

FISM による合意モデル構築支援†

大内 東** 栗原 正 仁**

システムの構造モデリングを柔軟におこなう FISM 構造モデリング法において、合意形成を無矛盾かつ効率良く実行する方法を提案している。主要点をまとめると以下のようである。(1)与えられた部分可到達行列の随伴合意行列が部分可到達行列であること、および、比較行列が部分可到達行列であることを証明した。(2)比較行列の随伴合意行列は合意関係を表すことを示し、合意関係、合意グラフ、主張グラフ、簡易主張グラフを定義し、これらを利用した合意形成法を提案した。

1. はじめに

現代の情報システムに対する要求はますます多様化してきており、これらの要求を満たすためにシステムは大規模、複雑、多目的なものとなってきている。これらのシステムを計画、設計、構築、運用するためには従来の動的モデリングに加えて、構造モデリングが必要となる^{1),2)}。

構造モデリングとは、システムの構成要素集合とその上に定義される二項関係に注目し、システムの構造を有向グラフ等を用いて解析する方法であり、代表的なものに J. N. Warfield 氏が提案した ISM (Interpretive Structural Modeling) がある³⁾。

著者らは従来の ISM の拡張として、人間の思考過程に忠実な機能を提供した、部分可到達行列モデルの理論に基づく柔軟な ISM (Flexible ISM), 「FISM」を提案している⁴⁾⁻⁶⁾。部分可到達行列は未知要素を含む二値行列で可到達行列の拡張である。このモデルの導入により、飛躍的に利用性が向上し、知識獲得のツールとして利用されるなど、新しい分野への応用も考えられている⁷⁾。

本論文では FISM の機能の 1 つとして、従来の ISM では取り扱うことが不可能であった合意形成支援について述べる。合意形成とは異なるグループが作成した FISM モデルを比較し、各グループの意見の相違点を明確にし、相違点を重点的に議論し、効率良くかつ論理的矛盾を含まないように合意モデルを作成することである。

2. 部分可到達行列モデル

2.1 諸記号, 諸定義

本論文で使用される主な記号と定義について記述する。さらに必要なものについてはその都度定義する。演算は特に断らない限り二値ブール代数である。ブール変数 m の否定を通常のように \bar{m} と書く。0 と I はそれぞれゼロ行列と単位行列を表す。

定義 1: 可到達行列とは以下の条件を満たす正方二値行列 M である:

$$M + I = M, \quad (1)$$

$$M^2 = M. \quad (2)$$

定義 2: 部分的既知な二値行列とは、その要素が 1, 0, またはブール変数 x である行列である。 m_{ij} が未知要素であることを $m_{ij} = x$, または単に x_{ij} と書く。

定義 3: 部分的既知な反射的二値行列とは、対角要素がすべて 1 である部分的既知な二値行列である。

定義 4: 部分的既知な可到達行列とは部分的既知な反射的二値行列でかつ以下の無矛盾性と極大性の条件を満たす行列である。部分可到達行列と略す。

(1) 無矛盾性

行列 M が無矛盾であるとは

$$m_{ij} = 0, \quad m_{ik} = m_{kj} = 1, \quad (3)$$

を満たす (i, j, k) が存在しないことをいう。

(2) 極大性

行列 M が極大であるとは

$$(m_{ij} = x, \quad m_{kj} = 0, \quad m_{ki} = 1), \quad (4)$$

$$(m_{ij} = x, \quad m_{ik} = 0, \quad m_{jk} = 1), \quad (5)$$

$$(m_{ij} = x, \quad m_{ik} = 1, \quad m_{kj} = 1), \quad (6)$$

のいずれの条件をも満たす要素の三組 (i, j, k) が存在しないことをいう。

したがって、 M が無矛盾かつ極大ならば、 $m_{ik} = m_{kj} = 1$ ならば $m_{ij} = 1$ である。特別な例として、対角

† Developing a Consensus Model in Flexible ISM by AZUMA OHUCHI and MASAHITO KURIHARA (Department of Information Engineering, Faculty of Engineering, Hokkaido University).

** 北海道大学工学部情報工学科

要素以外はすべて未知である部分的既知な反射的二値行列と、(すべての要素が既知である) 可到達行列は部分可到達行列である。

定義 5: 部分可到達行列モデル

部分可到達行列モデル \mathcal{M} は部分可到達行列と5つの組からなる6つ組である:

$$\mathcal{M} = \{M, V, H, R, \bar{R}, \hat{R}\}. \quad (7)$$

ここで、 M は部分可到達行列、 V は M の垂直添字集合、 H は M の水平添字集合である。また、 R, \bar{R}, \hat{R} は、互いに素な $V \times H$ の分割であり、以下で定義される。

$$R = \{(i, j) | m_{ij} = 1, i \in V, j \in H\}, \quad (8)$$

$$\bar{R} = \{(i, j) | m_{ij} = 0, i \in V, j \in H\}, \quad (9)$$

$$\hat{R} = \{(i, j) | m_{ij} = x, i \in V, j \in H\}. \quad (10)$$

V と H を順序集合とすると、 \mathcal{M} を簡単に $M(V, H)$ と表す。

2.2 部分可到達行列のグラフ表現

部分可到達行列 M を有向グラフとして表現することができる²⁾。すなわち、すべての未知変数 x を 0 とおき、節点集合を M の添字集合とし、矢線集合を M の要素の値が 1 である添字対で定義することにより、 M に対応する有向グラフを定義できる。このとき、強連結成分を縮約し 1 つの節点で代表させ、冗長なアークを削除して本質的な矢線のみでグラフを描くと理解しやすい。このために M の縮約行列 N を求め、 N の推移的リダクション T を求める⁸⁾。 T は N の本質的でない 1 を 0 に置いた行列であり、 N に対して T は一意である。

