、標本点数の増加は急激である。

我々の準等間隔標本点集合を用いれば、標本点集合列 $\{U_n\}_{n \geq 0}$ の標本数の増加率を、再利用性を保ちつつ、いくらでも小さくできる。

[定理 4.1] 区間 $[0, 2\pi)$ 上の有限集合の列 $\{T_n\}_{0 \leq n \leq \nu-1}$ が、

$$T_0 \subset T_1 \subset \dots \subset T_{\nu-1} \subset R_2(T_0), \tag{4.2}$$

を満たせば、標本点集合列、

$$U_{m+k} := R_{2^m}(T_k), \quad 0 \leq k \leq \nu-1, \quad 0 \leq m, \tag{4.3}$$

は、再利用可能である。

(証明) 式(1.3)により、区間 $[0, 2\pi)$ 上の任意の点集合 A, B について、

$$A \subset B \Rightarrow R_M(A) \subset R_M(B), \quad M \geq 1, \tag{4.4}$$

が成立する。これより、定理の結果は明らかである。

式(4.3)の $\{U_n\}_{n \geq 0}$ においては、 n が ν すすむごとに標本点数が倍増する。したがって、標本点数の平均増加率は、 $\sqrt[\nu]{2}$ である。

第 3 章で述べたように、式(4.3)の $U_n, n \geq 0$, 上の三角多項式補間は、効率的に計算できる。第 1 章で紹介した鳥居らの標本点集合列も、式(4.2), (4.3)で定義される列の例であるが、この定理により、それ以外にも無数の再利用可能標本点集合列がえられる。

たとえば、 T_0 を等間隔標本点集合

$$T_0 = E_\rho, \quad \rho \geq 2, \tag{4.5}$$

とすれば、 $T_0 \subset E_{2\rho} = R_2(T_0)$ は自然に成り立つ。 $T_1, T_1, \dots, T_{\nu-1}$, は、 $E_{2\rho}$ の部分集合で E_ρ を含むものを(4.3)が成立するようにとればよい。実際には、いくつかの可能性の中から、 $U_n, n \geq 0$, 上の三角多項式補間の安定性、精度に配慮して選択がなされるべきである。

5. 数値実験

第 4 章の式(4.5)で $\rho=3$ とし、

$$\tau_1=0, \quad \tau_2=\frac{2\pi}{3}, \quad \tau_3=\frac{4\pi}{3}, \quad \tau_4=\frac{\pi}{3}, \quad \tau_5=\frac{5\pi}{3}, \tag{5.1}$$

$$T_n = \{\tau_1, \dots, \tau_{n+3}\}, \quad 0 \leq n \leq 2, \tag{5.2}$$

とする。 $T_n, 0 \leq n \leq \nu-1, \nu=3$, は式(4.2)を満たすので、式(4.3)で定義された標本点集合列 $\{U_n\}_{n \geq 0}$ は、再利用可能であり、その標本点数の平均増加率は $\sqrt[3]{2}$ である。

$T = T_n, 0 \leq n \leq 2$, について、式(3.2)右辺を三角関数の積和の公式で展開して求めた $W_k(t), 1 \leq k \leq \kappa = n+3$, を示す。

< a > $T = T_0 := \{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}$ のとき、

$$\begin{cases} W_1(t) = (1 + 2 \cos 2t)/3, \\ W_2(t) = \left(1 + 2 \cos\left(2t - \frac{2\pi}{3}\right)\right)/3, \\ W_3(t) = \left(1 + 2 \cos\left(2t + \frac{2\pi}{3}\right)\right)/3. \end{cases} \tag{5.3}$$

< b > $T = T_1 := \{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4\}$ のとき、

$$\begin{cases} W_1(t) = \left(2 \cos t + 2 \cos\left(3t + \frac{\pi}{3}\right)\right)/3, \\ W_2(t) = \left(2 \cos\left(t - \frac{\pi}{3}\right) + 2 \cos\left(3t + \frac{2\pi}{3}\right)\right)/3, \\ W_3(t) = \left(2 \cos\left(t - \frac{2\pi}{3}\right) + 2 \cos 3t\right)/3, \\ W_4(t) = \cos\left(3t - \frac{\pi}{2}\right). \end{cases} \tag{5.4}$$

