

多面体による三辺形パッチ曲面の生成法†

栗 山 繁††

曲面を設計する際に、比較的記述の容易な多面体によって形状の大雑把な構造を与えて自由曲面を生成することにより、簡略かつ直観的な形状入力を実現できる。我々は自動的に三角形分割された多面体の各辺に沿った空間曲線網を生成して、三辺形パッチによる補間法を用いることにより曲面を生成する手法を提案する。本論文では、まず多面体の辺と、多辺形領域を三角形分割するため付加される辺に沿う、張力変数を含む擬似ノルムを最小化する3次曲線網を生成する手法について述べる。次に、4次の三辺形パッチを拡張したモデルによってその3次曲線網を補間し、パッチ境界において接平面の連続な曲面を生成する手法について述べる。

1. ま え が き

工学分野においてコンピュータによる幾何設計(Computer Aided Geometric Design)の技術が盛んに利用されている。最近では機械の本体、家電製品、建築などにおいて意匠設計の高度化の要求が起り、自由曲面の形状入力法が重要な技術的課題となってきた。現在多く用いられている自由曲面モデルは、3次元座標空間上の制御点をスプライン関数などの基底関数のテンソル積で近似、補間することによって定義されるが、これは対象となる物体が車体などのように、曲面形状が主に矩形領域から構成される場合が多かったことに起因している。しかしながら、このような曲面モデルは制御点を2次元格子状に配置するという制約があり、閉曲面を構成するときに制御点の集中する部分が生じたり、別々な制御点群で定義された曲面間を自由に融合させることが困難であるなどの問題点があり、複雑な形状や位相をもつ曲面の入力を困難なものにしている。本論文では、格子状に配置された制御点の代わりに多面体によっておおまかな形状を定義し、三辺形パッチによる曲面モデルを用いて多面体の頂点を含む曲面を生成する手法について述べ、これにより既存の曲面モデルの問題点が解決され、意匠設計における自由曲面の形状入力により簡略に行われることを示す。

多面体より曲面を生成する手法として、以下のものが提案されている。

(a) 多面体の頂点の座標値を基に、B-スプライン曲面モデルから導かれる再帰的計算を行い曲面上の

点を計算する¹⁾⁻³⁾。

(b) 多面体の各多辺形領域に対し、多辺形パッチを用いて曲面を生成する^{4),5)}。

(a)の手法は、曲面が再帰的に計算される点の集合として定義されるため、一般に用いられるパラメトリックな曲面式としての表現ができない。また生成される曲面は、等間隔節点のB-スプライン曲面のみしか扱えないので、局所的にスプライン基底を変えて形状の部分的な修正を行うのにも適していない。(b)の手法は、多辺形パッチの次数が辺の数と共に増えるので、形状の制御やパッチ間を滑らかに接続するときの制約条件が複雑なものとなる。

以上の理由により、本研究では多面体の各多辺形領域を複数の三角形に分割し、それぞれの三角形に一つの三辺形パッチを割り当てて曲面を構成する。

三辺形パッチによる曲面生成法として、以下のものが提案されている。

(c) 有理多項式で表される三辺形パッチを用いる^{6),7)}。

(d) 有理項を含まない三辺形パッチを用い、Clough-Tocher split と呼ばれる、三辺形パッチの3分割法を適用する⁸⁾⁻¹²⁾。

(c)の手法は曲面の次数が高く、曲面を陰影表示(レンダリング)するときや曲面間の演算(交線計算など)を行うときの計算量が多くなってしまふ。(d)の手法は三辺形パッチの次数を低くすることができるが、各三辺形パッチを3分割するので与えられる三角形の個数の3倍の数のパッチが生成され、各パッチの形状も細長くなってしまふという問題点が指摘される。また、これらの手法で曲面を生成するためには、三角形の頂点の座標値のほか、頂点を共有する各辺に沿った接線ベクトルの値も必要となるが、いずれの手法もこの値を決定する方法については言及していな

† Triangular Patch Generation by Polyhedron by SHIGERU KURIYAMA (IBM Research, Tokyo Research Laboratory—TSC Graphics Systems).

†† 日本 IBM(株)東京基礎研究所—東京サイエンティフィックセンターグラフィックスシステム

い。

本研究では以上に述べた問題点を考慮して、以下の手順により曲面を生成する。

(1) 多面体の各辺に沿った3次曲線網を想定し、この曲線を決定する接線ベクトルを各頂点における二つの接平面ベクトルの線形和によって表し、3次曲線の張力変数を含む擬似ノルムの和を最小化するように、接平面ベクトルの値を求める。

(2) 多面体の各多辺形領域に対して一点を加え、その点と多辺形の各頂点とを結ぶ3次曲線網を想定し、(1)と同様に擬似ノルムの和を最小化するように、加えた点の座標値とその点での接平面ベクトルの値を求める。

(3) 4次の三辺形パッチの定義を拡張し、(1)、(2)で求めた値により定義される3次曲線網を補間して、幾何学的連続性の条件を満足するようなパッチの制御点を求める。

以下2章では(1)、(2)の手順について述べ、3章では(3)の手順について述べる。4章では本研究の手法による曲面の生成例について述べる。

2. 擬似ノルムの最小化による曲線網の生成

2.1 多面体の辺に沿う曲線網の生成

曲面を構成する三辺形パッチ間の境界曲線に相当する3次曲線網の生成法を以下に述べる。まず最初に、多面体の各頂点 P を共有する n 本の辺の中で周回順 i 番目のもの(以後、 e_i で表す)に関して P と対向する頂点を \bar{P}_i とし、それらの点において e_i に沿う接線ベクトルを T_i, \bar{T}_i とすると、辺に沿った3次曲線 $C_i(s)$ はバーンスタイン多項式 $B_k^i(s)$ を用いて、以下のように定義される(図1参照)。

$$C_i(s) = \sum_{k=0}^3 V_k B_k^i(s),$$

$$B_k^i(s) = \frac{n!}{k!(n-k)!} s^k (1-s)^{n-k}, \quad (1)$$

$$V_0 = P, \quad V_1 = P + T_i, \quad V_2 = \bar{P}_i + \bar{T}_i,$$

$$V_3 = \bar{P}_i.$$

ここで、頂点 P における接線ベクトル T_i ($i=1, \dots, n$) が同一接平面上に存在するように、これらの値を接平面を表す平行でない二つのベクトル T^a, T^c の線形和として以下のように設定する。(以後、本論文に現れる数学記号において、スカラー値を小文字で、3次元ベクトル値を大文字で表すことにする。)

$$T_i = T^a \sin \theta_i + T^c \cos \theta_i, \quad (2)$$

$$\theta_i = 2\pi(i-1)/n, \quad (i=1, \dots, n).$$

ただし、その頂点が開曲面の開いた境界上にある場合は、式(2)の接線ベクトル T_i, \bar{T}_i が開いた境界となる辺に沿って $T_i = -\bar{T}_i = T^c$ となるように $\theta_i = \pi(i-1)/(n-1)$ とおく。以上の設定により、多面体の辺に沿う曲線網は各頂点における接平面ベクトルの値により決定される。

