A-033

S式書き換えシステムの停止性を保証するカリー化について
Currying for Termination of S-Expression Rewriting Systems

磯部 耕己 † 青戸 等人 † 外山 芳人 †
Kouki Isobe Takahito Aoto Yoshihito Toyama

1. はじめに

停止性は書き換えシステムの重要な性質であり，さまざまな判定法が提案されている．しかし，map や fold などの高階関数を扱う高階書き換えシステムでは，従来の方法だけでは停止性判定は困難であり，より強力な方法が求められている．

S 式書き換えシステム (SRS)[1, 2] は，外山によって提案された高階書き換えシステムであり，その停止性判定にはS式上の辞書式経路関係 [2] の適用が有効である．また，辞書式経路関係を適用できない SRS $\mathcal{R}$ に対しては，適当なカリー化を行なって書き換え規則を組織的に変形すると，辞書式経路関係が適用可能となる場合があることも知られている [1].

本論文では，与えられたSRS $\mathcal{R}$ に対して，辞書式経路関係が適用可能となるようなカリー化を，書き換え規則に出現する高階変数の位置に基づいて自動的に行なう手法を提案する．さらに，本手法に基づいてカリー変換手続きを実装し，実験を通してその有効性を明らかにする．

2. S式書き換えシステム

本章では，S 式書き換えシステム (SRS)[1, 2] と，S 式上の辞書式経路関係 [2] について説明する．定数集合を $\mathcal{C}$，変数集合を $\mathcal{V}$ で表す．S 式集合 $\mathcal{S}(\mathcal{C},\mathcal{V})$ は次のように帰納的に定義される．(i) $t \in \mathcal{C} \cup \mathcal{V}$ ならば，$t \in \mathcal{S}(\mathcal{C},\mathcal{V})$，また，(ii) $t_i \in \mathcal{S}(\mathcal{C},\mathcal{V})$ $(i=1,\cdots,n)$ ならば，$(t_1 \cdots t_n) \in \mathcal{S}(\mathcal{C},\mathcal{V})$．S 式 $t=(t_1\cdots t_n)$ の部分項とは，t 自身と $t_1,\cdots,t_n$ のすべての部分項のことであり，u が t の部分項ならば，$t \trianglerighteq u$ と記す．また，t の直接部分項とは $t_1,\cdots,t_n$ のことである．

書き換え規則とは，$l,r \in \mathcal{S}(\mathcal{C},\mathcal{V})$ について $l \to r$ で表されるようなS式の変換規則のことである．ただし，(i) $l \notin \mathcal{V}$，かつ，(ii) r に含まれる変数は l にも含まれるものとする．SRS $\mathcal{R}$ はS式の書き換え規則の有限集合である．このとき，$\mathcal{R}$ による書き換えの関係を $\to_{\mathcal{R}}$ と記す．自然数 $0,1,2,\ldots$ を $0,(\mathsf{s}\ 0),(\mathsf{s}\ (\mathsf{s}\ 0)),\ldots$ と表現すると，自然数上での加算は次のようになる．

$$\mathcal{R} = \left\{ \begin{array}{lcl} (\mathsf{plus}\ (\mathsf{s}\ x)\ y) & \to & (\mathsf{s}\ (\mathsf{plus}\ x\ y)) \\ (\mathsf{plus}\ 0\ y) & \to & y \end{array} \right.$$

このとき，$\mathcal{C} = \{\mathsf{plus},\mathsf{s},0\}$，$\mathcal{V} = \{x,y\}$ となる．例えば，$1+1=2$ の計算は，$\mathcal{R}$ による書き換えでは $(\mathsf{plus}\ (\mathsf{s}\ 0)\ (\mathsf{s}\ 0)) \to_{\mathcal{R}} (\mathsf{s}\ (\mathsf{plus}\ 0\ (\mathsf{s}\ 0))) \to_{\mathcal{R}} (\mathsf{s}\ (\mathsf{s}\ 0))$ なる書き換えで実現できる．このとき，項 $(\mathsf{s}\ (\mathsf{s}\ 0))$ のようなこれ以上書き換えできない項を正規形という．また，無限列 $t_0 \to_{\mathcal{R}} t_1 \to_{\mathcal{R}} t_2 \to_{\mathcal{R}} \cdots$ が存在しないならば，$\mathcal{R}$ は停止性をもつという．