< c > $T = T_2 := \{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5\}$ のとき、

$$\begin{cases} W_1(t) = (1 + 2 \cos 4t)/3, \\ W_2(t) = \left(1 + \sqrt{3} \cos\left(2t - \frac{5\pi}{6}\right) + \cos\left(4t + \frac{\pi}{3}\right)\right)/3, \\ W_3(t) = \left(1 + \sqrt{3} \cos\left(2t + \frac{5\pi}{6}\right) + \cos\left(4t - \frac{\pi}{3}\right)\right)/3, \\ W_4(t) = \left(\sqrt{3} \cos\left(2t - \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3} \cos\left(4t - \frac{5\pi}{6}\right)\right)/3, \\ W_5(t) = \left(\sqrt{3} \cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3} \cos\left(4t + \frac{5\pi}{6}\right)\right)/3. \end{cases} \tag{5.5}$$

$T = T_0, T_2$ のときは, T の大きさ $\kappa = 3, 5$ は奇数であり, 式 (5.3), (5.5) と公式

$$\cos(kl + \alpha) = \frac{e^{i\alpha} e^{ikl} + e^{-i\alpha} e^{-ikl}}{2},$$

$$k \geq 0, 0 \leq \alpha < 2\pi,$$

より, 式 (3.10) の右辺の係数 $w_{k,l}$, $0 \leq l \leq (\kappa - 1)/2$, $1 \leq k \leq \kappa$, が計算できる.

$T = T_1$ のときは, T の大きさ $\kappa = 4$ は偶数であり, 式 (5.4) より, 式 (3.12) の右辺の係数 $w_{k,l}$, $0 \leq l \leq \kappa/2 - 1$, $1 \leq k \leq \kappa$, がわかる. また, 式 (3.13) の α_k , $1 \leq k \leq \kappa$, も簡単に計算できる.

これらを使って, κ の偶奇にしたがって, 式 (3.11) または (3.15) により, $L(E_{M,k})f$, $1 \leq k \leq \kappa$, の係数から, $L(R_M(T))f$ の係数を合成できる.

実際に合成に要した実乗算回数 m_{syn} は, T_0, T_1, T_2 の特殊性から, (3.16) に示したものより少なく, 標本点数 N に対して,

$$m_{syn} = \begin{cases} \frac{4}{3} N + O(1), & T = T_0, \\ \frac{7}{4} N + O(1), & T = T_1, \\ \frac{7}{5} N + O(1), & T = T_2, \end{cases} \quad (5.6)$$

となった. ただし, 2進計算機の特徴を考慮し, 2, 0.5 の乗算は m_{syn} に含めていない.

実際に, $T = T_0, T_1, T_2$, $M = 2^m$, $4 \leq m \leq 9$, について, $L(R_M(T))f$ の係数を求めた結果を次に示す.

テスト関数 f として,

$$f(t) := \frac{1 + 2a \sin t - a^2}{1 - 2a \cos t + a^2} = 1 + \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} (1-i)a^n e^{in t},$$

$$a = 0.95, \quad (5.7)$$

を採用し, 基数 2 の実 FFT により $L(E_{M,k})f$, $1 \leq k \leq \kappa$, の係数を求め, $L(R_M(T))f$ の係数を式 (3.11), (3.15) により合成した結果を, 図 1 に示す.

図 1 のグラフでは, 横軸に標本点数 N , 縦軸に誤差 ε の常用対数を示した. 誤差 ε は, 係数誤差の絶対値和を, 真の係数の絶対値和 $= 27.870 \dots$ で割った相対誤差である.

標本点数 $N = 48, \dots, 3 \times 2^m, \dots, 1536$ の場合は, $T = T_0$ であり, $R_{2^m}(T)$ は, 等間隔標本点 $E_{3 \cdot 2^m}$ である. 標本点数 $N = 64, \dots, 4 \times 2^m, \dots, 2048$ のときは $T = T_1$, $N = 80, \dots, 5 \times 2^m, \dots, 2560$ のときは $T = T_2$ で, $R_{2^m}(T)$ は, 準等間隔であるが等間隔ではない. 図 1 のグラフは, ほぼ直線的に降下し, 10^{-13} あたりで丸め誤差の限界に達しており, $T = T_1, T_2$ の場合

