A-011

組合せ子の強収束性
Strong Convergence of Combinators

岩見 宗弘 †
Munehiro Iwami

1. はじめに

組合せ子論理は, Curry ら [3] により考案された計算体系であり, 計算可能性理論の研究において重要な役割を果してきた. また, 論理や計算の基礎として重要である. 組合せ子論理の計算対象は, 組合せ子と呼ばれる 2 つの定数 $\mathbf{S}, \mathbf{K}$ から構成される項であり, 2 つの計算規則 $\mathbf{S}xyz \to xz(yz)$ と $\mathbf{K}xy \to x$ だけを持つ. 組合せ子論理は λ 計算と深い関連があり, その性質や λ 計算との対応関係について様々な研究が行われている [1, 3, 5]. さらに, 組合せ子論理は関数型プログラミング言語の効率的な実装に応用されている [16].

一般の項を扱う計算モデルとして, 項書換えシステム (TRS) がよく知られている. 組合せ子論理や組合せ子の書換え規則は, TRS と見なすことができる [15]. TRS では様々な書換え規則を一般的に取り扱う. 同様に, 様々な書換え規則を持つ組合せ子を考えた場合, どのような性質を持つのであろうか. このため, 組合せ子 $\mathbf{S}, \mathbf{K}$ 以外にも, 論理学における構造規則に関する推論規則 [11] に関連する組合せ子 $\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{W}$ や $\lambda\mathbf{I}$ 計算と密接な関係を持つ組合せ子 $\mathbf{J}$ 等, 様々な組合せ子に関する研究が行われている [5, 10]. 組合せ子 $\mathbf{O}$ は Curry の不動点組合せ子 $\mathbf{Y}$ [3] と密接な関係がある [1]. また, 組合せ子 $\mathbf{L}, \mathbf{O}$ で Turing の不動点組合せ子 $\mathbf{U}$[1] を表すことができる [12]. さらに, 組合せ子 $\mathbf{S}$ のみからなる項が正規形を持つか否かの手続きも与えられている [17]. Begstra らは組合せ子 $\mathbf{S}$ が非循環性を持たないことを示した [2]. 我々は, 組合せ子 $\mathbf{S}$ 以外の様々な組合せ子に関する非循環性について研究を行った [6].

TRS は有限項だけを書換えの対象とするのではない. 無限データを表現する無限項を書換えの対象とする TRS に関する研究も行われている [8, 9, 15]. 無限項には無限書換え列が存在しないという停止性の通常の定義は意味をなさない. そこで停止性の代わりに無限書換え列の強収束性に関する研究が行われている [9, 18]. 文献 [18] では, 強収束性の概念が整理され, 組合せ子 $\mathbf{S}$ が強収束性を持たないことと組合せ子 $\mathbf{Y}$ が強収束性を持つことが示されている. また, 停止性を自動的に示す方法である行列解釈 [4] が無限項上に拡張されている. さらに, その手法で組合せ子 $\mathbf{O}$ が強収束性を持つことが示されている. しかしながら, それ以外の組合せ子の強収束性に関する研究は行われていない.

本稿では, 様々な組合せ子の強収束性について述べる. 最初に組合せ子 $\Delta \in \{\mathbf{L}, \mathbf{J}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{Q}, \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_3, \mathbf{R}, \mathbf{T}, \mathbf{V}, \mathbf{C}^*, \mathbf{C}^{**}\}$ に対して, 組合せ子 Δ が持つ 1 つの書換え規則だけから成る TRS $\mathcal{R}(\Delta)$ は無限 Δ-項上で強収束ではないことを示す.

次に Turing の不動点組合せ子 $\mathbf{U}$[1, 12] に対して, 組合せ子 $\mathbf{U}$ が持つ 1 つの書換え規則だけから成る TRS $\mathcal{R}(\mathbf{U})$ が無限 $\mathbf{U}$-項上で強収束性を持つことを Zantema と同様の手法 [18] により示す. さらに組合せ子 $\mathbf{U}$ の持つ書換え規則の右辺を一般化した組合せ子 $\mathbf{U}^n$ を提案し, 組合せ子 $\mathbf{U}^n$ が持つ 1 つの書換え規則だけから成る TRS $\mathcal{R}(\mathbf{U}^n)$ が無限 $\mathbf{U}^n$-項上で強収束性を持つことを示す.

本稿では文献 [12] に掲載されている組合せ子と不動点組合せ子 $\mathbf{Y}$[1, 3] を取り扱う. 本稿で使用する組合せ子とその性質を表 **1** にまとめる.

2. 準備

本稿で使用する記号と定義は文献 [18, 6, 15] に準ずる.

シグネチャ $\mathcal{F}$ を引数を持つ関数記号の空ではない集合とする. 0 引数の関数記号を定数と呼ぶ. 項 (有限項と無限項) は位置から記号への関数として定義される. ここで位置 $p \in N^*$ は正整数の列である. $\perp$ は未定義を表し, すべての関数記号 $f \in \mathcal{F}$ は引数 $\mathbf{ar}(f) \in N$ を持つとし, 次のように項を定義する. $\mathcal{F}$ 上の項 (有限項と無限項) は次の条件を満たす写像 $t : N^* \to \mathcal{F} \cup \{\perp\}$ で定義される: (1)$t(\epsilon) \in \mathcal{F}$ であり, かつ (2) すべての位置 $p \in N^*$ とすべての $i \in N$ に対して, $t(pi) \in \mathcal{F} \iff t(p) \in \mathcal{F} \wedge 1 \leq i \leq \mathbf{ar}(t(p))$ が成り立つ. $\mathcal{F}$ 上のすべての項の集合を $T^\infty(\mathcal{F})$ で表す. $t(p) \in \mathcal{F}$ を満たす位置 $p \in N^*$ を項 t の位置と呼ぶ. 項 t に対して $t(\epsilon)$ を根記号という. 有限項の通常の定義は, 有限個の位置を持つ項と一致し, 有限項全体の集合を $T(\mathcal{F})$ で表す. 項の定義から, $T(\mathcal{F}) \subseteq T^\infty(\mathcal{F})$ である. 引数 $\mathbf{ar}(f) = n$ を持つ $f \in \mathcal{F}$ と n 個の項 $t_1, \cdots, t_n$ に対して, 次のように定義される項 t を $f(t_1, \cdots, t_n)$ と表す: $t(\epsilon) = f$ かつすべての $p \in N^*$ と $i = 1, \cdots, n$ に対して $t(ip) = t_i(p)$ かつ $i \notin \{1, \cdots, n\}$ ならば $t(ip) = \perp$. 有限項上の書換えを一般化し, 無限項書換えシステム (TRS) を書換え規則の集合と定義する. 書換え規則 $l \to r$ とは, 組 $(l, r) \in T^\infty(\mathcal{F} \cup \mathcal{V}) \times T^\infty(\mathcal{F} \cup \mathcal{V})$ である ($\mathcal{V}$ は引数が 0 の変数と呼ばれる新しい記号の可算無限集合である ($\mathcal{F} \cap \mathcal{V} = \emptyset$)). 代入を写像 $\sigma : \mathcal{V} \to T^\infty(\mathcal{F} \cup \mathcal{V})$ と定義し, 項 t におけるすべての変数 x の出現を $\sigma(x)$ で置き換えることにより t から得られる項を $t\sigma$ と表す. TRS $\mathcal{R}$ に対して, $T^\infty(\mathcal{F} \cup \mathcal{V})$ 上の書換え関係 $\to^p_{\mathcal{R}}$ を次のように帰納的に定義する: (1) すべての書換え規則 $l \to r \in \mathcal{R}$ かつすべての代入 σ に対して, $l\sigma \to^\epsilon_{\mathcal{R}} r\sigma$, (2)$t \to^p_{\mathcal{R}} u$ ならばすべての関数記号 f に対して, $f(\cdots, t, \cdots) \to^{ip}_{\mathcal{R}} f(\cdots, u, \cdots)$

‡TRS $\mathcal{R}(\mathbf{S}) = \{a(a(a(\mathbf{S}, x), y), z) \to a(a(x, z), a(y, z))\}$ は停止性を持たない [1]. また, この TRS $\mathcal{R}$ が有限かつ無限項上の両方において SN^ω を満たすと述べられている [9]. しかしながら, これは無限項上において正しくないことが指摘されている [18]. さらに, TRS $\mathcal{R}(\mathbf{O}) = \{a(a(\mathbf{O}, x), y) \to a(y, a(x, y))\}$ は SN^∞ である [18] が, 停止性を持たない [6].

§TRS $\mathcal{R}$ のすべての書換え規則 $l \to r$ に対して, 左辺 l が線形かつ有限であるとする. このとき, $\mathcal{R}$ において SN^∞ と SN^ω は同値である [18].

¶TRS $\mathcal{R} = \{I(x) \to x\}$ は停止性を持つ. しかしながら, 無限項 I^ω からなる無限書換え列は SN^∞ ではない [9].