3次の自然スプライン曲線は、連続する曲線群の擬似ノルム(曲線の媒介変数に関する2次導関数を二乗積分したもの)の総和を最小化する性質をもつが¹³⁾、これを利用して曲線網(Minimum Norm Network)を生成する手法が提案された¹⁴⁾。ここでは、曲線網から生成される曲面の形状を対話的に制御できるように、2種類の張力変数を含む拡張された擬似ノルム^{15), 16)}の総和を表す関数 $\sigma(C)$ を以下のように定義する。

$$\sigma(C) = \sum_{P^v \in V} \sum_{e_i^v \in E_{P^v}} \left\{ \frac{\beta_i^v}{2} \int_0^1 \ddot{C}_i(s)^2 ds + \alpha^v \dot{C}_i(0)^2 \right\},$$

$$\ddot{C}_i(s) = \frac{\partial^2 C_i(s)}{\partial s^2}, \quad \dot{C}_i(s) = \frac{\partial C_i(s)}{\partial s}, \quad C_i(0) = P^v. \quad (3)$$

ただし、 V を多面体の頂点の集合、 E_{P^v} を頂点 P^v (ただし、 v は頂点番号を表す)を含む辺の集合とする。また α^v, β_i^v を、多面体の各頂点 $P^v \in V$ および各辺 $e_i^v \in E_{P^v}$ に対する張力変数を表すものとする。 α^v の値を増やすと、接線ベクトル T_i の長さを縮め、頂点 P^v において曲線に張りを加えたような効果をもたらす。また、 β_i^v の値を増やすと、曲線の両端点における接線ベクトル $T_i, -\bar{T}_i$ がベクトル $(\bar{P}_i - P^v)$ の方向に近づき、辺 e_i に沿って曲線に張りを加えたような効果をもたらす。すべての張力変数の値が $\alpha^v=0, \beta_i^v=1$ のとき、式(3)で表される関数は3次の自然スプライン曲線の定義で用いられる擬似ノルムの総和を表す(以後、表記の煩雑化を避けるために頂点番号 v を省略する)。

式(1)の $C_i(s)$ を式(3)に代入すると $\sigma(C)$ の値は、

$$\ddot{C}_i(s) = \sum_{k=0}^1 (V_{k+2} - 2V_{k+1} + V_k) B_k^i(s)$$

$$= (\bar{P}_i - P + \bar{T}_i - 2T_i) B_0^i(s) \quad (4)$$

$$+ (P - \bar{P}_i + T_i - 2\bar{T}_i) B_1^i(s),$$

$$\dot{C}_i(0) = V_1 - V_0 = T_i,$$

の関係を用いて計算される。ただし、 T_i は頂点 P における接平面ベクトル T^a, T^c によって式(2)のように設定され、同様に \bar{T}_i は点 \bar{P}_i における接平面

ベクトル \bar{T}_i, \bar{T}_i' の線形和として $\bar{T}_i = \bar{T}_i' \sin \theta_i + \bar{T}_i'' \cos \theta_i$ のように設定される (このとき, i は \bar{P}_i から見た場合の e_i の周回順とする). ここで $\sigma(C)$ を最小化する接平面ベクトルの値を求めるために, T^s, T^c に関する $\sigma(C)$ の変分をゼロとおくと以下のような式が導かれる (付録1 参照).

$$\begin{aligned} & \sum_{e_i \in E_P} k_i \{ 2(\beta_i + \alpha)(\sin \theta_i T^s + \cos \theta_i T^c) \\ & \quad - \beta_i(\sin \theta_i \bar{T}_i' + \cos \theta_i \bar{T}_i'') \} \\ & = \sum_{e_i \in E_P} k_i \beta_i (\bar{P}_i - P), \end{aligned} \quad (5)$$

$$k_i = \begin{cases} \sin \theta_i & \text{for } \frac{\partial \sigma(C)}{\partial T^s} = 0 \\ \cos \theta_i & \text{for } \frac{\partial \sigma(C)}{\partial T^c} = 0 \end{cases}$$

式(5)は多面体のすべての頂点 $P \in V$ に対して導かれるので, 頂点の総数 v 個に対し, 各3次元座標軸に関して $2v \times 2v$ の線形システムが生成される. この線形システムの行列は一般的にゼロ要素の多い疎な行列となるので, 繰返し法を用いることにより効率的にその解を計算することができる¹⁴⁾. 以上の計算によりすべての頂点に対する接平面ベクトルの値が求められ, 多面体の辺に沿った曲線網を生成することができる.

**2.2 多面体を三角形分割する
曲線網の生成**

多面体の各 n 辺形領域に対して領域を三角形分割するために一点 (以後, この点を分割点と呼ぶ) を加え, n 辺形の各頂点と分割点を結ぶ n 本の辺 (以後, この辺を分割辺と呼ぶ) を加えて n 個の三角形に分割する. ここで分割点の座標値を O , 周回順 i 番目の分割辺に沿う接線ベクトルを Y_i とし, Y_i は分割点における接平面ベクトル Y^s, Y^c の線形和を用いて式(2)と同様に設定される. ただし, i 番目の分割辺を挟んで O と対向する点 \bar{O}_i の分割辺に沿った接線ベクトル \bar{Y}_i は, この n 辺形の点 \bar{O}_i を含む二辺に沿った, 2.1 節においてすでに求められた接線ベクトル \bar{Y}_i^s, \bar{Y}_i^c を用いて (図1参照. ただし, $P \rightarrow O, T \rightarrow Y$ とする),

$$\bar{Y}_i = \frac{1}{2(1 - \cos(2\pi/n))} (\bar{Y}_i^s + \bar{Y}_i^c),$$

と設定する¹⁷⁾.