2.3 部分可到達行列の含意

部分可到達行列の含意を表す行列と含意を求めるアルゴリズムについて述べる。

定義 6: 部分可到達行列における含意

部分可到達行列 M の未知要素 x_{ij} に値 0 または 1 を与えたとする。新たな M が再び部分可到達行列となるためには、既知の値とこの値から他の未知要素の値を決定し、結果が無矛盾かつ極大となるようにしなければならない。これは含意を計算することに相当する。以下の 3 種類の含意が存在する:

1 \Rightarrow 1 含意とは、 x_{ij} に 1 を与えたとき、他の未知要素 x_{pq} を 1 とする含意である。

1 \Rightarrow 0 含意とは、 x_{ij} に 1 を与えたとき、他の未知要素 x_{pq} を 0 とする含意である。

0 \Rightarrow 0 含意とは、 x_{ij} に 0 を与えたとき、他の未知要素 x_{pq} を 0 とする含意である。

2.4 含意行列

部分可到達行列の含意は行列モデルで表現することができる。

定理 1: M の成分をすべて変数 (リテラル) m_{ij} で表現し、第 i 行を行ベクトル $R_i = (m_{i1}, m_{i2}, \dots, m_{in})$ とする。同様に、 M の第 j 列を列ベクトル C_j とする。部分可到達行列の含意は、 $R = (R_1, R_2, \dots, R_n)$ 、 $C^T = (C_1^T, C_2^T, \dots, C_n^T)$ とするとき、垂直添字ベクトル $V = (\bar{C}, R^T)$ と水平添字ベクトル $H = V^T = (\bar{C}^T, R)$ とを持つ次の含意行列 Ψ により表される⁹⁾。 Ψ を M の随伴含意行列と呼ぶ。

$$\Psi = \begin{array}{c} \bar{C}^T \quad R \\ \left[\begin{array}{cc} \Psi_{00} & \Psi_{01} \\ R^T & \Psi_{10} \quad \Psi_{11} \end{array} \right] \end{array}. \quad (11)$$

ここで、 Ψ の部分行列 $\Psi_{00} \sim \Psi_{11}$ は以下で表される。

$$\Psi_{11}(R_i^T, R_j) = m_{ji}M, \quad (12)$$

$$\Psi_{10}(R_i^T, \bar{C}_j^T) = m_{ji}\bar{M} + \bar{m}_{ij}M, \quad (13)$$

$$\Psi_{00}(\bar{C}_i, \bar{C}_j^T) = m_{ji}M, \quad (14)$$

$$\Psi_{01}(\bar{C}_i, R_j) = 0. \quad (15)$$

随伴含意行列の見方を Ψ_{11} を例に説明する。部分行列 Ψ_{11} の添字は (R^T, R) である。 R は M の行を接続した行ベクトル $R = (R_1, R_2, \dots, R_n)$ であるから Ψ_{11} は次数 $n^2 \times n^2$ の行列である。垂直添字集合として第 i 行、水平添字集合として第 p 行を選ぶと、(12) 式より、 $\Psi_{11}(R_i^T, R_p) = m_{pi}M$ は次数 $n \times n$ の Ψ_{11} の部分行列である。この部分行列は $m_{pi} = 0$ ならば 0 行列であり、 $m_{pi} = 1$ ならば M 、 $m_{pi} = x$ ならば xM である。さらに、これの要素をみると、例えば、 R_i^T の第 j 成分 m_{ij} と R_p の第 q 成分 m_{pq} に対応する Ψ_{11} の要素は $\Psi_{11}(m_{ij}, m_{pq}) = m_{pi}m_{jq}$ となる。この要素がとる値は 1, 0, x の 3 通りが可能である。すなわち、 $m_{pi} = 1$ のとき、

$$\begin{aligned} \Psi_{11}(m_{ij}, m_{pq}) &= 1, \quad m_{jq} = 1 \text{ のとき} \\ &= 0, \quad m_{jq} = 0 \text{ のとき} \\ &= x, \quad m_{jq} = x \text{ のとき} \end{aligned}$$

となり、 $m_{pi} = 0$ のとき、

$$\Psi_{11}(m_{ij}, m_{pq}) = 0,$$

となる。

仮に、 $m_{pi} = m_{jq} = 1$ とすれば、 $\Psi_{11}(m_{ij}, m_{pq}) = m_{pi}m_{jq} = 1$ となる。これは $m_{ij} = 1$ ならば $m_{pq} = 1$ とならなければならないことを示す。すなわち、 $m_{ij} \Rightarrow m_{pq}$ である。他方、 $m_{pi}m_{jq} = 0$ のとき、 $\Psi_{11}(m_{ij}, m_{pq}) = 0$ となり、 $m_{ij} \Rightarrow m_{pq}$ ではないことを示す。 $m_{pi} = 1$ 、 $m_{jq} = x$ の場合は、 $\Psi_{11}(m_{ij}, m_{pq}) = m_{pi}x_{jq}$ となるか

ら, x_{jq} のとる値に依存し, 現時点では確定しない.
 例えば, $x_{jq}=1$ が与えられれば, $m_{ij} \Rightarrow m_{pq}$ となり,
 $x_{jq}=0$ ならば, $m_{ij} \Rightarrow m_{pq}$ とはならない. 要約する
 と, $\Psi_{11}(m_{ij}, m_{pq})=1$ のとき, 対応する添字 (m_{ij} ,
 m_{pq}) において $1 \Rightarrow 1$ 合意 ($m_{ij} \Rightarrow m_{pq}$) が存在すること
 を表し, 0 のときは存在しないことを表している.