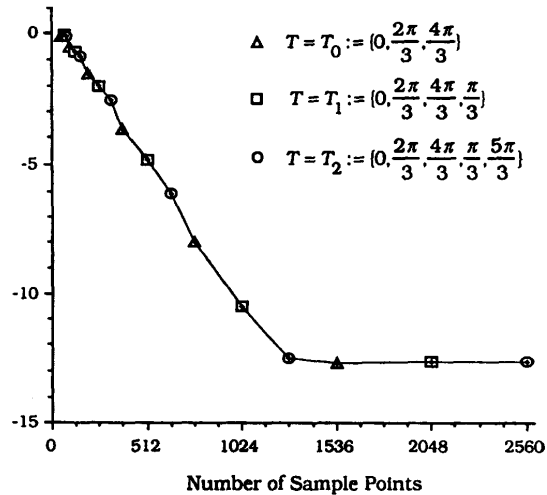


図 1 関数 $f(t) = \frac{1 + 2a \sin t - a^2}{1 - 2a \cos t + a^2}$, $a = 0.95$, に対する準等間隔標本点上の離散型フーリエ係数の相対誤差
Fig. 1 Relative error of real discrete Fourier coefficients on quasi-equidistant sample point sets for the function $f(t) = \frac{1 + 2a \sin t - a^2}{1 - 2a \cos t + a^2}$, $a = 0.95$.

についても, 精度, 安定性において目立った劣化はみられない.

数値実験は, 名古屋大学大型計算機センターの FACOM M 780 上で, FORTRAN 77 の倍精度計算を用いておこなった.

6. おわりに

基数 2 の実 FFT の算法を一般化し, 準等間隔標本点上の離散型フーリエ変換, すなわち, 三角多項式補間の算法を提案した. 我々の算法により, 位相差のある, 大きさの等しい標本点上の離散型フーリエ変換を, 基数 2 の実 FFT と同等の計算量で計算することができる.

また, 準等間隔標本点集合を用いて, 式 (4.1) で定義された, 再利用性を持ち, 標本点数の増加率の小さい標本点集合列を構成した.

数値実験によれば, 準等間隔標本点上の離散型フーリエ変換は, 精度においても安定性においても従来の等間隔標本点上の離散型フーリエ変換と比べてほとんど遜色はない.

参考文献

1) Cooley, J. W. and Tukey, J. W.: An Algorithm for the Machine Calculation of Complex

- Fourier Series, *Math. Comp.*, Vol. 19, No. 90, pp. 297-301 (1965).
- 2) Bergland, G.D.: A Fast Fourier Transform Algorithm for Real-Valued Series, *Comm. ACM*, Vol. 11, No. 10, pp. 703-710 (1968).
 - 3) 鳥居達生, 長谷川武光: 標本点数を低倍率で漸増させる実関数の FFT, *情報処理学会論文誌*, Vol. 24, No. 3, pp. 343-350 (1983).
 - 4) 鳥居達生, 杉浦 洋: 基数 2 の FFT に基づく任意項数の離散型 Fourier 変換, *情報処理学会論文誌*, Vol. 25, No. 1, pp. 30-36 (1984).
 - 5) 長谷川武光, 鳥居達生: コーシーの主値積分に対する自動積分法, *情報処理学会論文誌*, Vol. 25, No. 5, pp. 857-863 (1984).
 - 6) Hasegawa, T. and Torii, T.: Indefinite Integration of Oscillatory Functions by the Chebyshev Series Expansion, *J. Comp. Appl. Math.*, Vol. 17, No. 1 & 2, pp. 21-29 (1987).
 - 7) 長谷川武光, 鳥居達生: 対数特異性をもつ関数の不定積分に対する自動積分法, *情報処理学会論文誌*, Vol. 28, No. 9, pp. 907-913 (1987).
 - 8) Swarztrauber, P.N.: Symmetric FFTs, *Math. Comp.*, Vol. 47, No. 175, pp. 323-346 (1985).

(平成 2 年 5 月 17 日受付)

(平成 2 年 9 月 11 日採録)



杉浦 洋 (正会員)

昭和 27 年生. 昭和 57 年名古屋大学理学部数学科卒業. 昭和 53 年同大学大学院理学研究科数学専攻修士課程修了. 昭和 56 年同大学大学院工学研究科情報工学専攻博士課程満了. 昭和 57 年より同大学工学部助手. 数値積分と積分方程式に興味をもつ.



鳥居 達生 (正会員)

昭和 9 年熊本県生. 昭和 32 年九州工業大学電気工学科卒業. 同年新日本窒素肥料(株)就職. 昭和 39 年同社退職. 同年大阪大学工学部助手(応用物理学科). 昭和 50 年名古屋大学工学部情報工学科講師, 助教授を経て昭和 60 年教授. 数値解析, 数学ソフトウェアの研究に従事. とくに FFT を基礎に関数近似, 数値積分について研究している.