LA-005

辺縮約問題の近似困難性

Inapproximability of the edge contraction problem

大月 英明[†] 平田 富夫[‡]

Hideaki Otsuki Tomio Hirata

概要

グラフのある性質 π に対し，その性質を満たさないグラフから，π を満たすグラフを構成するため，縮約しなければならない辺の最小個数を求める問題を（性質 π に関する）辺縮約問題と呼ぶ．性質 π が縮約に対し遺伝的であり，2-連結グラフによって決定される場合，この問題は NP 完全であることがわかっている．しかし，その近似困難性に関しては今まで知られていなかった．

この論文では，まず MAX E3-SAT の問題例から，ギャップ保存リダクションにより連結点被覆問題の問題例を構成し，さらに辺縮約問題の問題例にリダクションを行うことにより，辺縮約問題の近似困難な比率の下界を求める．

1. はじめに

グラフのある性質 π に対し，その性質を満たさないグラフから，π を満たすグラフを構成することを考える．そのためには，一般には，頂点の削除，辺の削除，または辺の縮約が考えられる．最小個数の頂点 (辺) を削除して π を満たすグラフを構成する問題は（性質 π に関する）頂点削除問題 (辺削除問題) と呼ばれ，性質 π が non-trivial で遺伝的である場合，近似比率の下界の存在が報告されている [1] [2].

一方，縮約しなければならない辺の最小個数を求める問題を（性質 π に関する）辺縮約問題と呼ぶ．性質 π が縮約に関して遺伝的であり，2-連結グラフによって決定される場合，この問題は NP 完全であることがわかっている [3]．しかし，その近似困難性に関しては今まで知られていなかった．文献 [3] では，連結点被覆問題から辺縮約問題へ帰着することで，NP 完全性を示している．しかし，このリダクションはギャップ保存の性質をもたないため，連結点被覆問題の近似困難性を根拠に辺縮約問題の近似困難性を主張することができない．

この論文では，まず MAX E3-SAT の問題例から，ギャップ保存リダクションにより連結点被覆問題の問題例を構成し，さらに辺縮約問題の問題例にリダクションを行うことにより，辺縮約問題の近似困難な比率の下界を求める．

2. 連結点被覆問題 (CVC) の問題例の構成

連結点被覆問題 (connected vertex cover problem: 以降 CVC) は点被覆問題の解が連結グラフを誘導することを条件としている問題であり，点被覆問題の比率 7/6 の近似が困難であることから [4]，同じ比率の近似が困難であることがわかっている．ここでは，辺の数と CVC の解の大きさとの間にある関係を持つ特殊なグラフのクラスに関して，その 41/40 近似が困難である事を示す．

2.1 MAX E3-SAT からのリダクション

MAX E3-SAT は，各節がちょうど 3 個のリテラルをもつ 3-CNF 式の論理式 ϕ に対して，充足可能な節を最大にする真理値割当を求める問題で，NP 完全である [4]．$P \neq NP$ の仮定の下で，MAX E3-SAT は任意の $\epsilon(>0)$ に関して $8/7-\epsilon$ の多項式近似が不可能である [4]．以下では，MAX E3-SAT の問題例 ϕ から CVC の問題例 G へのギャップ保存リダクション [5] を構成する．

ϕ の変数の数を n，節の数を m とする．また変数を $x_i(i=1\dots n)$，節を $C_j(j=1\dots m)$ とし，x_i が ϕ に現れる回数を t_i とする．ϕ から，以下のようなグラフ $G=(V,E)$ を構成する．

各変数に関して頂点集合 $X_i=\{x_i^j,\bar{x}_i^j|j=1\dots t_i\}$ と辺集合 $E(x_i)=\{\{x_i^j,\bar{x}_i^{j'}\}|j,j'=1\dots t_i\}$ からな

[†]南山大学数理情報学部
[‡]名古屋大学大学院情報科学研究科

る完全２部グラフ K_{t_i,t_i} を構成し $G(x_i)$ とする．さらに頂点 c_0 と d_0 を用意し，$e_0 = \{c_0, d_0\}$，$E_{0i} = \{\{c_0, x_i^j\}, \{c_0, \bar{x}_i^j\} | j = 1 \dots t_i\}$ とする．

