A-019

2 次の効用関数に関する不可分財の最適配分問題—計算複雑度とアルゴリズム—
Optimal Allocation of Indivisible Goods with Second-Order Utility Functions —Complexity and Algorithms—

塩浦 昭義* Akiyoshi Shioura　鈴木 瞬也* Shunya Suzuki　吉田 卓司* Takuji Yoshida

1. はじめに

本研究では, 不可分財に対する組合せオークションから生じる財の配分問題について考える. 組合せオークションでは, 複数の (不可分) 財を複数の参加者に配分する. 各参加者には, 財の部分集合に対する満足度を表す効用関数が与えられているとする. このとき, オークション主催者としての自然な目的は, オークションの社会的余剰 (社会的厚生), すなわち, オークション参加者全員の効用関数値の和を最大化することである.

この配分問題を数学的に記述する. このオークションでは n 個の異なる不可分財を m 人の参加者に配分するものとする. 不可分財の集合を $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ とおき, 各参加者 $i = 1, 2, \ldots, m$ の効用関数を単調非減少な集合関数 $f_i : 2^N \to \mathbb{R}$ により表す. このとき, 配分問題の目的は, $\sum_{i=1}^{m} f_i(N_i)$ を最大化するような財 N の分割 $\{N_1, N_2, \ldots, N_m\}$ を求めることである. この問題のことを, 本研究では不可分財の配分問題, または単に配分問題と呼ぶ.

本研究の目的は, 効用関数が 2 次の集合関数により与えられる場合について, その計算複雑度を示すことである. $f(\emptyset) = 0$ を満たす集合関数 $f : 2^N \to \mathbb{R}$ が 2 次であるとは, 実数 $a_{jh} \in \mathbb{R}$ $(j, h \in N, j \leq h)$ が存在して,

$$f(X) = \sum_{j,h \in X,\ j \leq h} a_{jh} \qquad (X \in 2^N)$$

と表現できることと等価である. 2^N 上で定義された集合関数を $\{0,1\}^N$ 上で定義された関数と同一視すると, 一般の集合関数は 0-1 変数 $x_1, \ldots, x_n$ に関する n 次の多項式関数に対応するのに対し, 2 次の集合関数は 2 次の多項式関数に対応する.

一般の集合関数を陽に表現するには $\mathrm{O}(2^n)$ のサイズの記憶容量が必要となるため, 集合関数の表現は組合せオークションの実現における問題点の一つとなっている. これに対し, 2 次の集合関数は, $\mathrm{O}(n^2)$ のサイズの記憶容量を使うだけで陽に表現することが可能である. 一方, 2 次の集合関数を用いることで複数の財の間の補完性, 代替性といった関係を表現可能であるので, 2 次の集合関数全体は有用かつ重要な効用関数のクラスを構成する.

本研究では, オークション参加者の効用関数が 2 次の集合関数で与えられる場合において, いくつかの特殊ケースを考え, それらのケースに対し多項式時間可解性, もしくは NP 困難性を示す. 一般の効用関数に対する配分問題は, ほとんどのケースにおいて NP 困難である. そのため, 最適な配分を短時間で求めることが非常に困難であることが組合せオークションの実現における問題点の一つとして挙げられる. これに対し, 一般の効用関数に比べて構造が簡素な 2 次の効用関数を用いることで, 計算困難性がどのように変化するかを把握することが狙いである. また, 多項式時間で解けるケースについては, 効用関数が 2 次であるという事実を用いて, どの程度高速化可能であるかを調べ, その時間計算量を解析する.

2. 既存研究

配分問題に関する研究はこれまでに盛んに行われている. 問題の入力に用いられる効用関数を陽に表現すると指数サイズの記憶容量が必要とされるため, 効用関数を何らかのオラクルによって暗に表現することが一般的である. 良く用いられるオラクルとしては, 効用関数の関数値を評価する value オラクルがある. このほか, 効用関数に関するある種の最適化問題の最適解を求めるという, より強力な demand オラクルも用いられることもある.

一般の配分問題は, 効用関数が多項式サイズで陽に与えられた場合であっても, NP 困難であることが知られている [5]. 近似アルゴリズムについては, value オラクルを用いた場合は $O(1/\sqrt{n})$ 近似が可能であり [1, 6], demand オラクルの場合は $O(\sqrt{\log n}/n)$ 近似が可能である [4].

配分問題では, 応用例が豊富なことから効用関数が劣モジュラ性をもつ場合についても数多くの結果がある. 配分問題は, 効用関数に劣モジュラ性を仮定しても依然として NP 困難であることが知られている. この問題に対し, value オラクルを用いた場合に対する 1/2 近似アルゴリズムが提案されている [5]. 一方, value オ

*東北大学, Tohoku University

ラクルを用いた場合には, $(1-1/e)$ より良い近似比をもつ解を多項式時間で求めることは NP 困難であることが示されている．これに対し，最良の近似比である $(1-1/e)$ 近似解を求める近似アルゴリズムがつい最近提案された [8]. demand オラクルを用いた場合については, $(1-1/e)$ よりわずかに良い近似比をもつ近似アルゴリズムが提案されている [2].