†島根大学 総合理工学部

表 1: 組合せ子とその性質

停止性 $\not\Longleftarrow^{\ddagger}$ 強収束性 $\not\Longleftarrow^{\S}$ ω-強収束性
停止性 $\not\Longleftrightarrow^{\P}$ 強収束性 $\Longrightarrow$ ω-強収束性

組合せ子	停止性	強収束性	ω-強収束性
S	×[1]	×[18]	×[18]
K	○	×	×
I	○	×	×
O(**SI**[1], δ[18])	×[6]	○[18]	○[18]
L	×[13, 14]	⊗	⊗
J	○[10]	⊗	⊗
H	×	×	×
M	×	×	×
W	×	×	×
$\mathbf{W}^1$	×	×	×
$\mathbf{W}^*$	×	×	×
$\mathbf{W}^{**}$	×	×	×
Y[1, 3]	×	○[18]	○[18]
U (**A**[1])	×	⊙	⊙
$\mathbf{U}^n$	×[7]	⊙	⊙
B	○	⊗	⊗
C	○	⊗	⊗
D	○	⊗	⊗
E	○	⊗	⊗
F	○	⊗	⊗
G	○	⊗	⊗
Q	○	⊗	⊗
$\mathbf{Q}_1$	○	⊗	⊗
$\mathbf{Q}_3$	○	⊗	⊗
R	○	⊗	⊗
T	○	⊗	⊗
V	○	⊗	⊗
$\mathbf{C}^*$	○	⊗	⊗
$\mathbf{C}^{**}$	○	⊗	⊗

(⊙ : 成立 (本研究), ⊗ : 不成立 (本研究),
○ : 成立, × : 不成立)

(項 t と u は関数記号 f の i 番目の引数とする). $t \to^{p}_{\mathcal{R}} u$ を位置 p における書換えステップと呼ぶ. $l\sigma$ をリデックスと呼び, $t \to^{p}_{\mathcal{R}} u$ を満たす項 t における位置 p が存在するならば, $t \to_{\mathcal{R}} u$ と書く. 位置 ϵ における書換えステップ $t \to^{\epsilon}_{\mathcal{R}} u$ を根書換えと呼ぶ. 項における任意の変数の出現が高々1 回のとき, 線形であるという. TRS $\mathcal{R}$ のすべての書換え規則 $l \to r$ に対して, 左辺 l が線形であるとき, TRS $\mathcal{R}$ を左線形であるという. TRS $\mathcal{R}$ のすべての書換え規則 $l \to r$ に対して, $r \notin \mathcal{V}$ のとき TRS $\mathcal{R}$ を非収縮であるという.

以下では, 組合せ子 Δ を定数とする. また, シグネチャ $\mathcal{F}(\Delta)$ を定数 Δ と引数 2 の関数記号 a だけからなる集合とする. $\mathcal{F}(\Delta)$ 上の変数が出現しないすべての項を基礎 Δ-項といい, 基礎 Δ-項全体の集合を $CL^{\infty}(\Delta)$ と表し, 有限基礎 Δ-項全体の集合を $CL(\Delta)$ と表す. 代入は写像 $\sigma : \mathcal{V} \to CL^{\infty}(\Delta)$ に制限し, 組み合せ子 Δ に対する TRS を $\mathcal{R}(\Delta)$ と表す. 以降の節では, $CL^{\infty}(\Delta)$ 上の書換え関係 $\to_{\mathcal{R}(\Delta)}$ を考える. TRS $\mathcal{R}(\Delta)$ が $CL(\Delta)$ 上で停止性を持つとは, 無限書換え列 $t_0 \to_{\mathcal{R}(\Delta)} t_1 \to_{\mathcal{R}(\Delta)} t_2 \to_{\mathcal{R}(\Delta)} \cdots$ が存在しないときをいう. 有限 Δ-項の長さを次のように再帰的に定義する: (1)$\mid \Delta \mid = 1$, (2)$\mid a(X, Y) \mid = \mid X \mid + \mid Y \mid$ $(X, Y \in CL(\Delta))$.

3. 組合せ子の強収束性

無限書換え列の収束性を表現するために, 停止性の代わりとしてより自然な強収束性を考える. 長さが順序数 ω を超えない無限書換えを ω-書換えといい, 最初にその収束性を考える. ω-書換えの収束性を考える理由は, 無限書換え列の長さが極限順序数より小さい場合の収束性を考える必要がないからである.

定義 1 *([18]) TRS $\mathcal{R}$ が ω-強収束性 (SN^{ω}) を満たすとは, すべての ω-書換え $t_1 \to^{p_1}_{\mathcal{R}} t_2 \to^{p_2}_{\mathcal{R}} t_3 \to^{p_3}_{\mathcal{R}} \cdots$ とすべての $p \in N^*$ に対して, p_i が p の接頭辞となるような i が有限個しか存在しないときをいう.*

定理 2 *([18]) TRS $\mathcal{R}$ に対して, 性質 SN^{ω} が成立することと, すべての ω-書換えが根書換えを高々有限回しか含まないとは同値である.*

次に順序数 ω よりも高い順序数の無限書換え (超限書換え) を考える.

定義 3 *([18]) 任意の順序数 α に対して, 項の無限 α-列 $\{t_{\beta}\}_{\beta<\alpha}$ が TRS $\mathcal{R}$ の書換え列であるとは, すべての $\beta(<\alpha)$ に対して $t_{\beta} \to_{\mathcal{R}} t_{\beta+1}$ が成立するときをいう. このような書換え列が次の性質を満たすとき強連続であるという：すべての極限順序数 $\beta(<\alpha)$ に対して書換えステップ $t_{\gamma} \to_{\mathcal{R}} t_{\gamma+1}$ のリデックスの位置が γ が β に下から近付く $(\gamma \to \beta)$ とき無限に発散する. すべての極限順序数 $\beta(\leq \alpha)$ に対して上と同じことが成り立つとき, 書換え列が強収束 (SN^{∞}) であると呼ぶ.*

注意：$\beta < \omega$ を満たす極限順序数 β は存在しないから, すべての ω-書換えは強連続である. また, 定義 3 より, $\neg SN^{\omega} \Rightarrow \neg SN^{\infty}$ $(SN^{\infty} \Rightarrow SN^{\omega})$ が成立する.

例 4 次の *TRS* $\mathcal{R} = \{b \to b\}$ を考える．ω-書換え $\underline{b} \to^{\epsilon}_{\mathcal{R}} \underline{b} \to^{\epsilon}_{\mathcal{R}} \underline{b} \to^{\epsilon}_{\mathcal{R}} \cdots$ は強連続であるがリデックスの位置は無限に発散しないから，*TRS* $\mathcal{R}$ は SN^{∞} でない．また，無限回の根書換えを含むから SN^{ω} でもない．

文献 [18] では，SN^{∞} が成立することとすべての強連続な書換え列が有限回のみ根書換えを含むことが同値であることが述べられている．

定理 5 *([18]) TRS* $\mathcal{R}$ *のすべての書換え規則* $l \to r$ *に対して，左辺* l *が線形かつ有限であるとする．このとき，TRS* $\mathcal{R}$ *において* SN^{∞} *と* SN^{ω} *は同値である．*

本稿で扱う組合せ子 Δ に対して，TRS $\mathcal{R}(\Delta)$ は左辺が有限かつ線形である 1 つの書換え規則だけから成る．定理 5 から TRS $\mathcal{R}(\Delta)$ において SN^{∞} と SN^{ω} は同値である．

例 6
- $\mathcal{F}(\mathbf{K}) = \{\mathbf{K}, a\}$ とし，*TRS* $\mathcal{R}(\mathbf{K})$ を次のように定義する：$\mathcal{R}(\mathbf{K}) = \{a(a(\mathbf{K}, x), y) \to x\}$．$t_0$ を $t_0 = a(a(\mathbf{K}, t_0), \mathbf{K})$ なる無限項とする．$\underline{a(a(\mathbf{K}, t_0), \mathbf{K})} \to^{\epsilon}_{\mathcal{R}(\mathbf{K})} t_0 = \underline{a(a(\mathbf{K}, t_0), \mathbf{K})}$．
- $\mathcal{F}(\mathbf{I}) = \{\mathbf{I}, a\}$ とし，*TRS* $\mathcal{R}(\mathbf{I})$ を次のように定義する：$\mathcal{R}(\mathbf{I}) = \{a(\mathbf{I}, x) \to x\}$．$t_0$ を $t_0 = a(\mathbf{I}, t_0)$ なる無限項とする．$\underline{a(\mathbf{I}, t_0)} \to^{\epsilon}_{\mathcal{R}(\mathbf{K})} t_0 = \underline{a(\mathbf{I}, t_0)}$．