各節 $C_j (1 \leq j \leq m)$ に対して頂点 c_j と d_j，辺 $e_j = \{c_j, d_j\}$ を用意し，C_j に含まれるリテラルに対応する $G(x_i)$ の頂点と c_j を以下の様に辺でむすぶ．

$C_j = \{l_1, l_2, l_3\}$ とする．リテラル l_1 が変数 x_i またはその否定 $\bar{x}_i$ で，ϕ において l 番目に現れているとする．もしそのリテラルが x_i であった場合は 辺 $e_j^1 = \{x_i^l, c_j\}$ を，リテラルが $\bar{x}_i$ であった場合は 辺 $e_j^1 = \{\bar{x}_i^l, c_j\}$ を付け加える．l_2，l_3 も同様である．

以上の構成から $G = (V, E)$ を

$$\begin{aligned} V &= \{c_0, d_0\} \cup \bigcup_{i=1}^{n} X_i \cup \bigcup_{j=1}^{m} \{c_j, d_j\} \\ E &= \{e_0\} \cup \bigcup_{i=1}^{n} (E_{0i} \cup E(x_i)) \cup \bigcup_{j=1}^{m} \{e_j, e_j^1, e_j^2, e_j^3\} \end{aligned}$$

と定義する．例えば $\phi = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4)$ の場合のグラフは図１のようになる．ただし E_{0i} は省略してある．

G に関する CVC の最適解である頂点集合を S_{cvc} とすると，次の補題が成り立つ．

補題 1 ϕ がすべての節を充足する割当て a をもつとき，次式が成立する

$$|S_{cvc}| = 4m + 1$$

補題１の証明

CVC の解を S とする．$V(x_i) \equiv \{x_i^j | j = 1 \dots t_i\}$ と $V(\bar{x}_i) \equiv \{\bar{x}_i^j | j = 1 \dots t_i\}$ とする．$G(x_i)$ のすべての辺をカバーするためには，すべての i に関して，

$$V(x_i) \subset S \tag{1}$$

または

$$V(\bar{x}_i) \subset S \tag{2}$$

が必要である．

e_0 をカバーするためには

$$c_0 \in S \tag{3}$$

または

$$d_0 \in S \tag{4}$$

が必要である．また $\sum_{i=1}^{n} t_i = 3m$ であるから，$G(x_i)$ に含まれる辺と E_{0i} をすべてカバーするためには $3m+1$ 以上の頂点が必要である．

辺 $e_j (1 \leq j \leq m)$ をカバーするためには，それぞれの j に関して

$$c_j \in S \tag{5}$$

または

$$d_j \in S \tag{6}$$

が必要であり，(5) であれば十分である．以上より $|S| \geq 4m + 1$ が必要である．

ϕ の節をすべて充足する割当 a が，x_i に TRUE を与える場合は (1)，FALSE を与える場合は (2) とする．上記の様に (5) とし，さらに (3) とすれば e_0 と E_{0i} がカバーされる．この構成以外の頂点を含まなくても S は G の辺をすべてカバーする．

また，x_i が割当 a によって TRUE(FALSE) を与えられている変数であれば，それぞれの j に関して e_j に接続している $x_i^j(\bar{x}_i^j) \in S$ が必ず存在している．

したがって，このようにして構成した S によって誘導された部分グラフは連結であり，かつすべての辺をカバーする．このとき $|S| = 4m + 1$ なので，これが CVC の最適解である．□

補題 2 ϕ が $(1-\epsilon)m$ 個以上の節を充足する割当てをもたないとき，次式が成立する

$$|S_{cvc}| \geq 4m + 1 + \epsilon m$$

補題２の証明

S を CVC の解とし，S に含まれる $G(x_i)$ の頂点を $S(Gx_i)$ で表す． S が，それぞれの i に関して $V(x_i)$ または $V(\bar{x}_i)$ のうちどちらか一方のみを含むならば，$S(Gx_i)(1 \leq i \leq n)$ に連結している $e_j (1 \leq i \leq m)$ の個数は高々 $(1-\epsilon)m$ である．一方，ある e_j を $S(Gx_i)$ に連結させるためには，e_j に隣接する $G(x_i)$ の頂点を少なくとも一つ S に追加する必要があり，かつ $G(x_i)$ の

