

固有空間 BPLP 法における固有空間の最適次元について On The Optimal Number of Eigenvectors in Eigenspace-BPLP

赤平 浩規†
Hiroki Akahira

田中 章†
Akira Tanaka

宮腰 政明†
Masaaki Miyakoshi

1. まえがき

欠損部分を有する画像から欠損部分の真値を推定する手法として、固有空間 BPLP 法という手法が提案されている [1][2]. この手法は、所与のデータをブロック分割して得られた一連のデータの主成分構造を利用して画像を復元する手法である。

本論文では、主成分構造を利用して得られた固有空間の最適次元について考察し、最適次元により構成された固有空間 BPLP 法による復元が、古典的なウィーナーフィルタと同値であることを示す。

2. 固有空間 BPLP 法 [1][2]

所与の多次元実数値データから d 次元のブロックを切り出して得られたデータのうち、欠損領域を含むデータを \tilde{x}_j とする。また、欠損領域は真値が 0 に置き換わっている領域と定義する。 \tilde{x}_j に対して、非欠損要素に対応する場所が 1、欠損要素に対応する場所が 0 であるような d 次対角行列 M_j を定義すると、 \tilde{x}_j は、欠損前の未知のデータ x_j を用いて、

$$\tilde{x}_j = M_j x_j \quad (1)$$

と書くことができる。式 (1) の逆問題はそのままの形では効果的に解くことができないため、固有空間 BPLP 法では非欠損領域のデータに関して主成分分析を行い、得られた主成分構造を利用している。具体的には、主成分分析により得られた固有ベクトルを、対応する固有値の大きい順に並べた行列を E とし、ある累積寄与率を超える固有ベクトルの本数を r とし、 E を $E = [E_p E_n]$ ($E_p \in \mathbf{R}^{d \times r}$, $E_n \in \mathbf{R}^{d \times (d-r)}$) と分割し、式 (1) を、

$$\tilde{x}_j = (M_j E_p) p_j + M_j E_n E_n' x_j \quad (2)$$

と捉え直した上で p_j を推定している。ただし、 p_j は、 $p_j = E_p' x_j$ を満たす係数ベクトル、 $'$ は転置を表すものとする。

式 (2) のモデルに対する最も古典的な推定値は、最小二乗ノルム最小解に基づくものであり、 p_j の推定値は、

$$\hat{p}_j = (E_p' M_j E_p)^+ E_p' \tilde{x}_j \quad (3)$$

†北海道大学大学院情報科学研究科，札幌市

によって与えられる。ただし、 $+$ はムーアペンローズ一般逆行列を表すものとする。これより x_j の推定値は、

$$\hat{x}_j = E_p (E_p' M_j E_p)^+ E_p' \tilde{x}_j \quad (4)$$

によって与えられる。天野らが提案した手法 [1] は、この手法と同値であることが文献 [2] で示されている。

一方、田中らは、モデル式 (2) における p_j および加法的雑音項 $n_j = M_j E_n E_n' x_j$ を実現値として発生させた確率変数ベクトル p および n が無相関であることを導き、パラメトリックウィーナーフィルタにより係数ベクトルを推定する手法を提案している [2]. この手法による x_j の具体的な推定値は、

$$\hat{x}_j = E_p \hat{R}_p E_p' M_j (M_j E_p \hat{R}_p E_p' M_j + \gamma \hat{R}_n)^+ \tilde{x}_j \quad (5)$$

によって与えられる。ただし、 \hat{R}_p , \hat{R}_n はそれぞれ、非欠損領域より算出した p , n の相関行列の近似値であり、 γ は正のパラメータとする。

3. 固有空間の最適次元

固有空間 BPLP 法における固有空間の次元に関して、 $r = d$ のとき、固有空間 BPLP 法は古典的なウィーナーフィルタ [3] と同値となる。実際、式 (5) に $r = d$ を代入すると、

$$\hat{x}_j = \hat{R}_x M_j (M_j \hat{R}_x M_j)^+ \tilde{x}_j \quad (6)$$

となる。ただし、 \hat{R}_x は \hat{x} の相関行列の近似値である。

一方、固有空間 BPLP 法による推定値 \hat{x}_j^{BPLP} と真値との二乗誤差の期待値と、古典的なウィーナーフィルタによる推定値 \hat{x}_j^{WF} と真値との二乗誤差の期待値について以下の定理が成り立つ。

定理 1.

$$E_j \| x_j - \hat{x}_j^{BPLP} \|^2 \geq E_j \| x_j - \hat{x}_j^{WF} \|^2 .$$

(証明は付録を参照)