これより, 分割辺に沿った3次曲線を想定し, 式(3)で表される擬似ノルムの総和関数 $\sigma(C)$ を求めると Y^s, Y^c, O に関する式となる. ただし分割点および分割辺は, 設計者が入力する多面体に新たに付加されるものなので, 曲面を生成する際に目立たないようにするのが望ましいことから, 分割点, 分割辺に対す

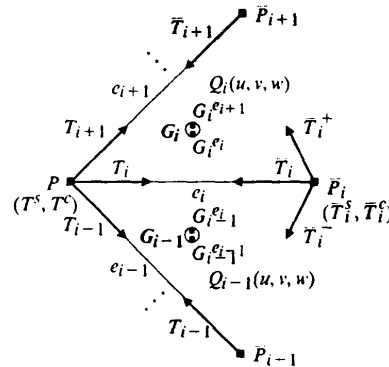
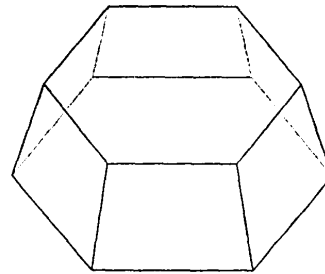
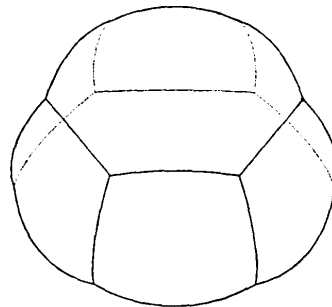


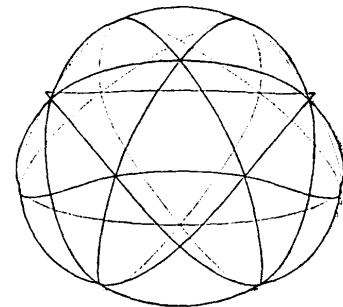
図1 点Pを含む辺に関する変数
Fig. 1 Parameters about edges that contain P.



(a) 多面体
(a) Polyhedron.



(b) 分割前曲線網
(b) Curve network before subdivision.



(c) 分割後曲線網
(c) Curve network after subdivision.

図2 多面体からの曲線網生成例
Fig. 2 An example of curve network from polyhedron.

る張力値は自然スプライン曲線の定義で用いられる擬似ノルムと一致する値 $\alpha=0, \beta_i=1$ を選ぶことにする。

ここで、2.1 節で述べた手法と同様に分割点における接平面ベクトル Y^i, Y^c に関する $\sigma(C)$ の変分をゼロとおくと、式(5)の代わりに以下の式が得られる(付録1参照)。

$$\begin{aligned} & \sum_{e_i \in E_0} k_i (O + 2 \sin \theta_i Y^i + 2 \cos \theta_i Y^c) \\ &= \sum_{e_i \in E_0} k_i (\bar{O}_i + \bar{Y}_i). \end{aligned} \quad (6)$$

ただし、 k_i は式(5)の定義に従う。

同様に、分割点 O に関する $\sigma(C)$ の変分をゼロとおくことによって、以下の式が得られる。

$$\begin{aligned} & \sum_{e_i \in E_0} (2O + 3 \sin \theta_i Y^i + 3 \cos \theta_i Y^c) \\ &= \sum_{e_i \in E_0} (2\bar{O}_i + 3\bar{Y}_i). \end{aligned} \quad (7)$$

式(6)、(7)より、分割点ごとに、各3次元座標軸に関して 3×3 の線形システムが生成され、これを解くことにより分割点の座標値 O および接平面ベクトルの値 Y^i, Y^c が求められ、分割辺に沿った曲線網を生成することができる。

図2に多面体から生成される曲線網の例を示す。図2(a)で示される多面体に対して、2.1 節で述べた手法により図2(b)で示される多面体の各辺に沿った曲線網が生成され(ただし、 $\alpha=0, \beta_i=1$)、次に2.2 節で述べた手法により図2(c)で示される三角形分割された曲線網が生成される。

3. 三辺形パッチによる曲面生成

3.1 曲線網補間と G^1 級接続の制約条件

n 次の三辺形パッチは三角領域に対する重心座標系を表す変数 u, v, w , ($0 \leq u, v, w \leq 1, u+v+w=1$) を用いた、 n 次3変数のベジエ多項式 $B_{i,j,k}^n(u, v, w)$ の線形和の形式を用いて、以下のように表される。

$$\begin{aligned} Q(u, v, w) &= \sum_{i,j,k \in Z^n} D_{i,j,k} B_{i,j,k}^n(u, v, w), \\ Z^n &:= \{i, j, k \mid i \geq 0 \cap j \geq 0 \cap k \geq 0 \cap i+j+k=n\}, \\ B_{i,j,k}^n(u, v, w) &= \frac{n!}{i!j!k!} u^i v^j w^k. \end{aligned} \quad (8)$$

ここでは三辺形パッチの次数を4次とし、その境界における曲線が、2章において多面体の座標値と張力変数値により計算した3次曲線と一致するように、変数 $D_{i,j,k} : \{i, j, k \mid i, j, k \in Z^4 \cap i+j+k=0\}$ (以後、この条件を満足する変数を境界変数と呼ぶ) の値を決める。例えば、 $w=0$ の境界での曲線が式(1)で表される3次

曲線と一致するように境界変数の値を決定する場合は、以下の式を適用する。

$$D_{i,4-i,0} = \frac{i}{4} V_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{4}\right) V_i, \quad (i=0, \dots, 4). \quad (9)$$

他の境界 $u=0, v=0$ についても同様に境界変数の値を決定することができる。

次に、4次の三辺形パッチで構成される曲面の連続性に関する条件について考える。一般的に、曲面を構成する三辺形パッチが、隣接する境界において滑らかに接続されるためには、その境界上のすべての点で曲面の接平面が一致するという、1次の幾何学的連続性 (G^1 級) の条件を満足することが必要である。 (G^1 級は、視覚的連続性 (VC^1 級)¹⁸⁾ とも呼ばれるが、本論文では、より一般的な G^1 級の呼称を用いることにする。)