したがって，$\Delta \in \{\mathbf{K}, \mathbf{I}\}$ に対して，*TRS* $\mathcal{R}(\Delta)$ は $CL^{\infty}(\Delta)$ 上で SN^{ω} ではない．定理 5 より，$\Delta \in \{\mathbf{K}, \mathbf{I}\}$ に対して，*TRS* $\mathcal{R}(\Delta)$ は $CL^{\infty}(\Delta)$ 上で SN^{∞} ではない．

定義 7 $\mathcal{F}(\mathbf{L}) = \{\mathbf{L}, a\}$ とし，*TRS* $\mathcal{R}(\mathbf{L})$ を次のように定義する：$\mathcal{R}(\mathbf{L}) = \{a(a(\mathbf{L}, x), y) \to a(x, a(y, y))\}$．

TRS $\mathcal{R}(\mathbf{L})$ は $CL(\mathbf{L})$ 上で停止性を持たない [14, 13]．また，TRS $\mathcal{R}(\mathbf{L})$ は $CL^{\infty}(\mathbf{L})$ 上で SN^{ω} ではない．

定理 8 *TRS* $\mathcal{R}(\mathbf{L})$ *は* $CL^{\infty}(\mathbf{L})$ *上で* SN^{ω} *ではない．*

(証明) t_0 を $t_0 = a(\mathbf{L}, t_0)$ なる無限項とする．次の ω-書換えを考える．

$$
\begin{aligned}
&\underline{a(a(\mathbf{L}, t_0), \mathbf{L})} \\
&\to^{\epsilon}_{\mathcal{R}(\mathbf{L})} a(t_0, a(\mathbf{L}, \mathbf{L})) \\
&= \underline{a(a(\mathbf{L}, t_0), t_1)} \quad (t_1 = a(\mathbf{L}, \mathbf{L})) \\
&\to^{\epsilon}_{\mathcal{R}(\mathbf{L})} a(t_0, a(t_1, t_1)) \\
&= \underline{a(a(\mathbf{L}, t_0), t_2)} \quad (t_2 = a(t_1, t_1)) \\
&\to^{\epsilon}_{\mathcal{R}(\mathbf{L})} a(t_0, a(t_2, t_2))
\end{aligned}
$$

$= \cdots$．この ω-書換えは無限回の根書換えから成る．□

定義 9 $\mathcal{F}(\mathbf{J}) = \{\mathbf{J}, a\}$ とし，*TRS* $\mathcal{R}(\mathbf{J})$ を次のように定義する：

$$\mathcal{R}(\mathbf{J}) = \{a(a(a(a(\mathbf{J}, x), y), z), w) \to a(a(x, y), a(a(x, w), z))\}.$$

TRS $\mathcal{R}(\mathbf{J})$ は $CL(\mathbf{J})$ 上で停止性を持つ [10]．しかしながら，TRS $\mathcal{R}(\mathbf{J})$ は $CL^{\infty}(\mathbf{J})$ 上で SN^{ω} ではない．

定理 10 *TRS* $\mathcal{R}(\mathbf{J})$ *は* $CL^{\infty}(\mathbf{J})$ *上で* SN^{ω} *ではない．*

(証明) t_0 を $t_0 = a(a(\mathbf{J}, t_0), \mathbf{J})$ なる無限項とする．次の ω-書換えを考える．

$$
\begin{aligned}
&\underline{a(a(a(a(\mathbf{J}, t_0), \mathbf{J}), \mathbf{J}), \mathbf{J})} \\
&\to^{\epsilon}_{\mathcal{R}(\mathbf{J})} a(a(t_0, \mathbf{J}), a(a(t_0, \mathbf{J}), \mathbf{J})) \\
&= \underline{a(a(a(a(\mathbf{J}, t_0), \mathbf{J}), \mathbf{J}), t_1)} \quad (t_1 = a(a(t_0, \mathbf{J}), \mathbf{J})) \\
&\to^{\epsilon}_{\mathcal{R}(\mathbf{J})} a(a(t_0, \mathbf{J}), a(a(t_0, t_1), \mathbf{J})) \\
&= \underline{a(a(a(a(\mathbf{J}, t_0), \mathbf{J}), \mathbf{J}), t_2)} \quad (t_2 = a(a(t_0, t_1), \mathbf{J})) \\
&\to^{\epsilon}_{\mathcal{R}(\mathbf{J})} a(a(t_0, \mathbf{J}), a(a(t_0, t_2), \mathbf{J})) \\
&= \underline{a(a(a(a(\mathbf{J}, t_0), \mathbf{J}), \mathbf{J}), t_3)} \quad (t_3 = a(a(t_0, t_2), \mathbf{J}))
\end{aligned}
$$

$\to^{\epsilon}_{\mathcal{R}(\mathbf{J})} \cdots$．この ω-書換えは無限回の根書換えから成る．□

例 11
- $\mathcal{F}(\mathbf{H}) = \{\mathbf{H}, a\}$ とし，*TRS* $\mathcal{R}(\mathbf{H})$ を次のように定義する：$\mathcal{R}(\mathbf{H}) = \{a(a(a(\mathbf{H}, x), y), z) \to a(a(a(x, y), z), y)\}$．$\underline{a(a(a(\mathbf{H}, \mathbf{H}), \mathbf{H}), \mathbf{H})} \to^{\epsilon}_{\mathcal{R}(\mathbf{H})} \underline{a(a(a(\mathbf{H}, \mathbf{H}), \mathbf{H}), \mathbf{H})}$．
- $\mathcal{F}(\mathbf{M}) = \{\mathbf{M}, a\}$ とし，*TRS* $\mathcal{R}(\mathbf{M})$ を次のように定義する：$\mathcal{R}(\mathbf{M}) = \{a(\mathbf{M}, x) \to a(x, x)\}$．$\underline{a(\mathbf{M}, \mathbf{M})} \to^{\epsilon}_{\mathcal{R}(\mathbf{M})} \underline{a(\mathbf{M}, \mathbf{M})}$．
- $\mathcal{F}(\mathbf{W}) = \{\mathbf{W}, a\}$ とし，*TRS* $\mathcal{R}(\mathbf{W})$ を次のように定義する：$\mathcal{R}(\mathbf{W}) = \{a(a(\mathbf{W}, x), y) \to a(a(x, y), y)\}$．$\underline{a(a(\mathbf{W}, \mathbf{W}), \mathbf{W})} \to^{\epsilon}_{\mathcal{R}(\mathbf{W})} \underline{a(a(\mathbf{W}, \mathbf{W}), \mathbf{W})}$．
- $\mathcal{F}(\mathbf{W}^1) = \{\mathbf{W}^1, a\}$ とし，*TRS* $\mathcal{R}(\mathbf{W}^1)$ を次のように定義する：$\mathcal{R}(\mathbf{W}^1) = \{a(a(\mathbf{W}^1, x), y) \to a(a(y, x), x)\}$．$\underline{a(a(\mathbf{W}^1, \mathbf{W}^1), \mathbf{W}^1)} \to^{\epsilon}_{\mathcal{R}(\mathbf{W}^1)} \underline{a(a(\mathbf{W}^1, \mathbf{W}^1), \mathbf{W}^1)}$．
- $\mathcal{F}(\mathbf{W}^*) = \{\mathbf{W}^*, a\}$ とし，*TRS* $\mathcal{R}(\mathbf{W}^*)$ を次のように定義する：$\mathcal{R}(\mathbf{W}^*) = \{a(a(a(\mathbf{W}^*, x), y), z) \to a(a(a(x, y), z), z)\}$．$\underline{a(a(a(\mathbf{W}^*, \mathbf{W}^*), \mathbf{W}^*), \mathbf{W}^*)} \to^{\epsilon}_{\mathcal{R}(\mathbf{W}^*)} \underline{a(a(a(\mathbf{W}^*, \mathbf{W}^*), \mathbf{W}^*), \mathbf{W}^*)}$．
- $\mathcal{F}(\mathbf{W}^{**}) = \{\mathbf{W}^{**}, a\}$ とし，*TRS* $\mathcal{R}(\mathbf{W}^{**})$ を次のように定義する：$\mathcal{R}(\mathbf{W}^{**}) = \{a(a(a(a(\mathbf{W}^{**}, x), y), z), w) \to a(a(a(a(x, y), z), w), w)\}$．$\underline{a(a(a(a(\mathbf{W}^{**}, \mathbf{W}^{**}), \mathbf{W}^{**}), \mathbf{W}^{**}), \mathbf{W}^{**})} \to^{\epsilon}_{\mathcal{R}(\mathbf{W}^{**})} \underline{a(a(a(a(\mathbf{W}^{**}, \mathbf{W}^{**}), \mathbf{W}^{**}), \mathbf{W}^{**}), \mathbf{W}^{**})}$．