SRSの停止性判定法としては，外山によってS式のための辞書式経路関係 $\succ_{lp}$ [2] が提案されている．

†東北大学 電気通信研究所

定義 1 ([2]) $>$ を定数集合上の整礎な関係とする．S式上の辞書式経路関係 $\succ_{lp}$ を次のように定義する．

$$\begin{array}{l} s \succ_{lp} t \overset{def}{\Longleftrightarrow} \\ \quad (L0)\ s,t \in \mathcal{C}\ \&\ s > t, \\ \quad (L1)\ s=(s_1\cdots s_m)\ (m \geq 1)\ \&\ \exists s_i.s_i \succeq_{lp} t, \\ \quad (L2)\ t=(t_1\cdots t_n)\ (n \geq 0)\ \&\ \forall t_i.s \succ_{lp} t_i\ \& \\ \qquad (L2\text{-}1)\ s \in \mathcal{C}\ or \\ \qquad (L2\text{-}2)\ s=(s_1\cdots s_m)\ (m\geq 1)\ \& \\ \qquad\qquad \langle s_1,\cdots,s_m\rangle \succ_{lp}^{lex} \langle t_1,\cdots,t_n\rangle. \end{array}$$

ここで，S式の対 $\langle s,t\rangle$(あるいは $s \to t$) が $\succ_{lp}$ 関係をみたすとは，$s \succ_{lp} t$ となることである．また，SRS $\mathcal{R}$ のすべての書き換え規則 $l \to_{\mathcal{R}} r$ が $\succ_{lp}$ 関係をみたすとき，$\mathcal{R}$ は $\succ_{lp}$ と両立するという．このとき，次の定理が成り立つ．

定理 1 ([2]) *SRS* $\mathcal{R}$ が $\succ_{lp}$ と両立するとき，$\mathcal{R}$ は停止性をもつ．

3. S式書き換えシステムのカリー化

次の SRS $\mathcal{R}_1$ は $\succ_{lp}$ と両立しない．ただし，$\mathsf{map} > \mathsf{cons} > \mathsf{nil}$ とし，α,x,y は変数とする．

$$\mathcal{R}_1 = \left\{ \begin{array}{lcl} (\mathsf{map}\ \alpha\ \mathsf{nil}) & \to & \mathsf{nil} \\ (\mathsf{map}\ \alpha\ (\mathsf{cons}\ x\ y)) & \to & (\mathsf{cons}\ (\alpha\ x)\ (\mathsf{map}\ \alpha\ y)) \end{array} \right.$$

しかし，$\mathcal{R}_1$ を以下のように変形すると，$\succ_{lp}$ と両立する SRS $\mathcal{R}_2$ が得られる．

$$\mathcal{R}_2 = \left\{ \begin{array}{lcl} ((\mathsf{map}\ \alpha)\ \mathsf{nil}) & \to & \mathsf{nil} \\ ((\mathsf{map}\ \alpha)\ (\mathsf{cons}\ x\ y)) & \to & (\mathsf{cons}\ (\alpha\ x)\ ((\mathsf{map}\ \alpha)\ y)) \end{array} \right.$$

以下では，このような変形によって SRS を $\succ_{lp}$ と両立させるカリー化手法を提案する．

3.1 S式のカリー化

ある定数記号 f を先頭に持つS式 $(\mathsf{f}\ t_1\cdots t_p\ t_{p+1}\cdots t_n)$ を $((\mathsf{f}\ t_1\cdots t_p)\ t_{p+1}\cdots t_n)$ と変形するとき，f をカリー化位置 p でカリー化するという．このとき，f と p からなる記号をカリー化定数とよび，f^p で表す．また，f^p の集合をカリー化定数集合 $\mathcal{G}$ とよぶ．この $\mathcal{G}$ を用いて，SRS $\mathcal{R}$ をカリー化したものを $\Gamma_{\mathcal{G}}(\mathcal{R})$ と記す．

上記の $\mathcal{R}_1$ について，カリー化位置集合 $\mathcal{G} = \{\mathsf{map}^1\}$ で変形すると，$\Gamma_{\mathcal{G}}(\mathcal{R}_1) = \mathcal{R}_2$ となる．

3.2 高階変数に基づくカリー化定数決定法

対 $\langle s,t\rangle$ が $\succ_{lp}$ 関係をみたさないとき，t に出現する高階変数に注目して，$\langle s,t\rangle$ が $\succ_{lp}$ 関係をみたすようなカリー化定数を自動的に発見する方法を考える．高階変数とは，S式の左括弧"("の次に現れる変数である．例えば，$(\alpha\ (\mathsf{cons}\ x\ y)\ (\beta\ z))$ の高階変数は，α,β である．

$\langle s,t\rangle$ において，$s=(\mathsf{f}\ s_1\cdots s_n)$ とする．このとき，$t=(\mathsf{g}\ t_1\cdots t_m)$ または，$t=(\alpha\ t_1\cdots t_m)$ ならば，f のカリー化位置を高階変数によって決定できる．ただし，$\mathsf{f},\mathsf{g} \in \mathcal{C}$，$\alpha \in \mathcal{V}$，かつ，$\mathsf{f} > \mathsf{g}$ とする．ここで，あ