隣接する曲面を G^1 級で接続するには、変数 $D_{i,j,k} : \{i, j, k \mid i, j, k \in Z^4 \cap i+j+k=0\}$ (以後、この条件を満足する変数を内部変数と呼ぶ) の値を調節することによって行われる。いま図3で示されるように、 $w=0$ の境界において接続されている二つの三辺形パッチ $Q(u, v, w), \bar{Q}(u, v, w)$ がそれぞれ変数 $D_{i,j,k}, \bar{D}_{i,j,k}$ をもつものとし、 $w=0$ の境界での境界変数が式(9)で与えられているものとする。このとき、 G^1 級の連続性で接続されるための必要十分な条件は、内部変数 ($D_{1,2,1}, \bar{D}_{1,2,1}$) と ($D_{2,1,1}, \bar{D}_{2,1,1}$) に関する制約式として以下のように表すことができる^{8), 19)}。

$$\begin{aligned} & a_1 D_{1,2,1} + a_2 \bar{D}_{1,2,1} \\ &= \frac{2}{3} (a_3 V_2 + a_4 V_1) + \frac{1}{3} (a_5 V_0 + a_6 V_1), \\ & a_1 D_{2,1,1} + a_2 \bar{D}_{2,1,1} \\ &= \frac{1}{3} (a_3 V_3 + a_4 V_2) + \frac{2}{3} (a_5 V_1 + a_6 V_2), \\ & a_1 = \text{area}(V_0, V_1, \bar{D}_{0,3,1}), \end{aligned} \quad (10)$$

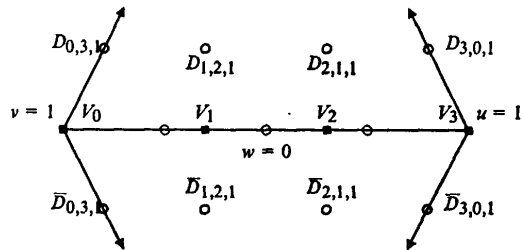


図3 隣接する三辺形パッチの制御点
Fig. 3 Control points of adjacent triangular patches.

$$\begin{aligned} a_2 &= \text{area}(V_0, V_1, D_{0,3,1}), \\ a_3 &= \text{area}(V_0, D_{0,3,1}, \bar{D}_{0,3,1}), \\ a_4 &= \text{area}(V_1, D_{0,3,1}, \bar{D}_{0,3,1}), \\ a_5 &= \text{area}(V_3, D_{3,0,1}, \bar{D}_{3,0,1}), \\ a_6 &= \text{area}(V_2, D_{3,0,1}, \bar{D}_{3,0,1}). \end{aligned}$$

ただし、 $\text{area}(X_1, X_2, X_3)$ は点 X_i ($i=1, 2, 3$) によって定義される三角形の面積を表すものとし、 V_i ($i=0, \dots, 3$), a_i ($i=1, \dots, 6$) の値は 2 章で求めた 3 次曲線網の値により求められる。

次に、三辺形パッチのすべての境界において G^1 級の接続を行う条件を考える。まず、点 P, \bar{P}_i や接線ベクトル T_i, \bar{T}_i などが 2 章で述べた定義に従うものとし、辺 e_i, e_{i+1} で囲まれる i 番目の三辺形パッチを $Q_i(u, v, w)$ とする。また、 $Q_i(u, v, w)$ の点 P に関する内部変数を G_i とし、 P の位置によって、

$$G_i = \begin{cases} D_{2,1,1}, & \text{if } P \equiv Q_i(1, 0, 0) \\ D_{1,2,1}, & \text{if } P \equiv Q_i(0, 1, 0), \\ D_{1,1,2}, & \text{if } P \equiv Q_i(0, 0, 1) \end{cases}$$

のように設定する。このとき、点 P を共有する n 本の辺 $e_i \in E_P$, ($i=1, \dots, n$) に沿うすべての境界に関して式(10)で表される接続条件を考えると、 G_i に関する周回的な制約式群が得られる。ここで、 i 番目の辺に沿う境界に関する式(10)の係数 a_k ($k=1, \dots, 6$) を $a_{i,k}$ で表し、式(10)の $V_i, D_{i,j,k}, \bar{D}_{i,j,k}$ の値をそれらに対応する $P, \bar{P}_i, T_i, \bar{T}_i$ など置き換えると、この制約式群は以下に述べるような線形システムで表される (図 1 参照)。

$$\begin{aligned} a_{i,1}G_i + a_{i,2}G_{i-1} &= R_i, \quad (i=1, \dots, n), \\ R_i &= \frac{1}{3} \{ (2a_{i,4} + a_{i,5} + a_{i,6})P + (2a_{i,4} + a_{i,6})T_i \\ &\quad + 2a_{i,3}(\bar{P}_i + \bar{T}_i) \}, \\ a_{i,1} &= \frac{3}{4} |T_{i-1} \times T_i|, \\ a_{i,2} &= \frac{3}{4} |T_i \times T_{i+1}|, \\ a_{i,3} &= \frac{9}{16} |T_{i-1} \times T_{i+1}|, \\ a_{i,4} &= \left| \left(\frac{3}{4} T_{i+1} - T_i \right) \times \left(\frac{3}{4} T_{i-1} - T_i \right) \right|, \\ a_{i,5} &= \frac{9}{16} |\bar{T}_i \times \bar{T}_i|, \\ a_{i,6} &= \left| \left(\frac{3}{4} \bar{T}_i - \bar{T}_i \right) \times \left(\frac{3}{4} \bar{T}_i - \bar{T}_i \right) \right|. \end{aligned} \tag{11}$$

ただし、添字 i は n を法とする周回番号で定義される。点 P が開曲面の開いた境界上にある場合は、その

境界に沿った接線ベクトル ($T_i = -T_n$) と点 P における接平面の法線ベクトル ($T^* \times T^*$) によって張られる平面に対して、面対称な関係にある $T_i, \bar{P}_i, \bar{T}_i$ などの値を想定して $a_{i,k}, R_i$ の値を求め、閉曲面の境界と同様に式(11)を計算する。ゆえに、多面体の各頂点ごとに式(11)で表される線形システムによって内部変数の値を解くことができれば、すべての三辺形パッチの境界において G^1 級の接続条件が満足される。