したがって，$\Delta \in \{\mathbf{H}, \mathbf{M}, \mathbf{W}, \mathbf{W}^1, \mathbf{W}^*, \mathbf{W}^{**}\}$ に対して，*TRS* $\mathcal{R}(\Delta)$ は $CL^{\infty}(\Delta)$ 上で SN^{ω} ではない．定理 5 より，$\Delta \in \{\mathbf{H}, \mathbf{M}, \mathbf{W}, \mathbf{W}^1, \mathbf{W}^*, \mathbf{W}^{**}\}$ に対して，*TRS* $\mathcal{R}(\Delta)$ は $CL^{\infty}(\Delta)$ 上で SN^{∞} ではない．

定義 12 $\mathcal{F}(\mathbf{B}) = \{\mathbf{B}, a\}$ とし，*TRS* $\mathcal{R}(\mathbf{B})$ を次のように定義する：

$$\mathcal{R}(\mathbf{B}) = \{a(a(a(\mathbf{B}, x), y), z) \to a(x, a(y, z))\}.$$

$|\ a(a(a(\mathbf{B}, X), Y), Z)\ | > |\ a(X, a(Y, Z))\ |$ $(X, Y, Z \in CL(\mathbf{B}))$ より，TRS $\mathcal{R}(\mathbf{B})$ は $CL(\mathbf{B})$ 上で停止性を持つ．しかしながら，TRS $\mathcal{R}(\mathbf{B})$ は $CL^{\infty}(\mathbf{B})$ 上で SN^{ω} ではない．

定理 13 *TRS* $\mathcal{R}(\mathbf{B})$ *は* $CL^{\infty}(\mathbf{B})$ *上で* SN^{ω} *ではない．*

(証明) t_0 を $t_0 = a(a(\mathbf{B}, t_0), \mathbf{B})$ なる無限項とする．次の ω-書換えを考える．

$$\begin{aligned}
&\underline{a(a(a(\mathbf{B}, t_0), \mathbf{B}), \mathbf{B})} \\
\to^{\epsilon}_{\mathcal{R}(\mathbf{B})}\ & \underline{a(t_0, a(\mathbf{B}, \mathbf{B}))} \\
=\ & \underline{a(a(a(\mathbf{B}, t_0), \mathbf{B}), t_1)} \quad (t_1 = a(\mathbf{B}, \mathbf{B})) \\
\to^{\epsilon}_{\mathcal{R}(\mathbf{B})}\ & \underline{a(t_0, a(\mathbf{B}, t_1))} \\
=\ & \underline{a(a(a(\mathbf{B}, t_0), \mathbf{B}), t_2)} \quad (t_2 = a(\mathbf{B}, t_1)) \\
\to^{\epsilon}_{\mathcal{R}(\mathbf{B})}\ & \underline{a(t_0, a(\mathbf{B}, t_2))} \\
=\ & \underline{a(a(a(\mathbf{B}, t_0), \mathbf{B}), t_3)} \quad (t_3 = a(\mathbf{B}, t_2)) \\
\to^{\epsilon}_{\mathcal{R}(\mathbf{B})}\ & \cdots.
\end{aligned}$$

この ω-書換えは無限回の根書換えから成る．

□

定義 14 $\mathcal{F}(\mathbf{C}) = \{\mathbf{C}, a\}$ とし，*TRS* $\mathcal{R}(\mathbf{C})$ を次のように定義する：

$\mathcal{R}(\mathbf{C}) = \{a(a(a(\mathbf{C}, x), y), z) \to a(a(x, z), y)\}$.

$|\,a(a(a(\mathbf{C}, X), Y), Z)\,| > |\,a(a(X, Z), Y)\,|$ $(X, Y, Z \in CL(\mathbf{C}))$ より，TRS $\mathcal{R}(\mathbf{C})$ は $CL(\mathbf{C})$ 上で停止性を持つ．しかしながら，TRS $\mathcal{R}(\mathbf{C})$ は $CL^{\infty}(\mathbf{C})$ 上で SN^{ω} ではない．

定理 15 *TRS* $\mathcal{R}(\mathbf{C})$ は $CL^{\infty}(\mathbf{C})$ 上で SN^{ω} ではない．

(証明) t_0 を $t_0 = a(\mathbf{C}, t_0)$ なる無限項とする．次の ω-書換えを考える．

$\underline{a(a(a(\mathbf{C}, t_0), \mathbf{C}), \mathbf{C})} \to^{\epsilon}_{\mathcal{R}(\mathbf{C})} a(a(t_0, \mathbf{C}), \mathbf{C}) = \underline{a(a(a(\mathbf{C}, t_0), \mathbf{C}), \mathbf{C})}$. この ω-書換えは無限個の根書換えから成る．

□

定義 16 $\mathcal{F}(\mathbf{D}) = \{\mathbf{D}, a\}$ とし，*TRS* $\mathcal{R}(\mathbf{D})$ を次のように定義する：

$\mathcal{R}(\mathbf{D}) = \{a(a(a(a(\mathbf{D}, x), y), z), w) \to a(a(x, y), a(z, w))\}$.

$|\,a(a(a(a(\mathbf{D}, X), Y), Z), W)\,| > |\,a(a(X, Y), a(Z, W))\,|$ $(X, Y, Z, W \in CL(\mathbf{D}))$ より，TRS $\mathcal{R}(\mathbf{D})$ は $CL(\mathbf{D})$ 上で停止性を持つ．しかしながら，TRS $\mathcal{R}(\mathbf{D})$ は $CL^{\infty}(\mathbf{D})$ 上で SN^{ω} ではない．

定理 17 *TRS* $\mathcal{R}(\mathbf{D})$ は $CL^{\infty}(\mathbf{D})$ 上で SN^{ω} ではない．

(証明) t_0 を $t_0 = a(a(\mathbf{D}, t_0), \mathbf{D})$ なる無限項とする．次の ω-書換えを考える．

$$\begin{aligned}
&\underline{a(a(a(a(\mathbf{D}, t_0), \mathbf{D}), \mathbf{D}), \mathbf{D})} \\
\to^{\epsilon}_{\mathcal{R}(\mathbf{D})}\ & \underline{a(a(t_0, \mathbf{D}), a(\mathbf{D}, \mathbf{D}))} \\
=\ & \underline{a(a(a(a(\mathbf{D}, t_0), \mathbf{D}), \mathbf{D}), t_1)} \quad (t_1 = a(\mathbf{D}, \mathbf{D})) \\
\to^{\epsilon}_{\mathcal{R}(\mathbf{D})}\ & \underline{a(a(t_0, \mathbf{D}), a(\mathbf{D}, t_1))} \\
=\ & \underline{a(a(a(a(\mathbf{D}, t_0), \mathbf{D}), \mathbf{D}), t_2)} \quad (t_2 = a(\mathbf{D}, t_1)) \\
\to^{\epsilon}_{\mathcal{R}(\mathbf{D})}\ & \underline{a(a(t_0, \mathbf{D}), a(\mathbf{D}, t_2))} \\
=\ & \underline{a(a(a(a(\mathbf{D}, t_0), \mathbf{D}), \mathbf{D}), t_3)} \quad (t_3 = a(\mathbf{D}, t_2)) \\
\to^{\epsilon}_{\mathcal{R}(\mathbf{D})}\ & \cdots.
\end{aligned}$$

この ω-書換えは無限回の根書換えから成る．

□

定義 18 $\mathcal{F}(\mathbf{E}) = \{\mathbf{E}, a\}$ とし，*TRS* $\mathcal{R}(\mathbf{E})$ を次のように定義する：

$\mathcal{R}(\mathbf{E}) = \{a(a(a(a(a(\mathbf{E}, x), y), z), w), v) \to a(a(x, y), a(a(z, w), v))\}$.