同様に, Ψ_{10} の部分行列 $\Psi_{10}(R_i^T, \bar{C}_q^T)$ において,
 垂直添字 $m_{ij} \in R_i^T$, 水平添字 $\bar{m}_{pq} \in \bar{C}_q^T$ に対応する
 成分は $\Psi_{10}(m_{ij}, \bar{m}_{pq}) = \bar{m}_{iq}m_{jp} + m_{qi}\bar{m}_{pj}$ であり, こ
 の値が1ならば $1 \Rightarrow 0$ 合意 ($m_{ij} \Rightarrow \bar{m}_{pq}$) が存在するこ
 とを表し, 0ならば存在しないことを表す. また,
 Ψ_{00} の部分行列 $\Psi_{00}(\bar{C}_j, \bar{C}_q^T)$ の添字 \bar{m}_{ij} , \bar{m}_{pq} に対
 する要素は $\Psi_{00}(\bar{m}_{ij}, \bar{m}_{pq}) = m_{ij}m_{pq}$ となり, この値が
 1であるとき, $0 \Rightarrow 0$ 合意 ($\bar{m}_{ij} \Rightarrow \bar{m}_{pq}$) の存在を表す.
 $0 \Rightarrow 1$ 合意は存在しないので $\Psi_{01}(\bar{C}, R) = 0$ である.

M の随伴合意行列は部分可到達行列 M の成分から
 生成される行列であるので, Ψ も部分的既知な二値
 行列であることを注意する.

随伴合意行列に対する次の定理は重要である.

定理 2: 部分可到達行列の随伴合意行列は部分可
 到達行列である.

(証明) 付録 1 を参照.

Ψ は部分可到達行列であることが判明したので,
 部分可到達行列モデル $\Psi(V, H)$ と表すことができ
 る.

この定理から, 次の系が成り立つことは明らかであ
 る.

系: 部分可到達行列の未知要素の1つに値を与え,
 合意アルゴリズムを実行し部分可到達行列を更新す
 る. 更新した部分可到達行列の随伴合意行列も部分可
 到達行列である.

定理 1 の結果を使うと, 合意行列を利用せずに
 直接部分可到達行列の合意を計算するアルゴリズム
 を構成することもできる⁴⁾.

我々の興味は未知変数の値が確定したとき, 他
 の未知変数の値を合意することにある. このこと
 から, 随伴合意行列全体が必要なのではなく, 添
 字ベクトルから未知変数のみを残し, 同時にこれ
 らの添字に対応する行列の成分のみを考慮した行
 列が重要となる.

定義 7: 添字変数ベクトルの成分から未知変数
 のみを残し, 同時にこれらの添字に対応する行列
 成分のみを残し随伴合意行列を縮小する. この縮
 小した行列を随伴合意行列の制限, あるいは制限

随伴合意行列と呼ぶ.

明らかに, 随伴合意行列の制限も部分可到達行列で
 ある.

3. 合意形成過程

これまで述べてきた部分可到達行列モデルを利用し
 て FISM における合意形成過程を構成することがで
 きる. 本章では説明の簡潔さのために2つのモデルの
 合意形成過程を示す. 3つ以上の場合も同様である.

合意形成過程とは以下の問題である. 「2つのグル
 ープがそれぞれ部分可到達行列モデル $M1(V, V^T)$,
 $M2(V, V^T)$ を作成したと仮定する. $M1=M2$ なら
 ば両グループの意見は完全に一致している. $M1 \neq M2$
 ならば両グループ間には意見の不一致がある. この
 とき, 2つのモデルの相違点を明確にし, 議論の結果,
 両グループの合意のもとで1つの部分可到達行列モ
 デル $M(V, V^T)$ を作ることを目的とする.」

FISM による合意形成過程は以下のステップに従っ
 て進める (図 1).

{合意形成過程}

1. M1 と M2 の比較行列 C をつくる;
2. while 不一致集合 $\neq \emptyset$ do begin
3. 合意関係を計算する;
4. 合意グラフを描く;
5. 合意グラフに M1, M2 の値を代入し, グル
 ープ 1, 2 の主張グラフを描く;
6. 最大合意数を持つ不一致要素をとりだす;
7. 議論し合意を得る;
8. end
9. 結果の C が求める合意された部分可到達行列モ
 デルである;

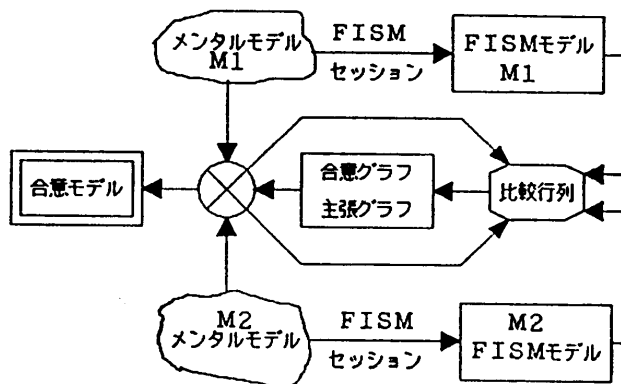


図 1 合意形成過程
 Fig. 1 Consensus process.