3.2 三辺形パッチの拡張モデル

式(11)で表される制約式群は n の値が偶数のときに従属な関係となるので、解が存在するためには R_i の奇数番目と偶数番目の差分の総和 $\text{Dif}(R) = \sum_{i=1}^n (-1)^i R_i$ がゼロとなる条件を満足しなければならない。しかしながら、常にこのような条件を満足する 3 次曲線網を生成することはできない。したがって、4 次の三辺形パッチは一般的にそのすべての境界において G^1 級の接続条件を満足する曲面を生成することができないので、4 次の三辺形パッチの定義式を拡張することが必要となる。ここで、式(8)で表される三辺形パッチの内部変数を、それを挟む二つの境界に関するものに分解して、以下のように有理多項式で展開する⁴⁾ (図 4 参照)。

$$\begin{aligned} D_{2,1,1} &= \frac{vD_{2,1,1}^* + wD_{2,1,1}^*}{v+w}, \\ D_{1,2,1} &= \frac{uD_{1,2,1}^* + wD_{1,2,1}^*}{u+w}, \\ D_{1,1,2} &= \frac{uD_{1,1,2}^* + vD_{1,1,2}^*}{u+v}. \end{aligned} \tag{12}$$

ただし $D_{i,j,k}^*$ は、それぞれ $s=0$ ($s=u, v, w$) の境界のみに関する連続性に影響する変数であり (以後、この変数を内部有理変数と呼ぶ)、その境界における G^1 級の接続に関する制約式は式(10)において内部変数 $D_{i,j,k}$ を内部有理変数 $D_{i,j,k}^*$ で置き換えたものに等

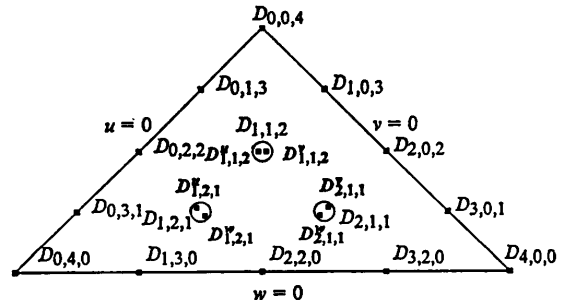


図 4 4 次の三辺形パッチの拡張モデル
Fig. 4 Extended model of quartic triangular patch.

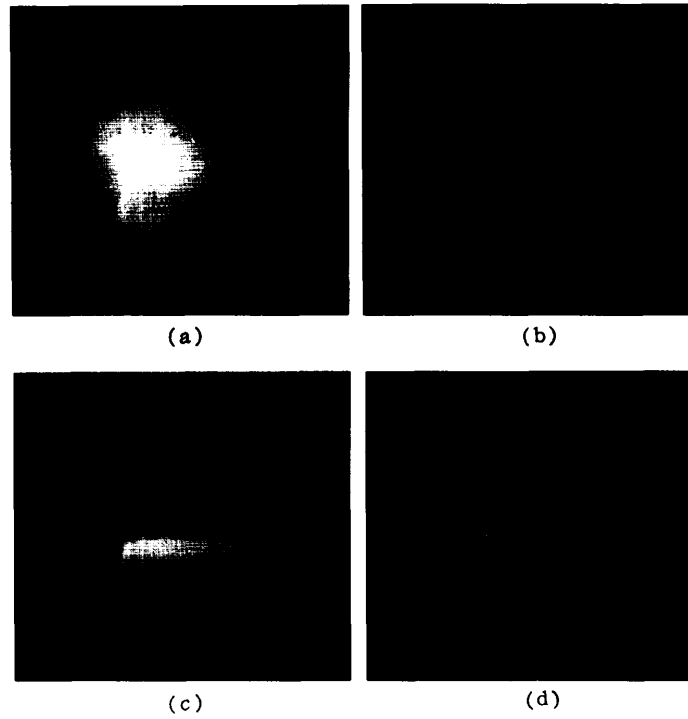


図 5 張力制御による曲面生成例

(a) $\beta_i=1$, $\alpha=0$, (b) 開曲面, (c) $\beta_i=10$, (d) $\alpha=10$.

Fig. 5 Examples of surface generation with tension control.

(a) $\beta_i=1$, $\alpha=0$, (b) Open surface, (c) $\beta_i=10$, (d) $\alpha=10$.

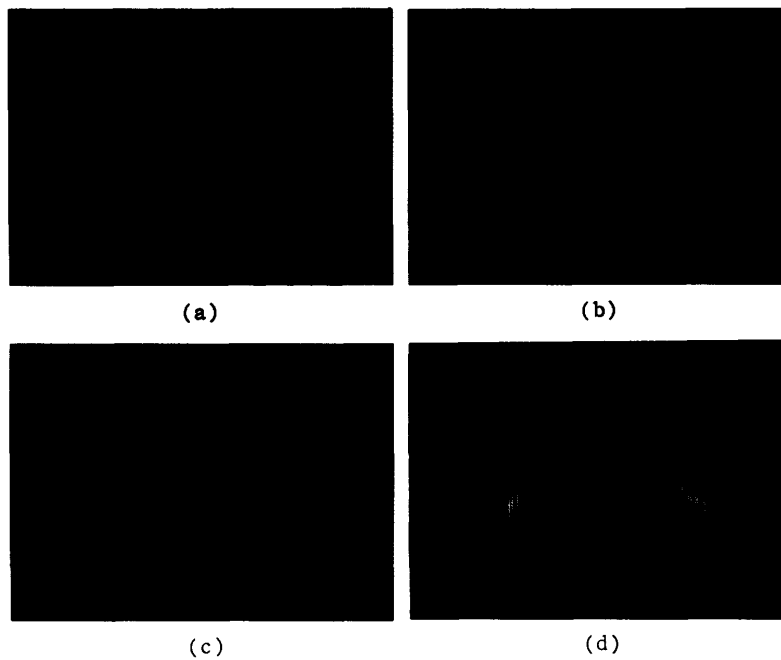
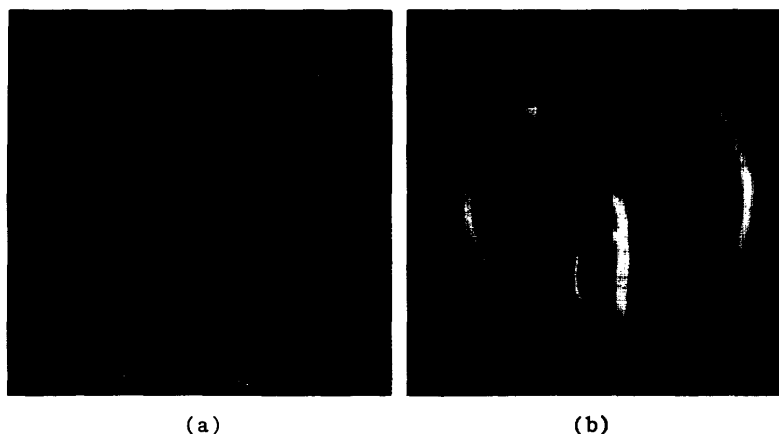


図 6 凹形領域をもつ多面体の曲面生成例

Fig. 6 Examples of surfaces generated from polyhedron with concave domain.



