

画像修復における確率伝搬法を用いた EM アルゴリズムについての一考察 An consideration of EM algorithm with belief propagation for image restoration

井上 佳†
Kei Inoue

田中 和之‡
Kazuyuki Tanaka

1. はじめに

近年、マルコフ確率場と確率伝搬法を用いた画像処理技術の研究は数理的立場を中心に盛んに行われつつある [1, 2, 3]. マルコフ確率場を用いた画像処理は、そのアルゴリズム化のために大規模確率場における統計量の計算とデータからのハイパパラメータの決定という 2 つの障害の解決を必要とする. 前者の統計量の計算は近似アルゴリズムとしての確率伝搬法 (Belief Propagation) を用いることで高精度の解を高速に得ることができることが近年のいくつかの研究成果の報告により認知されつつある. またデータからのハイパパラメータの決定は EM (Expectation-Maximization) アルゴリズムと呼ばれる統計学の手法を用いることで達成されることが古くから知られており、確率伝搬法と組み合わせた方法の性能の検討がなされている [1, 4, 5].

しかしながら、実際に EM アルゴリズムを実行する過程においては各ステップごとの統計量の計算を行う必要がでてくる. 確率伝搬法は繰返し計算型のアルゴリズムであるため、その繰返し計算において統計量を各ステップごとに収束させる手間が必要となり、このことが処理速度の向上を阻む一因となっていた.

本論文では、EM アルゴリズムの各ステップにおいて確率伝搬法の繰返し計算を有限回で打ち切り、EM アルゴリズムを次に進めることの、ハイパパラメータ決定と画像処理の性能に与える影響を調べる. 特に EM アルゴリズムの 1 ステップにおける確率伝搬法の繰返し計算の回数を 1 回のみにした場合においてアルゴリズムの動作にはほとんど影響を与えないことを示す結果を得ている.

2. 確率伝搬法による画像修復

2.1 画像修復の確率モデル

正方格子上に配列した N 個の画素上で与えられた画像に対してノイズが加えられることにより劣化された劣化画像から原画像を推定する画像修復を考える.

原画像と劣化画像の各画素 i ごとの階調値に対する確率変数をそれぞれ f_i および g_i により表すものとする.

$$\vec{f} = (f_1, f_2, \dots, f_N) \quad (1)$$

$$\vec{g} = (g_1, g_2, \dots, g_N) \quad (2)$$

画像は K 階調であり、各画素の階調値の取り得る値は $0, 1, \dots, K-1$ のいずれかであるとする. 原画像 $\vec{f} = (f_1, f_2, \dots, f_N)$ は次の確率分布に従うものと仮定する.

$$P(\vec{f}|\alpha) = \frac{1}{Z_{\text{prior}}} \prod_{ij \in B} \exp(-\alpha(f_i - f_j)^2) \quad (3)$$

†東北大学大学院情報科学研究科
e-mail: kei@smapi.is.tohoku.ac.jp

‡東北大学大学院情報科学研究科
e-mail: kazu@smapi.is.tohoku.ac.jp

ここで Z_{prior} は規格化定数であり、 B はすべての最近接画素対の集合である. α は正值のハイパパラメータであり、その大きさが大きいほど空間的な変化の滑らかな画像の出現確率が高くなる.

ノイズとしては対称通信路による劣化を仮定する. 原画像の画素値 f_i が他のある画素値 g_i に置き換えられてしまう確率を p とする. このとき置き換わらない確率は $1 - (K-1)p$ である. この置き換えは各画素ごとに独立に行われるものとする. 原画像 $\vec{f}$ が与えられたときの劣化画像 $\vec{g}$ が生成される条件付確率分布は次の形で与えられる.

$$P(\vec{g}|\vec{f}, p) = \prod_{i=1}^N (p(1 - \delta_{f_i, g_i}) + (1 - (K-1)p)\delta_{f_i, g_i}) \quad (4)$$

ここで $\delta_{a,b}$ はクロネッカーのデルタである.