る変数 x について $s_i \trianglerighteq x$ となる s_i のうち，i の最小値を i_0 とすると，s_{i_0} を x が現れる最左な直接部分項とよぶ．まず，t のすべての高階変数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ について，それぞれの変数が現れる最左な直接部分項 $s_{i_{01}}, \cdots, s_{i_{0k}}$ を求め、これらの位置 $i_{01}, \cdots, i_{0k}$ の最大値 i_M(ただし，$1 \leq i_M \leq n-1$) から，カリー化定数を f^{i_M} と定める．

例として，$\langle(\mathsf{f}\ \alpha\ (\mathsf{g}\ \beta\ x)\ (\mathsf{h}\ y\ z)), (\mathsf{g}\ (\alpha\ x)\ (\beta\ y\ z))\rangle$ という $\succ_{lp}$ 関係をみたさない対のカリー化定数を決定する．まず，右辺の高階変数は α, β である．次に，左辺で α が現れる最左な直接部分項 α の位置は 1 である．同様に，β が現れる最左な直接部分項 $(\mathsf{g}\ \beta\ x)$ の位置は 2 である．これらの位置の最大値 2 から，カリー化定数は f^2 と決定する．この結果より，$\succ_{lp}$ 関係をみたす対 $\langle(((\mathsf{f}\ \alpha\ (\mathsf{g}\ \beta\ x))\ (\mathsf{h}\ y\ z)), (\mathsf{g}\ (\alpha\ x)\ (\beta\ y\ z))\rangle$ が得られる．

3.3 その他のカリー化定数決定法

前節では，$\langle(\mathsf{f}\ s_1 \cdots s_n), (\mathsf{g}\ t_1 \cdots t_m)\rangle$ の場合のカリー化定数決定法を示したが，それ以外にもカリー化定数を決定できる場合がある．

- $\langle(\mathsf{f}\ s_1 \cdots s_n), (\mathsf{f}\ t_1 \cdots t_n)\rangle$ のとき．

  $s_1 = t_1, s_2 = t_2, \cdots, s_{i-1} = t_{i-1}$ かつ，$\langle s_i, t_i\rangle$ が $\succ_{lp}$ 関係をみたさないとき，$\langle s_i, t_i\rangle$ のカリー化定数を $\langle(\mathsf{f}\ s_1 \cdots s_n), (\mathsf{f}\ t_1 \cdots t_n)\rangle$ のカリー化定数とする．

- $\langle(\mathsf{f}\ s_1 \cdots s_n), ((\mathsf{g}\ t'_1 \cdots t'_l)\ t_1 \cdots t_m)\rangle$ のとき．

  $(\mathsf{g}\ t'_1 \cdots t'_l)$ に現れるすべての変数 $x_1, \cdots, x_k$ について，それぞれの変数が現れる最左な直接部分項 $s_{i_{01}}, \cdots, s_{i_{0k}}$ を求め、$i_{01}, \cdots, i_{0k}$ の最大値 $i_M (1 \leq i_M \leq n-1)$ から，カリー化定数を f^{i_M} と定める．

4. カリー変換手続き

与えられた SRS $\mathcal{R}$ から $\succ_{lp}$ と両立する $\mathcal{R}'$ を求めるカリー変換手続きを以下に示す．ただし，$\varphi(\mathcal{G}) = \{\mathsf{f}^{max(p_1,\cdots,p_n)} | \mathsf{f}^{p_1}, \cdots, \mathsf{f}^{p_n} \in \mathcal{G}\}$ とする．

1. $\mathcal{R}' := \mathcal{R}$，$\mathcal{G} := \emptyset$ とする．
2. $\mathcal{R}'$ が $\succ_{lp}$ と両立するなら停止して「成功」．
3. $\mathcal{R}'$ 上の $\succ_{lp}$ 関係をみたさないすべての書き換え規則についてカリー化定数を求め，そのカリー化定数集合を $\mathcal{G}'$ とする．このとき，カリー化定数を決定できない書き換え規則が存在すれば停止して「失敗」．
4. $\mathcal{G} := \varphi(\mathcal{G}' \cup \mathcal{G})$ とする．
5. $\mathcal{R}' := \Gamma_{\mathcal{G}}(\mathcal{R})$ とする．
6. 2 へ戻る．