(a)

(b)

図 7 複雑な位相をもつ曲面例

(a)多面体, (b)曲面.

Fig. 7 Example of topologically complicated surface.

(a) Polyhedron, (b) Surface.

しくなる. ゆえに, 各境界に対して個別に式(10)の制約式を満たすように内部有理変数の値を決定することにより, すべての境界において G^1 級の接続条件を満足する曲面を生成することができる.

しかし, 各境界に関して内部有理変数の数 (=4) が式(10)の制約式の数 (=2) の2倍になっており変数の解が任意性を有するので, 以下に述べる制約を加えてその値を一意に決定する.

まず G_i が式(12)と同様に, 辺 e_i と e_{i+1} の境界に対するもの $G_i^{e_i}$, $G_i^{e_{i+1}}$ に分解されているものとする(図1参照). 点 P を共有する辺の数 n が奇数の場合は, 式(11)により G^1 級の接続条件を満足する内部変数 G_i の値を求めることができるので, このときに $G_i^{e_i} \equiv G_i^{e_{i+1}} \equiv G_i$ の関係を満たすようにする.

辺の数 n が偶数の場合は, まず R_i の近似値 \tilde{R}_i を,

$$\tilde{R}_i = R_i + (-1)^{(i-1)} \frac{Dif(R)}{n},$$

によって設定する. このとき, 式(11)で表される制約式群の R_i を \tilde{R}_i で置き換えると $Dif(\tilde{R})=0$ の関係より解 G_i が存在する. ただし, 式(11)で表される制約式群が従属関係にあり, 変数の数が独立な制約式の数よりも一つ多いため解が任意性を有するので, 形状の対称性を考慮した制約式 $\sum_{i=1}^n (-1)^i G_i = 0$ を加えて解を一意に求める. 次に内部有理変数 $G_i^{e_i}$, $G_i^{e_{i+1}}$ の値が, \tilde{R}_i より求めた G_i の値にできるだけ近づくようにする. したがって $G_i^{e_i}$, $G_i^{e_{i+1}}$ については, 辺 e_i に沿った境界に関して式(11)の制約条件 $a_{i,1}G_i^{e_i} + a_{i,2}G_i^{e_{i+1}} = R_i$ を満足し, $(G_i^{e_i} - G_i)^2 + (G_i^{e_{i+1}} - G_i)^2$

の値が最小となるように,

$$G_i^{e_i} = \frac{1}{a_{i,1}^2 + a_{i,2}^2} (a_{i,2}^2 G_i - a_{i,1} a_{i,2} G_{i-1} + a_{i,1} R_i),$$

$$G_i^{e_{i+1}} = \frac{1}{a_{i,1}^2 + a_{i,2}^2} (a_{i,1}^2 G_{i-1} - a_{i,1} a_{i,2} G_i + a_{i,2} R_i),$$
(13)

のように設定する(式(13)は, $Dif(R)=0$ のとき $G_i^{e_i} \equiv G_i^{e_{i+1}} \equiv G_i$ となる).

以上に述べた, 点 P を含む各辺 $e_i \in E_P$ についての計算を, すべての頂点 $P \in V$ に関して行うことにより, 内部有理変数 $D_{i,j,k}$ のすべての値を一意に決定することができる. 三辺形パッチのすべての制御点の値が求まる. このとき生成される曲面は, G^1 級の連続性の条件を満足し, 2章で生成される曲線網の形状の対称性を保持する. また, 4次の三辺形パッチは式(12)で拡張することにより有理多項式となるが, その次数は他の手法で用いられる^{6),7)} 有理多項式の三辺形パッチの次数よりも低くなる.

4. 曲面の生成例

3章で述べた手法により曲面を生成した例を図5に示す. 図5(a)は, 図2(c)で与えられた曲線網から生成された曲面を表す. 図5(b)は, 図2(a)で与えられた多面体で張力値 $\alpha=0$, $\beta_i=1$ をもち, 上部の六辺形領域に曲面が存在しない場合の開曲面の例を示す. 張力変数 α , β_i を曲線網を生成する際の形状制御変数として用いることにより, 曲面の対話的な変形操作を実現することができる. 図5(c)は, 図2の多面体の上部の六辺形に含まれるすべての辺に対する張

力値の値を $\beta_i=10$ に変えた曲面, 図 5 (d) は, 同じ六辺形に含まれるすべての頂点に対する張力値の値を $\alpha=10$ に変えた曲面を表す. β_i の値を増やすことによって, 上部の六辺形領域に含まれる三辺形パッチの形状が平たくなる. 一方, α の値を増やすことによっても同じ領域の三辺形パッチの形状が平たくなるが, β_i のときと違って各頂点において尖った部分形状をなす. 本研究で述べた曲面生成法は, 任意の多面体に対して滑らかな曲面を生成することができるが, 多面体の種類によっては直観的な形状を得られない場合がある. 凹形が多辺形を含む多面体 (図 6 (a)) を与えた場合, 凹形領域に対する分割点はその領域の外部にくるように計算されることがあるので, 直観的に把握しにくい形状 (図 6 (b)) を生成してしまうが, 凹形の領域を複数の凸形部分 (図 6 (c)) に細分割すれば, 直観にあった形状 (図 6 (d)) を生成することができる. 一方, 与える多面体の位相に関する制約はなく, 複雑な位相をもつ多面体 (図 7 (a)) に対しても, 直観にあった曲面形状 (図 7 (b)) を生成することができる.

5. むすび

多面体から三辺形パッチによって自由曲面を生成する手法について述べた. これにより設計者は形状のおおまかな構造を多面体により記述し, 多面体の各頂点, 辺における張力変数値を調節して曲面形状の設計を簡略かつ直観的に行うことができる. 多面体の構造は任意に設定できることから, テンソル曲面間の融合を行うときに問題となった²⁰⁾, 位相の直交する曲面間の融合にも対処することができる. 加えて, 曲面を生成する際に与えられる多面体の多辺形領域を定義する頂点群は同一平面上にある必要はないので, 各頂点の位置を自由に動かすことができる. ゆえに本手法は, 2次元格子状に制御点を配置してテンソル積曲面を生成する既存の手法と比較して, 複雑な形状や位相をもつ曲面を柔軟に定義できる点で特に優れている. また曲面形状の修正は, 擬似ノルムの最小化による曲線網の生成法を用いずに, 各頂点に対してその座標値および接平面ベクトルを個別に指定することによっても行うことができる. このとき曲面の更新は, 値を変更した頂点を含む三角形と, それらの三角形と点を共有する隣接する三角形の領域にわたってのみ行えばよく, 多面体の全体の複雑度と関係なく局所的な形状修正ができる. ゆえに, 本手法は対話的な曲面設計環境を実

現するのに適している.