以下で、合意形成過程の各ステップについて説明する。

3.1 比較行列

定義 8: $M1$ と $M2$ の比較行列 C を以下で定義する。

$$c_{ij} = m1_{ij} (=m2_{ij}), \quad \text{if } m1_{ij} = m2_{ij} \quad (16)$$

$$= y \text{ (ブール変数)}, \quad \text{if } m1_{ij} \neq m2_{ij} \quad (17)$$

比較行列の各要素の値, $0, 1, x, y$ はそれぞれ以下の意味を持つ。

システム要素対 (i, j) に関して, グループ 1 と 2 の間に,

$c_{ij} = 1$ のとき, iRj で合意が得られている,

$= 0$ のとき, $i\bar{R}j$ で合意が得られている,

$= x$ のとき, $i\bar{R}j$ で合意が得られている,

$= y$ のとき, 2つのグループ間に認識の相違がある。

比較行列の重要な性質は以下の定理で与えられる。

定理 3: 比較行列は部分可到達行列である。

(証明) 付録 2 を参照。

3.2 合意関係

定理 3 から, 比較行列 C は部分可到達行列である。

したがって, その要素間に合意が存在する。すなわち, \bar{R} 一致要素 x_{ij} または不一致要素 y_{ij} に 1 または 0 の値を与えると, 合意によって 1 または 0 となるべき \bar{R} 一致要素または不一致要素が存在する。本論文では合意形成過程について述べるので, 以後の議論では, 不一致要素 y_{ij} について値を決めた場合の合意を考察する。

定義 9: 比較行列 C において,

$$X = \{(i, j) | c_{ij} = x\}; \text{ 未知要素集合}, \quad (18)$$

$$Y = \{(i, j) | c_{ij} = y\}; \text{ 不一致要素集合}, \quad (19)$$

$$Z = XU \cup Y; \text{ 変数集合}, \quad (20)$$

とする。

定義 10: 比較行列 C に対して以下の添字集合を定義する。

$$CW11(c_{ij}) = \{(p, q) | (p, q) \in Z, c_{pi}c_{jq} = 1\}, \quad (21)$$

$$CW10(c_{ij}) = \{(p, q) | (p, q) \in Z, \bar{c}_{iq}c_{jp} + c_{qi}\bar{c}_{pj} = 1\}, \quad (22)$$

$$CW00(c_{ij}) = \{(p, q) | (p, q) \in Z, c_{ip}c_{qj} = 1\}. \quad (23)$$

C において, Z を未知要素の添字対集合とみなすと, 部分可到達行列の合意理論から以下のことが分かる。「2つのグループが不一致要素対 (i, j) に対して,

$(i, j) \in R$ で合意するならば, $1 \Rightarrow 1$ 合意により, すべての $(p, q) \in CW11$ についても $(p, q) \in R$ で合意しなければならない。また, このとき同時に, すべての $(u, v) \in CW10$ についても $1 \Rightarrow 0$ 合意により $(u, v) \in \bar{R}$ で合意しなければならない。他方, $(i, j) \in \bar{R}$ で合意するならば, $0 \Rightarrow 0$ 合意により, すべての $(p, q) \in CW00$ についても $(p, q) \in \bar{R}$ で合意しなければならない。」

この合意関係を特に合意関係と呼ぶ。合意関係は C の未知要素と不一致要素の和集合である Z 上に定義される二項関係である。合意関係は合意アルゴリズム⁴⁾の応用として以下で与えられる。

{合意アルゴリズム}

$c_{ij} = y$ に合意した値 1 または 0 を与える;

if " $c_{ij} = 1$ " then

set $c_{ij} = 1$;

set $c_{ij} = 1$ for all $(p, q) \in CW11$;

set $c_{ij} = 0$ for all $(p, q) \in CW10$;

else " $c_{ij} = 0$ " then

set $c_{ij} = 0$;

set $c_{ij} = 0$ for all $(p, q) \in CW00$;

3.3 合意グラフ

3.2 節の結果を応用すると, 合意関係を有向グラフとして表現することができる。すなわち, 比較行列 C の随伴合意関係行列 Ψ において, Z と Z に対応する Ψ の要素からなる Ψ の制限 Ψ' を求める。次に Ψ' の縮約行列 Φ を求め, Φ の推移的リダクション Ω を求める。合意グラフとはこの推移的リダクション Ω に対応する有向グラフである。推移的リダクション Ω は,

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_{00} & 0 \\ \Omega_{10} & \Omega_{11} \end{bmatrix} \quad (24)$$

と表される。合意グラフの特徴をまとめる。 z_{ij} 等を Z の要素とする。

第 1 に, Ω にはその作り方から $\Omega(z_{ij}, z_{pq}) = \Omega(z_{pq}, z_{ij}) = 1$ なる強連結成分は存在しない。すなわち, 合意グラフにはサイクルは存在しない。

第 2 に, Ω_{10} は対称行列である。なぜなら, $\Omega(z_{ij}, z_{pq}) = 1$ は合意 $z_{ij} = 1 \Rightarrow z_{pq} = 0$ を表すので, この対偶である $z_{pq} = 1 \Rightarrow z_{ij} = 1$ も常に真であるから, $\Omega(z_{pq}, z_{ij}) = 1$ 。よって, 合意グラフの $1 \Rightarrow 0$ 合意は対称部分グラフである。

第 3 に, $1 \Rightarrow 1$ 合意 $z_{ij} \Rightarrow z_{pq}$ は, この対偶である

$z_{pq} \Rightarrow z_{ij}$ と同値である。したがって、 $1 \Rightarrow 1$ 合意を表す部分グラフにおいて有効辺の向きを逆向にすると $0 \Rightarrow 0$ 合意を表す部分グラフとなる。