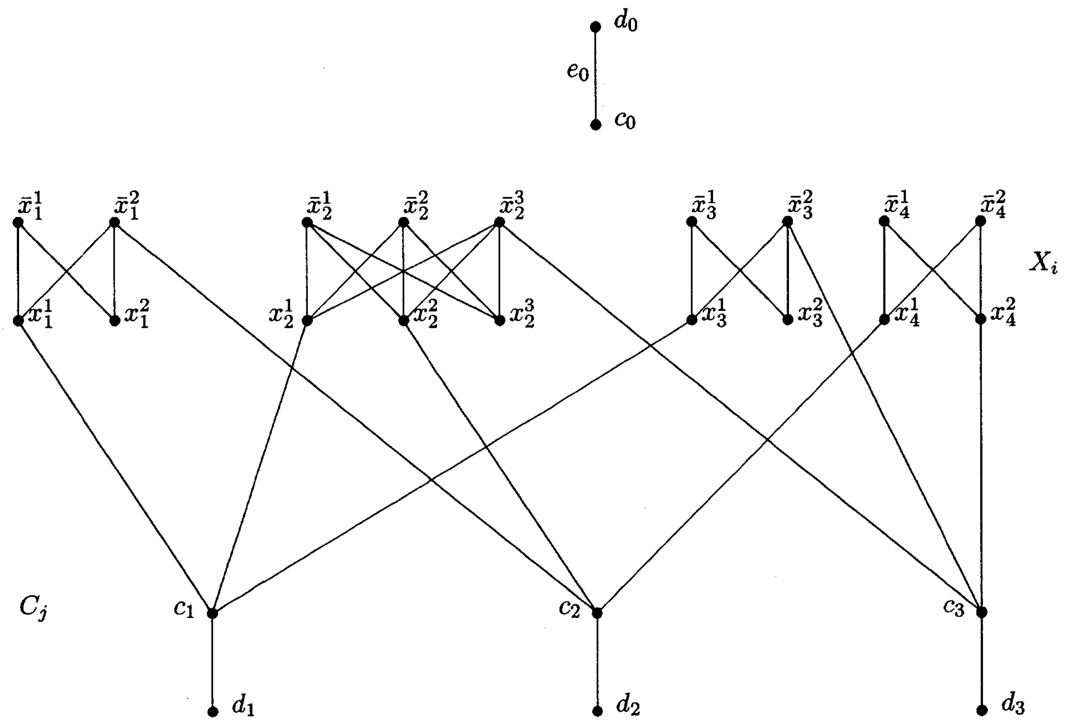

図 1: $\phi = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4)$ の場合のグラフ

頂点を追加することにより新たに連結できる e_j の個数は高々 1 個である．

以上より，$G(x_i)(1 \leq i \leq n)$，$e_j(1 \leq i \leq m)$，$\{e_j^1, e_j^2, e_j^3\}(1 \leq i \leq m)$ をすべてカバーし，かつ S で誘導される G の部分グラフを連結にするためには，少なくとも $4m + \epsilon m$ 個の頂点を S に含める必要がある．さらに最小個数の頂点で E_{0i} をすべてカバーするためには，頂点 c_0 を S に加える必要がある．□

以上より，次の定理が成り立つ．

定理 1 G に関する CVC の 41/40 近似は NP 困難である．

定理 1 の証明

補題 1，2 と $\epsilon = 1/8$，$m > 1$ より

$$\frac{4m+1+\epsilon m}{4m+1} = 1 + \frac{\epsilon}{4+\frac{1}{m}} > 1 + \frac{1}{40} = \frac{41}{40}.\square$$