$|\,a(a(a(a(a(\mathbf{E}, X), Y), Z), W), V)\,| > |\,a(a(X, Y), a(a(Z, W), V))\,|$ $(X, Y, Z, W, V \in CL(\mathbf{E}))$ より，TRS $\mathcal{R}(\mathbf{E})$ は $CL(\mathbf{E})$ 上で停止性を持つ．しかしながら，TRS $\mathcal{R}(\mathbf{E})$ は $CL^{\infty}(\mathbf{E})$ 上で SN^{ω} ではない．

定理 19 *TRS* $\mathcal{R}(\mathbf{E})$ は $CL^{\infty}(\mathbf{E})$ 上で SN^{ω} ではない．

(証明) t_0 を $t_0 = a(a(a(\mathbf{E}, t_0), \mathbf{E}), \mathbf{E})$ なる無限項とする．次の ω-書換えを考える．

$$\begin{aligned}
&\underline{a(a(a(a(a(\mathbf{E}, t_0), \mathbf{E}), \mathbf{E}), \mathbf{E}), \mathbf{E})} \\
\to^{\epsilon}_{\mathcal{R}(\mathbf{E})}\ & \underline{a(a(t_0, \mathbf{E}), a(a(\mathbf{E}, \mathbf{E}), \mathbf{E}))} \\
=\ & \underline{a(a(a(a(a(\mathbf{E}, t_0), \mathbf{E}), \mathbf{E}), \mathbf{E}), t_1)} \ (t_1 = a(a(\mathbf{E}, \mathbf{E}), \mathbf{E})) \\
\to^{\epsilon}_{\mathcal{R}(\mathbf{E})}\ & \underline{a(a(t_0, \mathbf{E}), a(a(\mathbf{E}, \mathbf{E}), t_1))} \\
=\ & \underline{a(a(a(a(a(\mathbf{E}, t_0), \mathbf{E}), \mathbf{E}), \mathbf{E}), t_2)} \ (t_2 = a(a(\mathbf{E}, \mathbf{E}), t_1)) \\
\to^{\epsilon}_{\mathcal{R}(\mathbf{E})}\ & \underline{a(a(t_0, \mathbf{E}), a(a(\mathbf{E}, \mathbf{E}), t_2))} \\
=\ & \underline{a(a(a(a(a(\mathbf{E}, t_0), \mathbf{E}), \mathbf{E}), \mathbf{E}), t_3)} \ (t_3 = a(a(\mathbf{E}, \mathbf{E}), t_2)) \\
\to^{\epsilon}_{\mathcal{R}(\mathbf{E})}\ & \cdots.
\end{aligned}$$

この ω-書換えは無限回の根書換えから成る．

□

定義 20 $\mathcal{F}(\mathbf{F}) = \{\mathbf{F}, a\}$ とし，*TRS* $\mathcal{R}(\mathbf{F})$ を次のように定義する：

$\mathcal{R}(\mathbf{F}) = \{a(a(a(\mathbf{F}, x), y), z) \to a(a(z, y), x)\}$.

$|\,a(a(a(\mathbf{F}, X), Y), Z)\,| > |\,a(a(Z, Y), X)\,|$ $(X, Y, Z \in CL(\mathbf{F}))$ より，TRS $\mathcal{R}(\mathbf{F})$ は $CL(\mathbf{F})$ 上で停止性を持つ．しかしながら，TRS $\mathcal{R}(\mathbf{F})$ は $CL^{\infty}(\mathbf{F})$ 上で SN^{ω} ではない．

定理 21 *TRS* $\mathcal{R}(\mathbf{F})$ は $CL^{\infty}(\mathbf{F})$ 上で SN^{ω} ではない．

(証明) t_0 を $t_0 = a(\mathbf{F}, t_0)$ なる無限項とする．次の ω-書換えを考える．

$\underline{a(a(a(\mathbf{F}, t_0), \mathbf{F}), t_0)} \to^{\epsilon}_{\mathcal{R}(\mathbf{F})} a(a(t_0, \mathbf{F}), t_0) = \underline{a(a(a(\mathbf{F}, t_0), \mathbf{F}), t_0)}$. この ω-書換えは無限回の根書換えから成る．

□

定義 22 $\mathcal{F}(\mathbf{G}) = \{\mathbf{G}, a\}$ とし，*TRS* $\mathcal{R}(\mathbf{G})$ を次のように定義する：

$\mathcal{R}(\mathbf{G}) = \{a(a(a(a(\mathbf{G}, x), y), z), w) \to a(a(x, w), a(y, z))\}$.

$|\,a(a(a(a(\mathbf{G}, X), Y), Z), W)\,| > |\,a(a(X, W), a(Y, Z))\,|$ $(X, Y, Z, W \in CL(\mathbf{G}))$ より，TRS $\mathcal{R}(\mathbf{G})$ は $CL(\mathbf{G})$ 上で停止性を持つ．しかしながら，TRS $\mathcal{R}(\mathbf{G})$ は $CL^{\infty}(\mathbf{G})$ 上で SN^{ω} ではない．

定理 23 *TRS* $\mathcal{R}(\mathbf{G})$ は $CL^{\infty}(\mathbf{G})$ 上で SN^{ω} ではない．

(証明) t_0 を $t_0 = a(a(\mathbf{G}, t_0), \mathbf{G})$ なる無限項とする．次の ω-書換えを考える．

$$\begin{aligned}
&\underline{a(a(a(a(\mathbf{G}, t_0), \mathbf{G}), \mathbf{G}), \mathbf{G})} \\
\to^{\epsilon}_{\mathcal{R}(\mathbf{G})}\ & \underline{a(a(t_0, \mathbf{G}), a(\mathbf{G}, \mathbf{G}))} \\
=\ & \underline{a(a(a(a(\mathbf{G}, t_0), \mathbf{G}), \mathbf{G}), t_1)} \quad (t_1 = a(\mathbf{G}, \mathbf{G})) \\
\to^{\epsilon}_{\mathcal{R}(\mathbf{G})}\ & \underline{a(a(t_0, t_1), t_1)} \\
=\ & \underline{a(a(a(a(\mathbf{G}, t_0), \mathbf{G}), t_1), t_1)} \\
\to^{\epsilon}_{\mathcal{R}(\mathbf{G})}\ & \underline{a(a(t_0, t_1), a(\mathbf{G}, t_1)))} \\
=\ & \underline{a(a(a(a(\mathbf{G}, t_0), \mathbf{G}), t_1), t_2)} \quad (t_2 = a(\mathbf{G}, t_1))
\end{aligned}$$

$\to^{\epsilon}_{\mathcal{R}(\mathbf{G})}$ $a(a(t_0, t_2), t_2)$
$= \underline{a(a(a(a(\mathbf{G}, t_0), \mathbf{G}), t_2), t_2)}$
$\to^{\epsilon}_{\mathcal{R}(\mathbf{G})}$ $a(a(t_0, t_2), a(\mathbf{G}, t_2))$
$= \underline{a(a(a(a(\mathbf{G}, t_0), \mathbf{G}), t_2), t_3)}$ $\quad (t_3 = a(\mathbf{G}, t_2))$
$\to^{\epsilon}_{\mathcal{R}(\mathbf{G})} \cdots$. この ω-書換えは無限回の根書換えから成る. □

定義 24 $\mathcal{F}(\mathbf{Q}) = \{\mathbf{Q}, a\}$ とし, *TRS* $\mathcal{R}(\mathbf{Q})$ を次のように定義する：
$\mathcal{R}(\mathbf{Q}) = \{a(a(a(\mathbf{Q},\ x),\ y),\ z) \to a(y,\ a(x,\ z))\}$.

$|\, a(a(a(\mathbf{Q}, X), Y), Z) \,|>|\, a(Y, a(X, Z)) \,|$ $(X, Y, Z \in CL(\mathbf{Q}))$ より, TRS $\mathcal{R}(\mathbf{Q})$ は $CL(\mathbf{Q})$ 上で停止性を持つ. しかしながら, TRS $\mathcal{R}(\mathbf{Q})$ は $CL^{\infty}(\mathbf{Q})$ 上で SN^{ω} ではない.

定理 25 *TRS* $\mathcal{R}(\mathbf{Q})$ は $CL^{\infty}(\mathbf{Q})$ 上で SN^{ω} ではない.

(証明) t_0 を $t_0 = a(a(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}), t_0)$ なる無限項とする. 次の ω-書換えを考える.
$\underline{a(a(a(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}), t_0), \mathbf{Q})}$
$\to^{\epsilon}_{\mathcal{R}(\mathbf{Q})} a(t_0, a(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}))$
$= \underline{a(a(a(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}), t_0), t_1)}$ $\quad (t_1 = a(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}))$
$\to^{\epsilon}_{\mathcal{R}(\mathbf{Q})} a(t_0, a(\mathbf{Q}, t_1))$
$= \underline{a(a(a(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}), t_0), t_2)}$ $\quad (t_2 = a(\mathbf{Q}, t_1))$
$\to^{\epsilon}_{\mathcal{R}(\mathbf{Q})}$ $a(t_0, a(\mathbf{Q}, t_2))$
$= \underline{a(a(a(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}), t_0), t_3)}$ $\quad (t_3 = a(\mathbf{Q}, t_2))$
$\to^{\epsilon}_{\mathcal{R}(\mathbf{Q})} \cdots$. この ω-書換えは無限回の根書換えから成る. □

定義 26 $\mathcal{F}(\mathbf{Q}_1) = \{\mathbf{Q}_1, a\}$ とし, *TRS* $\mathcal{R}(\mathbf{Q}_1)$ を次のように定義する：
$\mathcal{R}(\mathbf{Q}_1) = \{a(a(a(\mathbf{Q}_1,\ x),\ y),\ z) \to a(x,\ a(z,\ y))\}$.

$|\, a(a(a(\mathbf{Q}_1, X), Y), Z) \,|>|\, a(X, a(Z, Y)) \,|$ $(X, Y, Z \in CL(\mathbf{Q}_1))$ より, TRS $\mathcal{R}(\mathbf{Q}_1)$ は $CL(\mathbf{Q}_1)$ 上で停止性を持つ. しかしながら, TRS $\mathcal{R}(\mathbf{Q}_1)$ は $CL^{\infty}(\mathbf{Q}_1)$ 上で SN^{ω} ではない.