ベイズの公式に代入することにより、劣化画像 $\vec{g}$ が与えられたときの原画像 $\vec{f}$ に対する事後確率分布は次のように与えられる. $Z_{\text{posterior}}$ は規格化定数である.

$$P(\vec{f}|\vec{g}, \alpha, p) = \frac{1}{Z_{\text{posterior}}} \prod_{i=1}^N \psi(f_i, g_i) \prod_{ij \in B} \phi(f_i, f_j) \quad (5)$$

$$\psi(f_i, g_i) \equiv p(1 - \delta_{f_i, g_i}) + (1 - (K-1)p)\delta_{f_i, g_i} \quad (6)$$

$$\phi(f_i, f_j) \equiv \exp(-\alpha(f_i - f_j)^2) \quad (7)$$

2.2 確率伝搬法

式 (5) の事後確率に対する周辺確率は確率伝搬法において次のように与えられる [1].

$$P_i(f_i|\vec{g}, \alpha, p) \simeq \frac{1}{Z_i} \psi(f_i, g_i) \prod_{k \in C_i} M_{k \rightarrow i}(f_i) \quad (8)$$

$$P_{ij}(f_i, f_j|\vec{g}, \alpha, p) \simeq \frac{1}{Z_{ij}} \psi(f_i, g_i) \phi(f_i, f_j) \psi(f_j, g_j) \times \left(\prod_{k \in C_i \setminus \{j\}} M_{k \rightarrow i}(f_i) \right) \left(\prod_{l \in C_j \setminus \{i\}} M_{l \rightarrow j}(f_j) \right) \quad (9)$$

ここで Z_i と Z_{ij} はそれぞれの周辺確率分布の規格化定数であり、 C_i が画素 i の最近接画素の集合である. $M_{i \rightarrow j}(f_j)$ はメッセージと呼ばれる量であり、次の固定点方程式を満足するように反復法によって求められる.

$$M_{i \rightarrow j}(f_j) = \frac{Z_j}{Z_{ij}} \sum_{f_i=0}^{K-1} \phi(f_i, f_j) \psi(f_i, g_i) \prod_{k \in C_i \setminus \{j\}} M_{k \rightarrow i}(f_i) \quad (10)$$

3. EM アルゴリズムによるハイパパラメータ推定

EM アルゴリズムは周辺尤度最大化のもとでのハイパパラメータ決定を行う繰返し計算型のアルゴリズムである. そのスキームは以下の更新式により $(\alpha(t-1), p(t-1))$ から $(\alpha(t), p(t))$ への更新が収束するまで繰返し実行されるという形で与えられる.

$$p(t) = \sum_{i=1}^N \sum_{f_i} (1 - \delta_{f_i, g_i}) P(f_i | \alpha(t-1), p(t-1)) \quad (11)$$

$$\sum_{ij \in B} \sum_{f_i} \sum_{f_j} (f_i - f_j) P(f_i, f_j | \alpha(t)) = \sum_{ij \in B} \sum_{f_i} \sum_{f_j} (f_i - f_j) P(f_i, f_j | \alpha(t-1), p(t-1)) \quad (12)$$

このスキームは周辺確率分布 $P(f_i | \alpha(t-1), p(t-1))$, $P(f_i, f_j | \alpha(t))$, $P(f_i, f_j | \alpha(t-1), p(t-1))$ を求めるための確率伝搬法の繰返し計算を内側に含む2重ループ構造のアルゴリズムになっていることを注意する。また、 $P\{f_i, f_j | \alpha(t)\}$ は事前確率分布 (式(3)) の確率伝搬法によって求める。

図1(a)に $K=4$ の原画像、図1(b)に $p=0.1$ の劣化画像、図1(c)に修復した画像を示す。初期値を $\alpha=0.01, p=0.01$ として、 $\alpha=0.514, p=0.103$ に収束した。

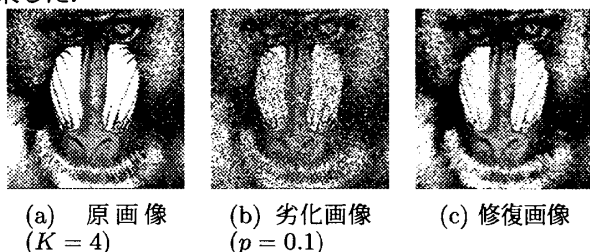


図1: 確率モデルによる画像修復

4. メッセージ更新の打ち切り

EM アルゴリズムを用いてハイパパラメータ α, p の推定を行う際に、メッセージ更新回数がある一定回数で打ち切り、周辺確率を求めながら、EM アルゴリズムを実行した場合にハイパパラメータ推定にどのような影響を及ぼすか調べる。