3. 辺縮約問題の近似困難性

前節の G のすべての辺 $E = \{u, v\}$ に関して新しい頂点 k を用意し，辺を $\{u, k\}$ と $\{k, v\}$ としたグラフを $G(2)$ とする．さらに，$G(2)$ の辺縮約問題の最適解を S_{ec} とする．性質 π が 縮約に対し遺伝的であり，2-連結グラフによって決定される場合，$|S_{ec}| = |S_{cvc}| + |E(G)| - 1$ が成り立つ [6]．

さらに，G に関する CVC の近似困難な比率を r_{cvc}，$G(2)$ に関する辺縮約問題の近似困難な比率を r_{ec} とすると，以下の補題が成り立つ．

補題 3 ϕ が充足される割当を持つ場合に対応する CVC の最適解を S，充足されない節を持つ場合に対応する CVC の最適解を S' とする．このとき，性質 π に関する辺縮約問題は，以下の比率 r_{ec}

$$r_{ec} = \frac{|S'| + |E(G)| - 1}{|S| + |E(G)| - 1}.$$

で近似することが NP 困難である．

MAX E3-SAT からリダクションされた CVC の問題例 G に関して

$$|E(G)| = m + 3m + 6m + 1 + \sum_{i=1}^{n} t_i^2 = 10m + 1 + \sum_{i=1}^{n} t_i^2.$$

が成り立つ．さらに ϕ におけるすべての変数の出現回数が定数 $(= l)$ の場合，$\sum_{i=1}^{n} t_i^2 = nl^2 = 3ml$ が成り立つ．

したがって，補題 1，補題 2 より $|S| = 4m+1, |S'| \geq 4m+1+\epsilon_l m$ となり

$$r_{ec} \geq 1 + \frac{\epsilon_l}{14+3l+1/m} > 1 + \frac{\epsilon_l}{15+3l}$$

が成り立つ．

以上より次の定理が成り立つ

定理 2 $G(2)$ の辺縮約問題が多項式近似不可能である定数 r が存在する．

Papadimitriou and Yannakakis[7] は $l = 29$ の場合に $\epsilon_l = 1/(8 \cdot 43) = 0.0029069767$ を示した．従って，$r = 1 + \epsilon_l/102 = 1.00002849977$ となる．

4. 今後の課題

ここでは，性質 π が 縮約に対し遺伝的であり，2-連結グラフによって決定される場合，π に関する辺縮約問題の近似困難な比率の下界が $1+\epsilon_l/(15+3l)$ であることを証明した（l は MAX E3-SAT の問題例における変数の出現回数，ϵ_l はその場合の近似困難な比率の下界）．今後の課題としては，下界のさらに大きな値を求めること，またここで仮定したグラフの性質以外のものについての辺縮約問題に関する近似困難比率の下界を求めることがあげられる．

5. 謝辞

この研究の一部は，2005 年度南山大学パッヘ研究奨励金（Pache Research Subsidy）I-A-2 の助成を受けて行ったものである．

参考文献

[1] C. Lund, and M. Yannakakis, "The approximation of maximum subgraph problems", *Proc. 20th Int. Colloquium on Automata, Languages and Programming.* **700**, pp.40-51, 1993.

[2] P. G. Kolaitis, and M. N. Thakur, "Approximation properties of NP minimization classes", *J. Comput. System Sci.* **50**, pp.391-411. 1995.

[3] T. Asano, T. Hirata, "Edge-contraction Problems", *J. Comput. System Sci.* **26**, pp.197-208. 1983.

[4] J. Håstad, "Some optimal inapproximability results", *Journal of ACM.*, **48**, pp.798-859, 2001.

[5] V. V. Vazirani, "*Approximation Algorithms*", Springer Verlag, 2001.

[6] M. R. Garey, D. S. Johnson, "The rectilinear Steiner tree problem is *NP*-complete", *SIAM J. Appl, Math.* **32**, pp.826-834. 1977.

[7] C. H. Papadimitriou, M. Yannakakis, "Optimization, Approximation, and Complexity Classes", *J. Comput. System Sci.* **43**, pp.425-440. 1991.