カリー化できる位置 (括弧をつけられる位置) は有限なので，カリー変換手続きは必ず終了する．

以下の SRS $\mathcal{R}_4$ は $\succ_{lp}$ と両立しない．

$$\mathcal{R}_4 = \begin{cases} (\mathsf{sort}\ \alpha\ \beta\ \mathsf{nil}) \to \mathsf{nil} & (1) \\ (\mathsf{sort}\ \alpha\ \beta\ (\mathsf{cons}\ x\ y)) \to (\mathsf{ins}\ \alpha\ \beta\ (\mathsf{sort}\ \alpha\ \beta\ y)\ x) & (2) \\ (\mathsf{ins}\ \alpha\ \beta\ \mathsf{nil}\ y) \to (\mathsf{cons}\ y\ \mathsf{nil}) & (3) \\ (\mathsf{ins}\ \alpha\ \beta\ (\mathsf{cons}\ x\ z)\ y) & \\ \qquad \to (\mathsf{cons}\ (\alpha\ x\ y)\ (\mathsf{ins}\ \alpha\ \beta\ z\ (\beta\ x\ y))) & (4) \end{cases}$$

このとき，カリー変換手続きに基づいてカリー化定数集合 $\mathcal{G}$ を求める．まず，書き換え規則 (4) で $\succ_{lp}$ 関係がみたされないので，カリー化定数 ins^2 が作成され，$\mathcal{G} = \{\mathsf{ins}^2\}$ となる．しかし，$\Gamma_{\mathcal{G}}(\mathcal{R}_3) = \mathcal{R}'_3$ は $\succ_{lp}$ と両立しない．そこで，$\mathcal{R}'_3$ についてカリー化定数集合 $\mathcal{G}'$ を求めると，$\mathcal{G}' = \{\mathsf{sort}^2\}$ となる．さらに，$\varphi(\mathcal{G}' \cup \mathcal{G})$ を求めると，$\mathcal{G} = \{\mathsf{ins}^2, \mathsf{sort}^2\}$ となる．$\mathcal{G}$ で $\mathcal{R}_3$ をカリー化すると以下のようになり，$\succ_{lp}$ と両立する．

$$\Gamma_{\mathcal{G}}(\mathcal{R}_3) = \begin{cases} ((\mathsf{sort}\ \alpha\ \beta)\ \mathsf{nil}) \to \mathsf{nil} \\ ((\mathsf{sort}\ \alpha\ \beta)\ (\mathsf{cons}\ x\ y)) \\ \qquad \to ((\mathsf{ins}\ \alpha\ \beta)\ ((\mathsf{sort}\ \alpha\ \beta)\ y)\ x) \\ ((\mathsf{ins}\ \alpha\ \beta)\ \mathsf{nil}\ y) \to (\mathsf{cons}\ y\ \mathsf{nil}) \\ ((\mathsf{ins}\ \alpha\ \beta)\ (\mathsf{cons}\ x\ z)\ y) \\ \qquad \to (\mathsf{cons}\ (\alpha\ x\ y)\ ((\mathsf{ins}\ \alpha\ \beta)\ z\ (\beta\ x\ y))) \end{cases}$$

5. 実装と実験

前章で説明したカリー変換手続きを SCM version 5d3 を用い実装した．実験データには Termination Problem Data Base version 4.0 * の TRS/higher-order/内の問題を SRS に修正して用いた．

	succ	fail	comp	total
AProVE_HO	5	1	3	9
AotoYam	17	8	3	28
Bird	2	4	1	7
Kusakari	0	2	0	2
Lifantsev	6	3	2	11
ToyamaRTA04	3	0	0	3
total	33	18	9	60

ここで，succ はカリー変換手続き成功，fail はカリー変換手続き失敗，comp は初めから $\succ_{lp}$ と両立しているものを示す．

6. おわりに

本論文では、SRS の自動的なカリー化手法を提案し，これを基にカリー変換手続きを実現した．本手続きの特徴は，高階変数の出現位置に着目し，カリー化位置を決定する点である．この手続きを実装して実験した結果，$\succ_{lp}$ と両立しない SRS うち 6 割以上について，成功となり $\succ_{lp}$ と両立する SRS に変形できた．今後の課題は，実験で失敗した例についても取り扱えるように，手続きを改良することである．また，再帰経路関係 [2] などのより一般的な停止性判定法にも適用可能なカリー変換手続きの検討も重要な課題である．

参考文献

[1] Y.Toyama, Termination of S-expression rewriting systems: Lexicographic path ordering for higher-order terms, In *Proc. 15th RTA*, LNCS 3091, pp.40-54, 2004.

[2] Y.Toyama, Termination proof of S-expression rewriting systems with recursive path relations, In *Proc. 19th RTA*, LNCS 5117, pp.381-391, 2008.

*http://colo5-c703.uibk.ac.at:8080/termcomp/