3. 本研究の結果

本研究で扱う問題は次のように定式化される.

$$\text{最大化} \quad \sum_{i=1}^{m} f_i(N_i)$$

$$\text{条件} \quad \{N_1, N_2, \ldots, N_m\} \text{ は } N \text{ の分割.}$$

ここで, 各効用関数 $f_i : 2^N \to \mathbb{R}$ $(i=1,\ldots,m)$ は $f_i(\emptyset)=0$ を満たす単調非増加な集合関数であり, 実数 $a_{jh}^{(i)} \in \mathbb{R}$ $(j,h \in N, j \le h)$ を用いて

$$f_i(X) = \sum_{j,h \in X,\ j \le h} a_{jh}^{(i)} \qquad (X \in 2^N) \tag{1}$$

と表現される.

本研究ではまず, 各効用関数が優モジュラの場合を考えた．参加者数が 2 のときについては, 配分問題が多項式時間で解けることは知られている．ここでは, 効用関数が 2 次であることを利用して, 配分問題が有向グラフ上の最小カット問題に帰着できることを証明するとともに, この帰着に基づいて問題を解く際の時間計算量を解析した．また, 参加者数が 3 以上のときは配分問題が NP 困難であることを, 無向グラフ上の k 端子カット問題を配分問題に帰着することによって証明した．また, 参加者数が 3 以上の問題に対して, 局所探索に基づくヒューリスティックなアルゴリズムを提案し, その近似精度を実験により評価した．予備実験の結果, 多くの実験例に対して高精度な解を得ることができた．実験結果の詳細については講演当日に発表する予定である．

次に, 各効用関数が劣モジュラの場合を考えた．この場合, 参加者数が 2 であっても NP 困難であることを, 無向グラフ上の最大カット問題を配分問題に帰着することによって証明した．また, 劣モジュラ関数の重要な部分クラスをなす $\mathrm{M}^\natural$ 凹関数についても考えた．$\mathrm{M}^\natural$ 凹関数は Murota–Shioura[7] によって提案された概念であり, 数理経済学における粗代替性と等価な概念であることが知られている [3]．本研究では, 各効用関数が $\mathrm{M}^\natural$ 凹関数により与えられる場合についても考えた．この場合の配分問題が多項式時間で解けることは既に知られている．本研究では, 効用関数が 2 次であることを利用して, 配分問題が 2 次凸の目的関数をもつ最小費用フロー問題に帰着できることを証明するとともに, この帰着に基づいて問題を解く際の時間計算量を解析した．

表 1: 本研究の結果のまとめ

効用関数	
2 次の優モジュラ	• 参加者 $=2$ のとき $\mathrm{O}(n^3/\log n)$ (最小カット問題に帰着) • 参加者 ≥ 3 のとき NP 困難 (k 端子カット問題を帰着)
2 次の劣モジュラ	• 一般には NP 困難 (最大カット問題を帰着) • 効用関数が $\mathrm{M}^\natural$ 凹ならば $\mathrm{O}(mn^2\log(mn))$ (2 次凸の最小費用フロー問題に帰着)

参考文献

[1] L. Blumrosen and N. Nisan, On the computational power of ascending auction I: demand queries, *Proc. of STOC* (2005) 29–43.

[2] U. Feige and J. Vondrák, Approximation algorithms for allocation problems: improving the factor of $1-1/e$, *Proc. of FOCS* (2006) 667–676.

[3] S. Fujishige and Z. Yang, A note on Kelso and Crawford's gross substitutes condition, *Mathematics of Operations Research* 28 (2003) 463–469.

[4] R. Holzman, N. Kfir-Dahav, D. Monderer, and M. Tennenholtz, Bundling equilibrium in combinatorial auctions, *Games and Economic Behavior* 47 (2004) 104–123.

[5] B. Lehmann, D. Lehmann, and N. Nisan, Combinatorial auctions with decreasing marginal utilities, *Games and Economic Behavior* 55 (2006) 270–296.

[6] D. Lehmann, L. O'Callaghan, and Y. Shoham, Truth revelation in approximately efficient combinatorial auctions, *Proc. of EC* (1999) 96–102.

[7] K. Murota and A. Shioura, M-convex function on generalized polymatroid, *Mathematics of Operations Research*, 24 (1999) 95–105.

[8] J. Vondrák, Optimal approximation for the submodular welfare problem in the value oracle model, *Proc. of STOC* (2008) 67–74.