第4に、合意グラフの頂点は、 z_{ij} や \bar{z}_{ij} などのようにある変数とその否定が対で現れる。したがって、肯定型の変数 (z_{ij} など) のみを頂点とするように合意グラフを再定義した方が、それを提示される人間にとって はわかりやすい。

以上の点を考慮して、合意グラフを簡略化した簡易合意グラフを用いる。簡易合意グラフの定義を以下に示す。

定義 11: 簡易合意グラフは、グラフ $(V_x, E_{11} \cup E_{10})$ である。ただし、頂点集合 V_x は、肯定型変数の集合、

$$V_x = \{z_{ij} | (i, j) \in X\} \cup \{\bar{z}_{ij} | (i, j) \in Y\} \quad (25)$$

E_{11} は有向辺の集合、

$$E_{11} = \{(z_{ij}, z_{pq}) | \Omega(z_{ij}, z_{pq}) = 1, z_{ij} \in V_x, z_{pq} \in V_x\} \quad (26)$$

E_{10} は無向辺の集合、

$$E_{10} = \{(z_{ij}, \bar{z}_{pq}) | \Omega(z_{ij}, \bar{z}_{pq}) = 1, z_{ij} \in V_x, \bar{z}_{pq} \in V_x\} \quad (27)$$

である。

簡易合意グラフの頂点集合は z_{ij} のような肯定型変数のみであり、辺集合は $1 \Rightarrow 1$ 合意を表す有向辺と $1 \Rightarrow 0$ 合意を表す無向辺である。 $0 \Rightarrow 0$ 合意は $1 \Rightarrow 1$ 合意グラフを逆向きにたどること で得られる。 Ω_{10} は対称行列であるから、 $(z_{ij}, z_{pq}) \in E_{10}$ ならば $(z_{pq}, z_{ij}) \in E_{10}$ が成り立ち、 E_{10} を無向辺の集合としたことは合理的である。以後、簡易合意グラフを単に合意グラフと呼ぶ。

3.4 合意数

不一致変数に値0または1が合意されたとき、合意関係から他の変数の値が決まる。この変数の数を合意数と呼ぶ。合意数は値1から合意される変数と値0から合意される変数の数を成分とするベクトルである。

定義 12: 不一致変数 y_{ij} の合意数 $AG(y_{ij})$ は

$$AG(y_{ij}) = (AG1(y_{ij}), AG0(y_{ij})), \quad (28)$$

ただし、

$$AG1(y_{ij}) = |CW11(y_{ij})| + |CW10(y_{ij})|, \\ y_{ij} = 1 \text{ のとき,}$$

$$AG0(y_{ij}) = |CW00(y_{ij})|, \quad y_{ij} = 0 \text{ のとき,}$$

で定義される。

不一致変数 y_{ij} に対して、値1で合意すれば、 $AG1(y_{ij})$ 個の変数について合意が成立する。一方、値0

で合意すれば $AG0(y_{ij})$ 個の変数について合意が成立する。可能な限り多くの合意が成立する不一致変数から順番に議論の対象とすべきである。しかしながら、値1で合意するか、値0で合意するかは議論の結果でなければわからない。そこで、例えば、

$$AG = \max_{y_{ij}} \min(AG1(y_{ij}), AG0(y_{ij})),$$

等の基準により議論の対象とすべき不一致変数を選択する。

3.5 主張グラフ

2つのグループの一致要素から得られる合意、すなわち合意関係、をグラフ表現したものが合意グラフであった。2つのグループはこの合意自体には合意しているが、このグラフ中の変数に割り当てる値(1または0)に関しては意見の一致をみていない。本節で定義する主張グラフは、合意グラフの各頂点に値1または0を割り当てることによりグループの主張の構造を論理的に明確にするものであり、各グループごとに1つずつ作られる。その定義を以下に示す。

定義 13: 合意グラフ $(V_x, E_{11} \cup E_{10})$ 上でのグループ k ($k=1, 2$) の主張グラフは、ラベル付き有向グラフ (V_x, E) である。ただし、 V_x は合意グラフと同じ頂点集合で、各頂点はグループ k の主張を反映して、1または0または x のラベルをもつ。すなわち、頂点 z_{ij} のラベルを $\delta(z_{ij})$ とすると、

$$\delta(z_{ij}) = mk_{ij} \quad (k=1, 2). \quad (29)$$

E は有向辺の集合で、以下のいずれかの場合に限り $(z_{ij}, z_{pq}) \in E$ である。

$$(z_{ij}, z_{pq}) \in E_{11} \text{ かつ } \delta(z_{ij}) = \delta(z_{pq}) = 1, \quad (30)$$

$$(z_{pq}, z_{ij}) \in E_{11} \text{ かつ } \delta(z_{ij}) = \delta(z_{pq}) = 0, \quad (31)$$

$$(z_{ij}, \bar{z}_{pq}) \in E_{10} \text{ かつ } \delta(z_{ij}) = 1, \delta(\bar{z}_{pq}) = 0. \quad (32)$$

3.6 基底

主張グラフを解析することにより、各グループの主張の依存関係がわかる。例えば、主張グラフの有向辺 $(z_{ij}, z_{pq}) \in E$ は、 z_{pq} の値が z_{ij} の値に依存して、合意により定まるものと解釈できることを表している。一方、入ってくる有向辺の数(入次数)が0の頂点 z_{ij} は他のどの変数の値にも依存せず、独立に値が定まると解釈できる。グラフ理論の用語を用いると、このような独立な頂点(変数)の集合は、主張グラフの基底(base)に等しい。