定理 27 *TRS* $\mathcal{R}(\mathbf{Q}_1)$ は $CL^{\infty}(\mathbf{Q}_1)$ 上で SN^{ω} ではない.

(証明) t_0 を $t_0 = a(a(\mathbf{Q}_1, t_0), \mathbf{Q}_1)$ なる無限項とする. 次の ω-書換えを考える.
$\underline{a(a(a(\mathbf{Q}_1, t_0), \mathbf{Q}_1), \mathbf{Q}_1)}$
$\to^{\epsilon}_{\mathcal{R}(\mathbf{Q}_1)} a(t_0, a(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_1))$
$= \underline{a(a(a(\mathbf{Q}_1, t_0), \mathbf{Q}_1), t_1)}$ $\quad (t_1 = a(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_1))$
$\to^{\epsilon}_{\mathcal{R}(\mathbf{Q}_1)} a(t_0, a(t_1, \mathbf{Q}_1))$
$= \underline{a(a(a(\mathbf{Q}_1, t_0), \mathbf{Q}_1), t_2)}$ $\quad (t_2 = a(t_1, \mathbf{Q}_1))$
$\to^{\epsilon}_{\mathcal{R}(\mathbf{Q}_1)}$ $a(t_0, a(t_2, \mathbf{Q}_1))$
$= \underline{a(a(a(\mathbf{Q}_1, t_0), \mathbf{Q}_1), t_3)}$ $\quad (t_3 = a(t_2, \mathbf{Q}_1))$
$\to^{\epsilon}_{\mathcal{R}(\mathbf{Q}_1)} \cdots$. この ω-書換えは無限回の根書換えから成る. □

定義 28 $\mathcal{F}(\mathbf{Q}_3) = \{\mathbf{Q}_3, a\}$ とし, *TRS* $\mathcal{R}(\mathbf{Q}_3)$ を次のように定義する：
$\mathcal{R}(\mathbf{Q}_3) = \{a(a(a(\mathbf{Q}_3,\ x),\ y),\ z) \to a(z,\ a(x,\ y))\}$.

$|\, a(a(a(\mathbf{Q}_3, X), Y), Z) \,|>|\, a(Z, a(X, Y)) \,|$ $(X, Y, Z \in CL(\mathbf{Q}_3))$ より, TRS $\mathcal{R}(\mathbf{Q}_3)$ は $CL(\mathbf{Q}_3)$ 上で停止性を持つ. しかしながら, TRS $\mathcal{R}(\mathbf{Q}_3)$ は $CL^{\infty}(\mathbf{Q}_3)$ 上で SN^{ω} ではない.

定理 29 *TRS* $\mathcal{R}(\mathbf{Q}_3)$ は $CL^{\infty}(\mathbf{Q}_3)$ 上で SN^{ω} ではない.

(証明) t_0 を $t_0 = a(\mathbf{Q}_3, t_0)$ なる無限項とする. 次の ω-書換えを考える.
$\underline{a(a(a(\mathbf{Q}_3, t_0), t_0), a(t_0, t_0))} \to^{\epsilon}_{\mathcal{R}(\mathbf{Q}_3)} a(a(t_0,\ t_0),\ a(t_0,\ t_0)) = \underline{a(a(a(\mathbf{Q}_3, t_0), t_0), a(t_0, t_0))}$. この ω-書換えは無限回の根書換えから成る. □

定義 30 $\mathcal{F}(\mathbf{R}) = \{\mathbf{R}, a\}$ とし, *TRS* $\mathcal{R}(\mathbf{R})$ を次のように定義する：
$\mathcal{R}(\mathbf{R}) = \{a(a(a(\mathbf{R},\ x),\ y),\ z) \to a(a(y, z), x)\}$.

$|\, a(a(a(\mathbf{R}, X), Y), Z) \,|>|\, a(a(Y, Z), X) \,|$ $(X, Y, Z \in CL(\mathbf{R}))$ より, TRS $\mathcal{R}(\mathbf{R})$ は $CL(\mathbf{R})$ 上で停止性を持つ. しかしながら, TRS $\mathcal{R}(\mathbf{R})$ は $CL^{\infty}(\mathbf{R})$ 上で SN^{ω} ではない.

定理 31 *TRS* $\mathcal{R}(\mathbf{R})$ は $CL^{\infty}(\mathbf{R})$ 上で SN^{ω} ではない.

(証明) t_0 を $t_0 = a(\mathbf{R}, t_0)$ なる無限項とする. 次の ω-書換えを考える.
$\underline{a(a(a(\mathbf{R}, t_0), t_0), t_0)} \to^{\epsilon}_{\mathcal{R}(\mathbf{R})} a(\ a(\ t_0,\ t_0),\ t_0) = \underline{a(a(a(\mathbf{R}, t_0), t_0), t_0)}$. この ω-書換えは無限回の根書換えから成る. □

定義 32 $\mathcal{F}(\mathbf{T}) = \{\mathbf{T}, a\}$ とし, *TRS* $\mathcal{R}(\mathbf{T})$ を次のように定義する：
$\mathcal{R}(\mathbf{T}) = \{a(a(\mathbf{T},\ x),\ y) \to a(y,\ x)\}$.

$|\, a(a(\mathbf{T}, X), Y) \,|>|\, a(Y, X) \,|$ $(X, Y \in CL(\mathbf{T}))$ より, TRS $\mathcal{R}(\mathbf{T})$ は $CL(\mathbf{T})$ 上で停止性を持つ. しかしながら, TRS $\mathcal{R}(\mathbf{T})$ は $CL^{\infty}(\mathbf{T})$ 上で SN^{ω} ではない.

定理 33 *TRS* $\mathcal{R}(\mathbf{T})$ は $CL^{\infty}(\mathbf{T})$ 上で SN^{ω} ではない.

(証明) t_0 を $t_0 = a(\mathbf{T}, t_0)$ なる無限項とする. 次の ω-書換えを考える.
$\underline{a(a(\mathbf{T}, t_0), t_0)} \to^{\epsilon}_{\mathcal{R}(\mathbf{T})} a(t_0,\ t_0) = \underline{a(a(\mathbf{T}, t_0), t_0)}$. この ω-書換えは無限回の根書換えから成る. □

定義 34 $\mathcal{F}(\mathbf{V}) = \{\mathbf{V}, a\}$ とし, *TRS* $\mathcal{R}(\mathbf{V})$ を次のように定義する：
$\mathcal{R}(\mathbf{V}) = \{a(a(a(\mathbf{V},\ x),\ y),\ z) \to a(a(z,\ x),\ y)\}$.

$|\, a(a(a(\mathbf{V}, X), Y), Z) \,|>|\, a(a(Z, X), Y) \,|$ $(X, Y, Z \in CL(\mathbf{V}))$ より, TRS $\mathcal{R}(\mathbf{V})$ は $CL(\mathbf{V})$ 上で停止性を持つ. しかしながら, TRS $\mathcal{R}(\mathbf{V})$ は $CL^{\infty}(\mathbf{V})$ 上で SN^{ω} ではない.

定理 35 *TRS* $\mathcal{R}(\mathbf{V})$ は $CL^{\infty}(\mathbf{V})$ 上で SN^{ω} ではない.

(証明) t_0 を $t_0 = a(\mathbf{V}, t_0)$ なる無限項とする．次の ω-書換えを考える．

$\underline{a(a(a(\mathbf{V},t_0),t_0),t_0)} \to^{\epsilon}_{\mathcal{R}(\mathbf{V})} a(a(t_0, t_0), t_0) = \underline{a(\underline{a(\underline{a(\mathbf{V},t_0)},t_0)},t_0)}$. この ω-書換えは無限回の根書換えから成る． □

定義 36 $\mathcal{F}(\mathbf{C}^*) = \{\mathbf{C}^*, a\}$ とし，*TRS* $\mathcal{R}(\mathbf{C}^*)$ を次のように定義する：

$\mathcal{R}(\mathbf{C}^*) = \{a(a(a(a(\mathbf{C}^*, x), y), z), w) \to a(a(a(x, y), w), z)\}$.