現在使われている自由曲面設計システムの多くが双3次パッチを用いているが, 本手法で用いた曲面モデルは, 式(12)の内部有理変数 $D_{i,j,k}$ がそれぞれ独立して各境界の連続性に影響することから, 双3次パッチとの G^1 級接続も扱いやすい形式となっており¹⁹⁾ (付録2参照), 既存のシステムへ組み込むことも容易となる.

今後の課題として, 曲面の曲率までが連続 (G^2 級) な三辺形パッチの生成法の検討が挙げられる. 本研究は, 次世代の意匠設計支援システムを試作, 評価していくプロジェクトにおける曲面モデルとして考案, 開発されたものである^{21), 22)}.

謝辞 本研究を進めていく上で有益な助言を与えて頂いた日本 IBM 東京基礎研究所, 東京サイエントフィックスセンター, グラフィックスシステムの関係者諸氏, 特に本論文の原稿に何度も目を通して頂いた, 清水和哉氏に感謝の意を表す. なお図 6, 7 の写真画像は, Power Station RS/6000 の graPHIGS を用いて陰影表示されたものである.

参考文献

- 1) Nasri, A. H.: Polyhedral Subdivision Methods for Free-Form Surfaces, *ACM Trans Gr.*, Vol. 6, No. 1, pp. 29-73 (1987).
- 2) Catmull, E. and Clark, J.: Recursively Generated B-spline Surfaces on Arbitrary Topological Meshes, *Comput. Aided Des.*, Vol. 10, No. 6, pp. 350-355 (1978).
- 3) Doo, D. and Sabin, M.: Behaviour of Recursive Division Surfaces near Extraordinary Points, *Comput. Aided Des.*, Vol. 10, No. 6, pp. 356-360 (1978).
- 4) Hosaka, M. and Kimura, F.: Non-four-sided Patch Expressions with Control Points, *Comput. Aided Geom. Des.*, Vol. 1, pp. 75-86 (1984).
- 5) Loop, C. T. and DeRose, T. D.: A Multisided Generalization of Bézier Surfaces, *ACM Trans. Gr.*, Vol. 8, No. 3, pp. 204-234 (1989).
- 6) Nielson, G. M.: A Transfinite, Visually Continuous, Triangular Interpolant, Farin, G. ed., *Geometric Modeling: Algorithms and New Trends*, pp. 235-246, SIAM (1987).
- 7) Herron, G.: Smooth Closed Surfaces with Discrete Triangular Interpolants, *Comput. Aided Geom. Des.*, Vol. 2, pp. 297-306 (1985).
- 8) Farin, G.: Smooth Interpolation to Scattered 3D Data, Barnhill, R. E. and Boehm, W. eds., *Surfaces in CAGD*, pp. 43-63, North Holland

- (1983).
- 9) Farin, G.: A Modified Clough-Tocher Interpolant, *Comput. Aided Geom. Des.*, Vol. 2, pp. 19-27 (1985).
 - 10) Farin, G.: Triangular Bernstein-Bézier Patches, *Comput. Aided Geom. Des.*, Vol. 3, pp. 83-127 (1986).
 - 11) Farin, G.: *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design—A Practical Guide*, pp. 235-253, Academic Press (1988).
 - 12) Piper, B. R.: Visually Smooth Interpolation with Triangular Bézier Patches, Farin, G. ed., *Geometric Modeling: Algorithms and New Trends*, pp. 221-233, SIAM (1987).
 - 13) Boor, C. D. and Lynch, R. E.: On Splines and Their Minimum Properties, *J. Math. Mech.*, Vol. 15, pp. 953-969 (1966).
 - 14) Nielson, G. M.: A Method for Interpolating Scattered Data Based upon a Minimum Norm Network, *Math. of Comp.*, No. 40, pp. 253-271 (1983).
 - 15) Foley, T. A.: Interpolation with Interval and Point Tension Controls Using Cubic Weighted v-Splines, *ACM Trans. Math. Softw.*, Vol. 13, No. 1, pp. 68-96 (1987).
 - 16) Foley, T. A.: Weighted Bicubic Spline Interpolation to Rapidly Varying Data, *ACM Trans. Gr.*, Vol. 6, No. 1, pp. 1-18 (1987).
 - 17) Peters, J.: Smooth Mesh Interpolation with Cubic Patches, *Comput. Aided Des.*, Vol. 22, No. 2, pp. 109-120 (1990).
 - 18) Herron, G.: Techniques for Visual Continuity, Farin, G. ed., *Geometric Modeling: Algorithms and New Trends*, pp. 163-174, SIAM (1987).
 - 19) Liu, D. and Hoschek, J.: G^1 Continuity Conditions between Adjacent Rectangular and Triangular Bézier Surface Patches, *Comput. Aided Des.*, Vol. 21, No. 4, pp. 194-200 (1989).
 - 20) 栗山 繁: カージナルスプラインによる自由曲面の融合法, 信学会, Vol. J 72-D-2, No. 9, pp. 1341-1347 (1989).
 - 21) 浦野直樹, 南方博視, 栗山 繁: インダストリアルデザインのための自由曲面の入力について, 情報処理学会グラフィクスと CAD シンポジウム論文集, pp. 59-69 (1989).
 - 22) 栗山 繁: 多面体入力に基づく三辺形パッチ曲面モデル, 第 41 回情報処理学会全国大会論文集 (2), pp. 275-276 (1990).