定義 14: グループ k の主張グラフの基底を、そのグループの基底という。

2つのグループの不一致要素のうち、本質的な不一致要素は各グループの基底に含まれる要素である。

4. 例題

簡単のため、未知要素を含まない2つのモデルを考える。図2にその可到達行列、図3に推移的な枝を除去したリダクショングラフを示す。比較行列Cは図4となる。Cの随伴含意関係行列の部分行列 Ψ' は図5となる(空白は0を表す)。この推移的リダクションを求め、グラフ化すると図6の合意グラフを得る。実線は E_{11} に属する有向辺、破線は E_{10} に属する無向辺である。推移的な辺は除去されている。例えば、含意 $y_{76} \Rightarrow \bar{y}_{43}$ を表す無向辺は $y_{76} \Rightarrow y_{74} \Rightarrow \bar{y}_{43}$ により推移的に得られるので除去されている。

合意グラフからいろいろな情報を読み取れる。例え

ば、グラフの連結性から、現在のところ2グループの不一致要素は、互いに直接には関係のない2つのカテゴリ

$$V_{s1} = \{y_{12}, y_{32}, y_{52}, y_{54}, y_{56}, y_{57}\}$$

および

$$V_{s2} = \{y_{21}, y_{41}, y_{43}, y_{61}, y_{63}, y_{74}, y_{76}\}$$

	1	2	3	4	5	6	7
1	1	y_{12}	0	0	0	0	0
2	y_{21}	1	0	0	0	0	0
3	1	y_{32}	1	0	0	0	0
4	y_{41}	1	y_{43}	1	0	0	0
5	1	y_{52}	1	y_{54}	1	y_{56}	y_{57}
6	y_{61}	1	y_{63}	1	0	1	0
7	1	1	0	y_{74}	0	y_{76}	1

図4 比較行列
Fig. 4 Comparison matrix.

$$M_1 =$$

	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0
3	1	0	1	0	0	0	0
4	1	1	1	1	0	0	0
5	1	0	1	0	1	0	0
6	1	1	1	1	0	1	0
7	1	1	0	0	0	0	1

$$M_2 =$$

	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0
3	1	1	1	0	0	0	0
4	0	1	0	1	0	0	0
5	1	1	1	1	1	1	1
6	0	1	0	1	0	1	0
7	1	1	0	1	0	1	1

図2 可到達行列
Fig. 2 Reachability matrices.

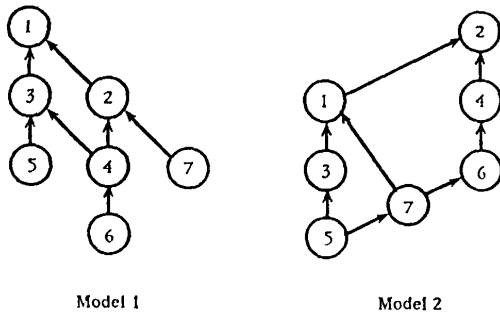


図3 リダクショングラフ
Fig. 3 Reduction matrices.

$$\Psi'_{VV} =$$

	y_{12}	y_{21}	y_{32}	y_{41}	y_{43}	y_{52}	y_{54}	y_{56}	y_{57}	y_{61}	y_{63}	y_{74}	y_{76}
y_{12}	1												
y_{21}		1											
y_{32}			1										
y_{41}				1									
y_{43}					1								
y_{52}						1							
y_{54}							1						
y_{56}								1					
y_{57}									1				
y_{61}										1			
y_{63}											1		
y_{74}												1	
y_{76}													1

$$\Psi'_{V\bar{V}} =$$

	\bar{y}_{12}	\bar{y}_{21}	\bar{y}_{32}	\bar{y}_{41}	\bar{y}_{43}	\bar{y}_{52}	\bar{y}_{54}	\bar{y}_{56}	\bar{y}_{57}	\bar{y}_{61}	\bar{y}_{63}	\bar{y}_{74}	\bar{y}_{76}
y_{12}													
y_{21}													
y_{32}													
y_{41}													
y_{43}													
y_{52}													
y_{54}													
y_{56}													
y_{57}													
y_{61}													
y_{63}													
y_{74}													
y_{76}													

図5 随伴含意行列の部分行列
Fig. 5 Submatrix of the associated implication matrix.

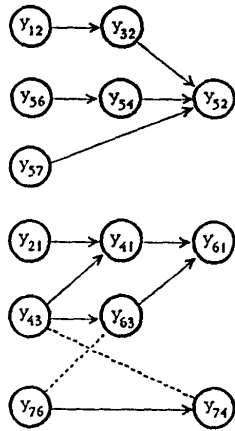


図 6 合意グラフ
Fig. 6 Consensus graph.

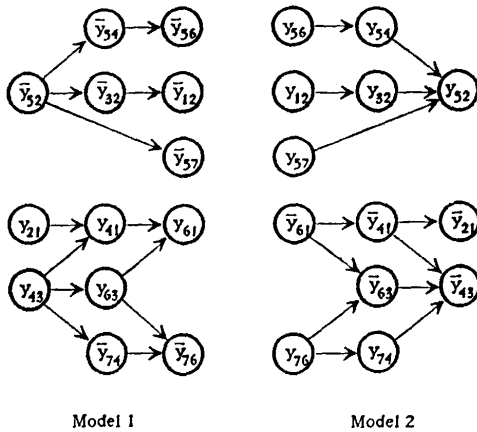


図 7 主張グラフ
Fig. 7 Opinion graph.