ただし、 $\|\cdot\|$ はユークリッドノルムを表すものとする。

以上より、固有空間 BPLP 法における固有空間の最適次元は $r = d$ のときであり、またそのとき、固有空間 BPLP 法と古典的なウィーナーフィルタは一致することがわかる。



図 1: 観測画像



図 2: 固有空間 BPLP 法



図 3: ウィーナーフィルタ

4. 数値実験

数値実験を通し、固有空間 BPLP 法および古典的なウィーナーフィルタによる推定精度を確認する。実験画像は 256×256 画素 256 階調の自然画像とし、ブロックサイズは 16×16、ステップサイズは 4 とした。比較手法は文献 [2] の手法とし、式 (5) において $\gamma = 1$, E を E_p と E_n に分割する際の累積寄与率は 0.99 とし実験を行った。実験画像、固有空間 BPLP 法による復元画像、ウィーナーフィルタによる復元画像を順に図 1~図 3 に、原画像と復元画像の平均二乗誤差 (MSE) を表 1 に示す。ただし、視認し易さのため、実験画像の欠損画素の画素値は 255 としている。

表 1: 復元画像の MSE

	BPLP[2]	Wiener
airplane	36.0	29.4
bridge	36.6	28.3
building	15.3	13.1
lenna	20.5	15.2

以上の結果より、固有空間 BPLP 法よりも古典的なウィーナーフィルタの推定精度の方が高いことが数値的にも確認された。

5. むすび

本論文では、固有空間 BPLP 法において、固有空間が最適次元のときに古典的なウィーナーフィルタと同値であることを示し、数値実験により固有空間 BPLP 法よりもウィーナーフィルタの推定精度の方が高いことを確認した。

参考文献

[1] 天野敏之, 佐藤幸男, “固有空間法を用いた BPLP による画像補間,” 信学論 (D-II), vol.J85-D-II, no.3,

pp.457-465, March 2002.

[2] 田中 章, 宮腰政明, “線形推定理論に基づく固有空間 BPLP 法の改善,” 信学論 (D), vol.J90-D, no.10, pp.2840-2847, Oct. 2007.
 [3] (監修) 高木幹雄, 下田陽久, “新画像解析ハンドブック,” 東京大学出版会, 2004.

付 録

定理 1 の証明

固有空間 BPLP 法 [2] による \mathbf{x}_j の推定値を $\hat{\mathbf{x}}_{BPLP}$, ウィーナーフィルタによる \mathbf{x}_j の推定値を $\hat{\mathbf{x}}_{WF}$, $P = E_p E_p'$ とすると式 (4), (5) から,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_j^{WF} &= \hat{R}_x M_j (M_j \hat{R}_x M_j)^+ M_j \mathbf{x}_j \text{ より,} \\ J_0 &= E_j \|\mathbf{x}_j - \hat{\mathbf{x}}_j^{WF}\|^2 \\ &= \text{tr}(\hat{R}_x - \hat{R}_x M_j (M_j \hat{R}_x M_j)^+ M_j \hat{R}_x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_j^{BPLP} &= P \hat{R}_x P M_j (M_j \hat{R}_x M_j)^+ M_j \mathbf{x}_j \text{ より,} \\ J_1 &= E_j \|\mathbf{x}_j - \hat{\mathbf{x}}_j^{BPLP}\|^2 \\ &= \text{tr}(\hat{R}_x - P \hat{R}_x P M_j (M_j \hat{R}_x M_j)^+ M_j \hat{R}_x \\ &\quad - \hat{R}_x M_j (M_j \hat{R}_x M_j)^+ M_j P \hat{R}_x P \\ &\quad + P \hat{R}_x P M_j (M_j \hat{R}_x M_j)^+ M_j P \hat{R}_x P) \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} J_1 - J_0 &= \text{tr}(\hat{R}_x M_j (M_j \hat{R}_x M_j)^+ M_j \hat{R}_x \\ &\quad - P \hat{R}_x P M_j (M_j \hat{R}_x M_j)^+ M_j \hat{R}_x \\ &\quad - \hat{R}_x M_j (M_j \hat{R}_x M_j)^+ M_j P \hat{R}_x P \\ &\quad + P \hat{R}_x P M_j (M_j \hat{R}_x M_j)^+ M_j P \hat{R}_x P) \\ &= \text{tr}[(\hat{R}_x - P \hat{R}_x P) M_j (M_j \hat{R}_x M_j)^+ M_j \\ &\quad \times (\hat{R}_x - P \hat{R}_x P)'] \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

□