付 録

1. 接平面ベクトル, 分割点を計算する式(5), (6), (7)の導出

$\sigma(C)$ の T^i に関する変分は, 式(1)-(4)を用いて (ただし, 頂点番号 v を省略する),

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma(C)}{\partial T^i} &= \sum_{P \in V} \sum_{e_i \in E_P} \left\{ \beta_i \int_0^1 \ddot{C}_i(s) \frac{\partial \dot{C}_i(s)}{\partial T^i} \frac{\partial T_i}{\partial T^i} ds \right. \\ &\quad \left. + 2\alpha \dot{C}_i(0) \frac{\partial \dot{C}_i(0)}{\partial T^i} \frac{\partial T_i}{\partial T^i} \right\} \\ &= \sum_{e_i \in E_P} \left\{ 2\beta_i \sin \theta_i \int_0^1 \ddot{C}_i(s) (-2B_0^i(s) \right. \\ &\quad \left. + B_1^i(s)) ds + 2\alpha \sin \theta_i T_i \right\}, \quad (14) \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \ddot{C}_i(s) (-2B_0^i(s) + B_1^i(s)) ds$$

$$= -\frac{1}{2} (\bar{P}_i - P + \bar{T}_i - 2T_i),$$

の関係より導かれる。式(14)の1行目において, 右辺の和 $\sum_{P \in V} \sum_{e_i \in E_P}$ の中で T^i を含む項のみを考えると, $\ddot{C}_i(s)$ はその両端点 $P \in V$ と $\bar{P}_i \in V$ に関する和において同じ曲線を表すものとして2度現れるので, P に関するものだけを考慮してそれを2倍し, また $\dot{C}_i(0)$ は $P \in V$ に関するものだけを考えればよいことから, 式(14)の2行目のような $\sum_{e_i \in E_P}$ だけの和の形式に置き換えることができる。以上の関係式より, 式(5)を導くことができる。 $(\partial \sigma(C) / \partial T^i)$ についても $(\partial T_i / \partial T^i) = \cos \theta_i$ より同様に導くことができる。次に, 式(14)において $\alpha=0$, $\beta_i=1$, $P \rightarrow O$, $T \rightarrow Y$ と置き換えることにより式(6)が導かれる。また, $\sigma(C)$ の O に関する変分をとると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma(C)}{\partial O} &= \sum_{P \in V} \sum_{e_i \in E_P} \int_0^1 \ddot{C}_i(s) \frac{\partial \dot{C}_i(s)}{\partial O} ds \\ &= \sum_{e_i \in E_P} 2 \int_0^1 \ddot{C}_i(s) (-B_0^i(s) + B_1^i(s)) ds \\ &= \frac{1}{6} (-2\bar{O}_i + 2O - 3\bar{Y}_i + 3Y_i), \end{aligned}$$

が求まり, これをゼロとおくことにより式(7)の関係が導かれる。

2. 拡張した4次の三辺形パッチと双3次パッチとの G^1 級接続

式(8), (12)で表される拡張した4次の三辺形パッチと, 3次のバーンスタイン多項式のテンソル積で表される双3次パッチ:

$$S(u, w) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 P_{i,j} B_i^3(u) B_j^3(w),$$

が $w=0$ の境界において接続され、

$$D_{i,4-i,0} = \frac{i}{4} P_{i-1,0} + \left(1 - \frac{i}{4}\right) P_{i,0}, \quad (i=0, \dots, 4)$$

の関係を満たすものとする。このとき、 $Q(u, v, w)$ と $S(u, w)$ がその境界において G^1 級の連続性を有するための必要十分な条件は $B_i^3(u) = B_{i,n-i,0}^3(u, v, 0)$ の関係を用いて、以下のように表すことができる。

$$\det(X(u, v), Y(u, v), Z(u, v)) \equiv 0$$

$$\begin{aligned} X(u, v) &= \frac{\partial S(u, 0)}{\partial u} \\ &= \sum_{i=0}^2 3(P_{i+1,0} - P_{i,0}) B_{i,2-i,0}^3(u, v, 0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y(u, v) &= \frac{\partial S(u, 0)}{\partial w} \\ &= \sum_{i=0}^3 3(P_{i,1} - P_{i,0}) B_{i,3-i,0}^3(u, v, 0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z(u, v) &= \frac{\partial Q(u, v, 0)}{\partial w} - \frac{\partial Q(u, v, 0)}{\partial u} \\ &= \sum_{i=0}^3 4(D_{i,3-i,1} - D_{i,4-i,0}) B_{i,3-i,0}^3(u, v, 0), \end{aligned}$$

ただし、内部変数 $D_{1,2,1}$, $D_{2,1,1}$, は、 $w=0$ の境界に関する内部有理変数 $D_{1,2,1}^*$, $D_{2,1,1}^*$ を表すものとする。この条件は、 $(l_1 u + l_2 v)X(u, v) + Y(u, v) + Z(u, v) \equiv 0$ (ただし、 l_1, l_2 は任意の定数) と置き換えることができ、これを各係数 $u^i v^j$ ($i+j=3$) について解くことにより、

$$4(D_{0,4,0} - D_{0,3,1}) = 3l_1(P_{1,0} - P_{0,0}) + 3(P_{0,1} - P_{0,0}),$$

$$4(D_{3,1,0} - D_{3,0,1}) = 3l_2(P_{3,0} - P_{2,0}) + 3(P_{3,1} - P_{3,0}),$$

$$4(D_{1,3,0} - D_{1,2,1}) = l_2(P_{1,0} - P_{0,0}) + 2l_1(P_{2,0} - P_{1,0}) + 3(P_{1,1} - P_{1,0}),$$

$$4(D_{2,2,0} - D_{2,1,1}) = l_1(P_{3,0} - P_{2,0}) + 2l_2(P_{2,0} - P_{1,0}) + 3(P_{2,1} - P_{2,0}), \quad (15)$$

の関係式が得られる。ゆえに、双3次パッチの制御点 $P_{i,j}$ の値が与えられた場合に、三辺形パッチの制御点 $D_{i,j,1}$ の値を式(15)において l_1, l_2 の値を適当に与えることにより求めれば、三辺形パッチと双3次パッチを G^1 級の連続性で接続することができる。逆に $D_{i,j,1}$ の値が与えられた場合にも、同様にして $P_{i,j}$ の値を求めることにより G^1 級接続が行える。他の境界同士の組み合わせについても、同様な接続条件を導くことができる。

(平成2年10月16日受付)

(平成3年2月12日採録)



栗山 繁 (正会員)

1962年生。1985年大阪大学工学部電子工学科卒業。1987年同大学院修士課程修了。翌年日本アイ・ビー・エム(株)入社、現在東京基礎研究所勤務。計算機支援幾何設計、曲面理論、コンピュータグラフィックス、人工現実感に興味をもつ。電子情報通信学会、ACM各会員。