に分けられることがわかる。 V_{e1} については、例えば $y_{62}=0$ と合意されると他の 5 個の不一致要素はすべて 0 と決まることなどがわかる。

各グループの主張グラフを図 7 に示す。頂点 y_{ij} はラベル $\delta(y_{ij})=1$ 、頂点 \bar{y}_{ij} はラベル $\delta(y_{ij})=0$ であることを表している。グループ 1 の基底は $\{y_{52}, y_{21}, y_{43}\}$ 、グループ 2 の基底は $\{y_{56}, y_{12}, y_{57}, y_{61}, y_{76}\}$ であり、最大不一致数は 8 である。不一致要素 $y_{54}, y_{32}, y_{41}, y_{63}, y_{74}$ はいずれのグループの基底にもなっていない。

5. あとがき

FISM による構造モデリングにおいて、合意形成をおこなう方法を提案した。主要点をまとめると以下のようである。

- (1) 与えられた部分可到達行列の随伴合意行列が

部分可到達行列であること、および、比較行列が部分可到達行列であることを証明した。

(2) 比較行列の随伴合意行列は合意関係を表すことを示し、合意関係、合意グラフ、主張グラフ、簡易主張グラフを定義し、これらを利用した合意形成法を提案した。

知識の構造は多種の二項関係で表現することができるので、以上の結果は動的に変化する知識構造を解析する研究へ応用することが期待できる。

謝辞 有益な議論をしていただいた(株)東芝、河野毅氏に感謝します。

本研究は文部省科学研究費補助金一般研究(B) 01460253 により一部援助を頂いた。

参 考 文 献

- 1) 大内 東, 河野 毅: システム計画構築技法の新展開, 電気学会雑誌, Vol. 108, No. 1, pp. 21-28 (1988).
- 2) 樺木義一, 河村和彦: 参加型システムズアプローチ, 日刊工業新聞社 (1981).
- 3) Warfield, J. N.: *Societal Systems: Planning, Policy and Complexity*, John Wiley & Sons (1976).
- 4) Ohuchi, A., Kurihara, M. and Kaji, I.: Implication Theory and Algorithm for Reachability Matrix Model, *IEEE Trans. SMC*, Vol. SMC-16, No. 8, pp. 610-616 (1986).
- 5) Ohuchi, A. and Kaji, I.: Correction Procedures for Flexible Interpretive Structural Modeling, *IEEE Trans. SMC*, Vol. SMC-19, No. 1, pp. 85-94 (1989).
- 6) 大内 東, 加瀬誠志: FISM: フレキシブル ISM, 計測自動制御学会システムシンポジウム論文集, pp. 159-163 (Oct. 1989).
- 7) 大内 東, 栗原正仁, 加地郁夫: 知識構造モデリング法の構成と具象化ルール, 人工知能学会誌, Vol. 3, No. 5, pp. 599-606 (1988).
- 8) Aho, A. V., Garey, M. R. and Ullman, J. D.: The Transitive Reduction of a Directed Graph, *SIAM J. Comput.*, Vol. 1, No. 2, pp. 131-137 (1972).

付 録 1

定理 2: 部分可到達行列の随伴合意行列は部分可到達行列である。

(証明)

部分可到達行列を M , その随伴合意行列を Ψ とする。 Ψ が部分的既知な反射的二値行列であることは明らかであるので、無矛盾かつ極大であることを示

す。記号を簡略化して、 $\Psi(m_{ij}, m_{pq})$ を $\Psi(ij, pq)$ のように書く。

(無矛盾性の証明)

Ψ において、 $\Psi(ij, kl) = \Psi(kl, pq) = 1$ ならば、 $\Psi(ij, pq) = 1$ を示す。

(a) $ij \in R, kl \in R, pq \in R$;

$\Psi_{11}(ij, kl) = \Psi_{11}(kl, pq) = 1$ のとき、 $\Psi_{11}(ij, pq) = 1$ 。

$\Psi_{11}(ij, kl) = m_{ki}m_{ji} = 1$, $\Psi_{11}(kl, pq) = m_{pk}m_{lq} = 1$ より、 M の無矛盾性、極大性によって、 $m_{pi} = m_{jq} = 1$ によって、

$$\Psi_{11}(ij, pq) = m_{pi}m_{jq} = 1.$$

同様に $\Psi_{01} = 0$ であることを考慮して、(b)~(h) の場合も証明できる。

(b) $ij \in R, kl \in R, pq \in \bar{C}$;

$\Psi_{11}(ij, kl) = 1$, $\Psi_{10}(kl, pq) = 1$ のとき、 $\Psi_{10}(ij, pq) = 1$ 。

(c) $ij \in R, kl \in \bar{C}, pq \in R$;

$\Psi_{10}(ij, kl) = 1$, $\Psi_{01}(kl, pq) = 1$ のとき、 $\Psi_{11}(ij, pq) = 1$ 。

(d) $ij \in \bar{C}, kl \in R, pq \in R$;

$\Psi_{01}(ij, kl) = 1$, $\Psi_{11}(kl, pq) = 1$ のとき、 $\Psi_{01}(ij, pq) = 1$ 。

(e) $ij \in R, kl \in \bar{C}, pq \in \bar{C}$;

$\Psi_{10}(ij, kl) = 1$, $\Psi_{00}(kl, pq) = 1$ のとき、 $\Psi_{10}(ij, pq) = 1$ 。

(f) $ij \in \bar{C}, kl \in R, pq \in \bar{C}$;