図1(a)の画像を原画像とし、図1(b)の画像を劣化画像として数値実験は行われる。式(11)-(12)においてメッセージ更新を一定回数 T で打ち切ってEM アルゴリズムを実行した時の $\alpha(t), p(t)$ の収束の様子を、EM アルゴリズムの各ステップごとにメッセージを収束させながら実行した場合をともに図2に与える。またその場合の計算時間を表1に示す。数値実験は Pentium M1.86GHz を搭載したパーソナルコンピュータで行っている。最終的に得られた α, p の推定値は打ち切りの回数 t によらずほぼ同様の値となっている。メッセージの収束を待たずにメッセージ更新回数を打ち切りながらEM アルゴリズムを実行することで、収束の遅い領域を省いて高速化が達成できていることがわかる。 $T=1, T=5$ の場合は $T=10$ の場合と比較して計算時間が長い。これはメッセージの値の変化が少ないため α, p の値も大きく変化せず、式(11)-(12)の計算回数が増えてしまっているものと考えられる。式(10)のループと式(11)-(12)の処理時間の比重を更に検討することで、適切な打ち切り回数を見つけることが計算速度の改善につながると考えられる。本節の実験で得られた修復画像は図1(c)に与える。

5. まとめ

本論文では、確率伝搬法を用いたEM アルゴリズムによる画像修復での Inner Loop における確率伝搬法の

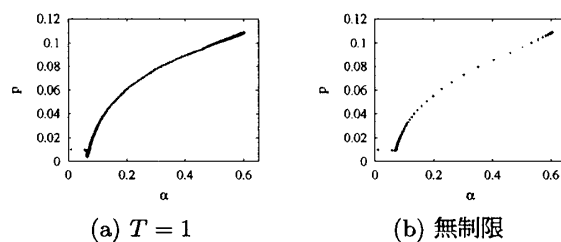


図2: α, p 収束の様子

表1: メッセージ更新打ち切りによる計算回数の違い

	確率伝搬法のループ回数	α, p 更新回数	計算時間
$T=1$	599	599	8m43s
$T=5$	1645	329	6m51s
$T=10$	2191	220	5m42s
$T=50$	4172	93	6m48s
$T=100$	5725	79	9m58s
無制限	9841	74	15m52s

繰返し計算をある有限回数で強制的に打ち切り、EM アルゴリズムを次のステップに進めてしまうことでハイパパラメータの推定精度および計算処理時間がどのような影響を受けるかについて数値実験により調べた。結果、EM アルゴリズムの各ステップごとにおける確率伝搬法のメッセージの収束が必ずしも必要ではないことを示すことができた。このことは確率伝搬法を Inner Loop とし、EM アルゴリズムを Outer Loop として、その両者の計算の過程で相補的に収束に向けての必要な反復回数を実行していることによるものであると考えられる。今後、それぞれの計算の特性等から、EM アルゴリズムと確率伝搬法の適切な組合せ方の提案を行うことで有効な知見が生まることが期待される。

謝辞

本研究の一部は文部科学省科学研究費補助金 (No.18079002) の補助を得て行われたものである。

参考文献

- [1] 田中和之,『確率モデルによる画像処理技術入門』, 森北出版株式会社, 2006 年
- [2] W. T. Freeman, T. R. Jones and E. C. Pasztor: Example-Based Super-Resolution, IEEE Computer Graphics and Applications, vol.22, pp.56-65, 2002.
- [3] A. S. Willsky: Multiresolution Markov Models for Signal and Image Processing, Proceedings of the IEEE, Vol.90, No.8, pp.1396-1458, 2002
- [4] K. Tanaka, J. Inoue and D. M. Titterton: Probabilistic Image Processing by Means of Bethe Approximation for Q-Ising Model, J. Phys. A: Math. Gen., Vol.36, No.43, pp.11023-11036, 2003.
- [5] K. Tanaka: Statistical Learning Procedure in Loopy Belief Propagation for Probabilistic Image Processing, Proceedings of CIMCA-IAWTIC'05 (November 28-30, 2005, Vienna, Austria), Vol.II, pp.741-746, 2005 (IEEE Computer Society Press).