$\mid a(a(a(a(\mathbf{C}^*, X), Y), Z), W) \mid > \mid a(a(a(X, Y), W), Z) \mid (X, Y, Z, W \in CL(\mathbf{C}^*))$ より，TRS $\mathcal{R}(\mathbf{C}^*)$ は $CL(\mathbf{C}^*)$ 上で停止性を持つ．しかしながら，TRS $\mathcal{R}(\mathbf{C}^*)$ は $CL^\infty(\mathbf{C}^*)$ 上で SN^ω ではない．

定理 37 *TRS* $\mathcal{R}(\mathbf{C}^*)$ は $CL^\infty(\mathbf{C}^*)$ 上で SN^ω ではない．

(証明) t_0 を $t_0 = a(\mathbf{C}^*, t_0)$ なる無限項とする．次の ω-書換えを考える．

$\underline{a(a(a(a(\mathbf{C}^*,t_0),\mathbf{C}^*),\mathbf{C}^*),\mathbf{C}^*)}$
$\to^{\epsilon}_{\mathcal{R}(\mathbf{C}^*)} \underline{a(a(a(t_0,\mathbf{C}^*),\mathbf{C}^*),\mathbf{C}^*)}$
$= \underline{a(a(a(a(\mathbf{C}^*,t_0),\mathbf{C}^*),\mathbf{C}^*),\mathbf{C}^*)}$. この ω-書換えは無限回の根書換えから成る． □

定義 38 $\mathcal{F}(\mathbf{C}^{**}) = \{\mathbf{C}^{**}, a\}$ とし，*TRS* $\mathcal{R}(\mathbf{C}^{**})$ を次のように定義する：

$\mathcal{R}(\mathbf{C}^{**}) = \{a(a(a(a(a(\mathbf{C}^{**}, x), y), z), w), v) \to a(a(a(a(x, y), z), v), w)\}$.

$\mid a(a(a(a(a(\mathbf{C}^{**}, X), Y), Z), W), V) \mid > \mid a(a(a(a(X, Y), Z), V), W) \mid (X, Y, Z, W, V \in CL(\mathbf{C}^{**}))$ より，TRS $\mathcal{R}(\mathbf{C}^{**})$ は $CL(\mathbf{C}^{**})$ 上で停止性を持つ．しかしながら，TRS $\mathcal{R}(\mathbf{C}^{**})$ は $CL^\infty(\mathbf{C}^{**})$ 上で SN^ω ではない．

定理 39 *TRS* $\mathcal{R}(\mathbf{C}^{**})$ は $CL^\infty(\mathbf{C}^{**})$ 上で SN^ω ではない．

(証明) t_0 を $t_0 = a(\mathbf{C}^{**}, t_0)$ となる無限項とする．次の ω-書換えを考える．

$\underline{a(a(a(a(a(\mathbf{C}^{**},t_0),\mathbf{C}^{**}),\mathbf{C}^{**}),\mathbf{C}^{**}),\mathbf{C}^{**})}$
$\to^{\epsilon}_{\mathcal{R}(\mathbf{C}^{**})} \underline{a(a(a(a(t_0,\mathbf{C}^{**}),\mathbf{C}^{**}),\mathbf{C}^{**}),\mathbf{C}^{**})}$
$= \underline{a(a(a(a(a(\mathbf{C}^{**},t_0),\mathbf{C}^{**}),\mathbf{C}^{**}),\mathbf{C}^{**}),\mathbf{C}^{**})}$. この ω-書換えは無限回の根書換えから成る． □

定理 5 から本稿で扱う組合せ子 Δ に対する TRS $\mathcal{R}(\Delta)$ において SN^∞ と SN^ω は同値である．したがって，定理 8, 10, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39 から次の系が得られる．

系 40 $\Delta \in \{\mathbf{L}, \mathbf{J}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{Q}, \mathbf{Q_1}, \mathbf{Q_3}, \mathbf{R}, \mathbf{T}, \mathbf{V}, \mathbf{C}^*, \mathbf{C}^{**}\}$ とする．このとき，*TRS* $\mathcal{R}(\Delta)$ は $CL^\infty(\Delta)$ 上で SN^∞ ではない．

4. 無限項上の行列解釈

本節における無限項上の行列解釈の定義は文献 [18] に準ずる．

シグネチャ $\mathcal{F}$ 上の非収縮 TRS $\mathcal{R}$ に対して，$\mathcal{F}$ を次のように $\mathcal{F}_\#$ へ拡張する．$\mathcal{R}$ に属する書換え規則の左辺又は右辺の根記号として出現するすべての関数記号 $f \in \mathcal{F}$ に対して，新しい記号 $f_\#$ を付け加える．このような f に対して，$\mathbf{ar}(f_\#) = \mathbf{ar}(f)$ とする．$\mathcal{F}$ 上の変数でない項 $t = f(t_1, \cdots, t_n)$ に対して，$t_\# = f_\#(t_1, \cdots, t_n)$ とする．このとき，$\mathcal{R}_\# = \{l_\# \to r_\# \mid l \to r \in \mathcal{R}\}$ と定義する．したがって，$\mathcal{R}_\#$ は書換え規則の左辺と右辺のすべての根記号を $\#$ 記号で印付けすることにより $\mathcal{R}$ から得られる．

次元 d を固定し，$A = N^d$ とする (N は自然数全体の集合である)．A 上の関係 $\gtrsim$ を次のようにする: $(v_1, \cdots, v_d) \gtrsim (u_1, \cdots, u_d) \Leftrightarrow v_i \geq u_i$ $(i = 1, 2, \cdots, d)$. $A_\# = N$ とする．このとき，N は自然数上の通常の順序 $>$ を持つ．記号 $f \in \mathcal{F}$ ($\mathbf{ar}(f) = n (\geq 0)$) の解釈 $[f]$ として，n 個の N 上の行列 $F_1, F_2, \cdots, F_n$ を選ぶ．これらはそれぞれ $d \times d$ 行列である．すべての $\mathbf{v_1}, \cdots, \mathbf{v_n} \in A$ に対して，$[f]$ を次のように定義する: $[f](\mathbf{v_1}, \cdots, \mathbf{v_n}) = F_1\mathbf{v_1} + \cdots + F_n\mathbf{v_n} + \mathbf{f}$ ($\mathbf{f} \in N^d$). 関数記号 f ($\mathbf{ar}(f) = n (\geq 0)$) に対応する印付き記号 $f_\#$ の解釈 $[f_\#]$ を次のように定義する: n 個の N 上のサイズ d の行ベクトル $\mathbf{f_1}, \cdots, \mathbf{f_n}$ と定数 $c_f \in N$ に対して，$[f_\#](\mathbf{v_1}, \cdots, \mathbf{v_n}) = \mathbf{f_1}\mathbf{v_1} + \cdots + \mathbf{f_n}\mathbf{v_n} + c_f$. ここで，$\mathbf{f_i}\mathbf{v_i}$ $(i = 1, \cdots, n)$ は内積を表す．正方行列 F が $i \geq j$ を満たす i, j に対して，ij 成分 $F_{ij} = 0$ であるとき，真上三角行列と呼ぶ，すなわち，対角線上とその下のすべての成分が 0 である．

定理 41 *([18])* $\mathcal{R}$ を有限シグネチャ $\mathcal{F}$ 上の非収縮 *TRS* とし，上で定義された解釈は次の条件を満たすとする：

- すべての行列 F_i は真上三角行列である $(i = 1, \cdots, n)$,
- すべての書換え規則 $l \to r \in \mathcal{R}_\#$ とすべての割り当て $\alpha : \mathcal{V} \to A$ に対して，$[l, \alpha] > [r, \alpha]$, かつ
- すべての書換え規則 $l \to r \in \mathcal{R}$ とすべての割り当て $\alpha : \mathcal{V} \to A$ に対して，$[l, \alpha] \gtrsim [r, \alpha]$.

このとき，$\mathcal{R}$ は SN^∞ である．

定義 42 $\mathcal{F}(\mathbf{U}) = \{\mathbf{U}, a\}$ とし，*TRS* $\mathcal{R}(\mathbf{U})$ を次のように定義する：

$\mathcal{R}(\mathbf{U}) = \{a(a(\mathbf{U}, x), y) \to a(y, a(a(x, x), y))\}$.