$\Psi_{01}(ij, kl) = 1$, $\Psi_{10}(kl, pq) = 1$ のとき、 $\Psi_{00}(ij, pq) = 1$ 。

(g) $ij \in \bar{C}, kl \in \bar{C}, pq \in R$;

$\Psi_{00}(ij, kl) = \Psi_{01}(kl, pq) = 1$ のとき、 $\Psi_{00}(ij, pq) = 1$ 。

(h) $ij \in \bar{C}, kl \in \bar{C}, pq \in \bar{C}$;

$\Psi_{00}(ij, kl) = \Psi_{00}(kl, pq) = 1$ のとき、 $\Psi_{00}(ij, pq) = 1$ 。

ゆえに、 Ψ は無矛盾である。

(極大性の証明)

(1) $\Psi(ij, pq) = x$ かつ $\Psi(ij, kl) = \Psi(kl, pq) = 1$ なる添字の三つ組 (ij, kl, pq) は存在しないことは、無矛盾性の証明と同様にして、 $\Psi(ij, kl) = \Psi(kl, pq) = 1$ ならば、常に $\Psi(ij, pq) = 1$ から言える。

(2) $\Psi(ij, pq) = x$ かつ $\Psi(kl, pq) = 0$, $\Psi(kl, ij) = 1$ なる添字の三つ組 (ij, kl, pq) は存在しないことを示す。

(a) $kl \in R, ij \in R, pq \in R$ の場合

$\Psi_{11}(kl, ij) = 1$, $\Psi_{11}(kl, pq) = 0$, $\Psi_{11}(ij, pq) = x$, と仮定する。このとき、 $m_{ki}m_{ji} = 1$, $m_{pk}m_{lq} = 0$ である。

もし、 $(m_{pk} = 0, m_{lq} = 1)$ ならば、 $(m_{ik} = 1, m_{pl} = 0)$ より、 $m_{pi} = 0$ となり、 $m_{pi}m_{jq} = 0$ ($1 \Rightarrow 1$ 含意が不成立)、また、 $(m_{pk} = 1, m_{lq} = 0)$ ならば、 $(m_{ij} = 1, m_{lq} = 0)$ より、 $m_{jq} = 0$ となり、 $m_{pi}m_{jq} = 0$ ($1 \Rightarrow 1$ 含意が不成立)、さらに $(m_{pk} = m_{lq} = 0)$ ならば、 $(m_{ik} = 1, m_{pl} = 0)$ より、 $m_{pi} = 0$ かつ $(m_{ij} = 1, m_{lq} = 0)$ より、 $m_{jq} = 0$ となり、 $m_{pi}m_{jq} = 0$ ($1 \Rightarrow 1$ 含意が不成立) となる。いずれも仮定に矛盾する。よって、このような三つ組は存在しない。

無矛盾性の証明と同様にして、 $\Psi_{01} = 0$ であることを考慮し、 kl, ij, pq が R または \bar{C} のすべての場合について証明できる。

(3) (2) の証明と同様にして、 $\Psi(ij, pq) = x$ かつ $\Psi(ij, kl) = 0$, $\Psi(pq, kl) = 1$ なる添字の三つ組 (ij, kl, pq) は存在しないことを示すことができる。

ゆえに、 Ψ は極大性の条件を満たす。

Q. E. D.

付 録 2

定理 3: 比較行列は部分可到達行列である。

(証明)

$M1$ と $M2$ を部分可到達行列とし、これらの行列の比較行列を C とする。

$M1$ と $M2$ は部分的既知な反射的二値行列であるから、 C も部分的既知な反射的二値行列である。

C が無矛盾、かつ極大であることを示す。

(無矛盾性の証明)

$c_{ij}c_{jk} = 1$ とする。 $c_{ij}c_{jk} = 1$ より、 $m_{1ij} = m_{1jk} = m_{2ij} = m_{2jk} = 1$ 。したがって、 $m_{1ik} = m_{2ik} = 1$ 。ゆえに、 $c_{ij}c_{jk} = 1$ のとき常に $c_{ik} = 1$ 。

(極大性の証明)

$m_{1ki} = m_{2ki} = 1$ かつ $m_{1kj} = m_{2kj} = 0$ ならば $m_{1ij} = m_{2ij} = 0$ 。ゆえに、 $c_{ki} = 1$ かつ $c_{kj} = 0$ ならば $c_{ij} = 0$ 。

同様に、 $c_{jk} = 1$ かつ $c_{ik} = 0$ ならば $c_{ij} = 0$ 。 $c_{ij} = c_{jk} = 1$ ならば $c_{ik} = 1$ 。

Q. E. D.

(平成 2 年 6 月 6 日受付)

(平成 2 年 11 月 13 日採録)

**大内 東 (正会員)**

昭和 20 年生。昭和 49 年北海道大学工学部大学院工学研究科博士課程修了。工学博士。北海道大学工学部情報工学科教授。システム情報工学，応用人工知能システム，医療システムの研究に従事。人工知能学会，電気学会，電子情報通信学会，計測自動制御学会，日本 OR 学会，医療情報学会，病院管理学会，IEEE-SMC 各会員。

**栗原 正仁 (正会員)**

昭和 30 年生。昭和 53 年北海道大学工学部電気工学科卒業。昭和 55 年同大学院情報工学専攻修士課程修了。同年，北海道大学工学部電気工学科助手。平成 1 年情報工学科講師。平成 2 年同助教授。工学博士。システム工学，自動推論，項書き換えシステムなどの研究に従事。電子情報通信学会，電気学会，日本ソフトウェア科学会，日本 OR 学会，IEEE 各会員。