定理 43 *TRS* $\mathcal{R}(\mathbf{U})$ は $CL^\infty(\mathbf{U})$ 上で SN^∞ である．

(証明) 定理 41 を用いて $\mathcal{R}(\mathbf{U})$ が SN^∞ であることを示す．Zantema は定理 41 による組合せ子 δ (**O**[12], **SI**[1]) の SN^∞ の証明のために割り当てと解釈を与えている [18]．組合せ子 $\mathbf{U}$ の SN^∞ の証明にも同様の割り当てと解釈を使用する．

$d = 2$, $[\mathbf{U}] = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $[a](\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{y}$ かつ $[a_\#](\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot$

$\mathbf{y}$ とする．$\alpha(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ かつ $\alpha(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ に対して，$[a(a(\mathbf{U}, x), y), \alpha] = \begin{pmatrix} y_2 \\ 0 \end{pmatrix} = [a(y, a(a(x, x), y)), \alpha]$ かつ $[a_\sharp(a(\mathbf{U}, x), y), \alpha] = 1 + x_2 + y_1 + y_2 > y_1 + y_2 = [a_\sharp(y, a(a(x, x), y)), \alpha]$ が成立する．したがって，$\mathcal{R}(\mathbf{U})$ は SN^∞ である． □

次に TRS $\mathcal{R}(\mathbf{U})$ の書換え規則の右辺を一般化した次のような TRS を考える．

定義 44 *([7])* $\mathcal{F}(\mathbf{U}^n) = \{\mathbf{U}^n, a\}$ とし，*TRS* $\mathcal{R}(\mathbf{U}^n)$ を次のように定義する：

$$\mathcal{R}(\mathbf{U}^n) = \{a(a(\mathbf{U}^n, x), y) \rightarrow a(y, a(a(\cdots a(\overbrace{x, x), \cdots, x}^{n+1}), y))\} \ (n \geq 0).$$

このとき，$\mathbf{U}^0 = \delta[18]\ (\mathbf{O}[12], \mathbf{SI}[1])$ かつ $\mathbf{U}^1 = \mathbf{U}[12](\mathbf{A}[1])$ である．

以下では，TRS $\mathcal{R}(\mathbf{U}^n)$ $(n \geq 0)$ の SN^∞ 性を示すために，定理 43 と同様の割り当てと解釈を使用する．ただし，$[\mathbf{U}^n] = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする．

補題 45 $[a]([a](\cdots[a](\overbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}), \cdots, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}), \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}^{m}) = \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(m \geq 3)$.

(証明) m に関する帰納法により示すことができる． □

補題 46 $[a(y, a(a(\cdots a(\overbrace{x, x), \cdots, x}^{n+1}), y)), \alpha] = \begin{pmatrix} y_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(n \geq 0)$.

(証明) $n = 0$ のとき，$[a(y, a(x, y)), \alpha] = \begin{pmatrix} y_2 \\ 0 \end{pmatrix}$．$n = 1$ のとき，$[a(y, a(a(x, x), y)), \alpha] = \begin{pmatrix} y_2 \\ 0 \end{pmatrix}$．

次に $n \geq 2$ の場合，すなわち $n + 1 \geq 3$ を考える．

$$\begin{aligned}
&[a(y, a(a(\cdots a(\overbrace{x, x), \cdots, x}^{n+1}), y)), \alpha] \\
&= [a](\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, [a]([a](\cdots[a](\overbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}), \cdots, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}^{n+1}), \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix})) \\
&= [a](\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, [a](\begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}))\text{(補題 45 より)} \\
&= \begin{pmatrix} y_2 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$
□

補題 47 $[a_\sharp(a(\mathbf{U}^n, x), y), \alpha] > [a_\sharp\ (y, a(a(\cdots a(\overbrace{x, x), \cdots, x}^{n+1}), y)), \alpha]$ $(n \geq 0)$.

(証明) n による場合分けにより示す．

$n = 0$ のとき，$[a_\sharp(a(\mathbf{U}^n, x), y), \alpha] = 1 + x_2 + y_1 + y_2 > y_1 + x_2 + y_2 = [a_\sharp(y, a(x, y)), \alpha]$ が成立する．

$n = 1$ のとき，$[a_\sharp(y, a(a(x, x), y)), \alpha] = y_1 + y_2$.

$n \geq 2$ のとき，

$$\begin{aligned}
&[a_\sharp(y, a(a(\cdots a(\overbrace{x, x), \cdots, x}^{n+1}), y)), \alpha] \\
&= [a_\sharp](\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, [a]([a](\cdots[a](\overbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}), \cdots, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}^{n+1}), \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix})) \\
&= [a_\sharp](\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, [a](\begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}))\text{(補題 45 より)} \\
&= y_1 + y_2.
\end{aligned}$$
□

定理 48 *TRS* $\mathcal{R}(\mathbf{U}^n)$ $(n \geq 0)$ は $CL^\infty(\mathbf{U}^n)$ 上で SN^∞ である．

(証明) 補題 46 から次の等式が成り立つ．

$$[a(a(\mathbf{U}^n, x), y), \alpha] = \begin{pmatrix} y_2 \\ 0 \end{pmatrix} = [a(y, a(a(\cdots a(\overbrace{x, x), \cdots, x}^{n+1}), y)), \alpha] \ (n \geq 0).$$

補題 47 から次の不等式が成り立つ．

$$[a_\sharp(a(\mathbf{U}^n, x), y), \alpha] > [a_\sharp(y, a(a(\cdots a(\overbrace{x, x), \cdots, x}^{n+1}), y)), \alpha] \ (n \geq 0).$$

したがって，定理 41 から $\mathcal{R}(\mathbf{U}^n)$ は $CL^\infty(\mathbf{U}^n)$ 上で SN^∞ である $(n \geq 0)$． □

5. むすび

本稿では，様々な組合せ子の強収束性について述べた．最初に組合せ子 $\Delta \in \{\mathbf{L}, \mathbf{J}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{Q}, \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_3, \mathbf{R}, \mathbf{T}, \mathbf{V}, \mathbf{C}^*, \mathbf{C}^{**}\}$ に対して，組合せ子 Δ が持つ 1 つの書換え規則だけから成る項書換えシステム $\mathcal{R}(\Delta)$ は無限 Δ-項上で強収束ではないことを示した．

次に Turing の不動点組合せ子 $\mathbf{U}$ が持つ 1 つの書換え規則だけから成る項書換えシステム $\mathcal{R}(\mathbf{U})$ は無限 $\mathbf{U}$-項上で強収束性を持つことを Zantema と同様の手法により示した．さらに組合せ子 $\mathbf{U}^n$ を提案し，組合せ子 $\mathbf{U}^n$ が持つ 1 つの書換え規則だけから成る項書換えシステム $\mathcal{R}(\mathbf{U}^n)$ は無限 $\mathbf{U}^n$-項上で強収束性を持つことを示した．

Zantema により，組合せ子 $\mathbf{S}$ が強収束性を持たないことと組合せ子 $\mathbf{Y}$ と $\mathbf{O}$ の強収束性が示されているが，それ以外の組合せ子の強収束性に関する研究は行われていない．本稿で使用した組合せ子と得られた結果を表 **1** にまとめる．

今後の課題は関数型プログラミング言語の効率的な実装のために Turner らにより導入された組合せ子の強収束性を調べることと行列解釈以外で自動的に強収束性を証明する方法を提案することである．

謝辞

本研究の一部は科研費 21700017 の助成を受けたものである．

参考文献

[1] H. P. Barendregt, "The Lambda Calculus, Its Syntax and Semantics," 2nd revised edition, North-Holland, 1984.

[2] J. Bergstra and J. W. Klop, "Church-Rosser strategies in the lambda calculus," Theoretical Computer Science, 9, pp.27–38, 1979.

[3] H. B. Curry and R. Feys, "Combinatory Logic," Vol.1, North-Holland, 1958.

[4] J. Endrullis, J. Waldmann and H. Zantema, "Matrix interpretations for proving termination of term rewriting," J. Automated Reasoning, 40, pp. 195–220, 2008.

[5] J. R. Hindley and J. P. Seldin, "Introduction to Combinators and λ-calculus," Cambridge University Press, 1986.

[6] M. Iwami, "Acyclic and related properties of combinators," IPSJ Transaction of Programming, 2, pp.97–104, 2009 (in Japanese).

[7] M. Iwami, "Acyclic and related properties of fixed point combinators," RIMS Kokyuroku, to appear (in Japanese).

[8] R. Kennaway, J. W. Klop, M. R. Sleep and F. - J. de Vries, "Transfinite reductions in orthogonal term rewriting systems," Information and Computation, 119, pp.18–38, 1995.

[9] J. W. Klop and R. C. de Vrijer, "Infinitary normalization," In: We Will Show Them! Essays in Honour of D. Gabbay, vol. 2, pp. 169–192, College Publications, 2005.

[10] D. Probst and T. Studer, "How to normalize the Jay," Theoretical Computer Science, 254, pp.677–681, 2001.

[11] P. Schroeder-Heister and K. Dŏsen, "Substructural Logics," Oxford University Press, 1993.

[12] R. Smullyan, "To Mock a Mockingbird," Knopf, New York, 1985.

[13] M. Sprenger and M. Wymann-Böni, "How to decide the lark," Theoretical Computer Science, 110, pp.419–432, 1993.

[14] R. Statman, "The word problem for Smullyan's lark combinator is decidable," J. Symbolic Computation, 7, pp.103–112, 1989.

[15] Terese, "Term Rewriting Systems," Cambridge University Press, 2003.

[16] D. A. Turner, "A new implementation technique for applicative languages," Software-Practice and Experience, 9, pp.31–49, 1979.

[17] J. Waldmann, "The combinator S," Information and Computation, 159, pp.2–21, 2000.

[18] H. Zantema, "Normalization of infinite terms," Proc. of 19th International Conf. of Rewriting Techniques and Application, LNCS, 5117, pp.441–455, 2008.