LA-005

項書換えシステムにおける可簡約演算子とその応用
Reducible operations of term rewriting systems and its application

中村 正樹[†] Masaki Nakamura　　**二木 厚吉**[†] Kokichi Futatsugi

1. はじめに

項書換えシステム (TRS) では，演算子をその役割から定義関数と構成子の二つに分けて考えることができる．構成子のみで構成される項（構成子項）は，モデル (代数) において要素に対応する．TRS の正規形は構成子項であることが望ましい．そのためには項に出現する定義関数が正規形を得るまでの簡約中に消去される必要がある．本論文では，そのような性質を持つ演算子を可簡約と呼び，基底項とソート情報に応じた可簡約性の概念を与える．またそれらの概念が隠蔽代数に基づく振舞仕様の分野で重要な性質の導出に応用できることを示す．

2. 項書換えシステムと可簡約演算子

TRS は等式 $l = r$ の集合（公理）を左から右に方向付けた規則 $l \to r$ の集合である．方向付けにより効果的な等式推論が得られる．TRS についての記法は文献 [1] に従う．TRS R から導かれる書き換え関係を $\to_R$ と書く．規則の左辺のインスタンスをリデックスと呼び，リデックスを含む項を可簡約という．項に対する可簡約の概念を演算子に対しても定義する．演算子 f を含む項が必ずリデックスを持つとき f を可簡約と呼ぶ．任意の項に対して演算子 f が可簡約であるための必要十分条件は，規則 $f(\vec{x_i}) \to r \in R$ が存在することである．ここで $\vec{x_i}$ はそれぞれ異なる変数の列とする．しかし TRS の長所の1つは左辺 $f(\vec{x_i})$ では定義しにくい関数の意味を $+(x, s(y)) \to s(+(x, y))$ や $cdr(cons(x, y)) \to y$ のようにパターンによって定義できることであり，このような左辺を持つという条件は TRS としてふさわしいものではない．変数を含まない項を基底であるという．対象の項を基底項に制限することで，パターンによる関数の意味定義を含む可簡約性の定義を与えることができる．

例 1. 自然数とその上の加算を与える TRS R_+ を考える．

$$R_+ = \left\{ \begin{array}{l} +(x, 0) \to x \\ +(x, s(y)) \to s(+(x, y)) \end{array} \right.$$

ここで演算子 $+$ は任意の項に対して可簡約ではない．実際，項 $+(0, x)$ は $+$ を含んでいるがリデックスがない．一方で任意の基底項においては可簡約であると言える．実際，$+(0, +(0, s(0)))$ という項においてはルートの $+$ は書き換えできないが，2引数目の $+(0, s(0))$ は2つ目の規則によって書き換えることができ，$+(0, +(0, s(0))) \to_{R_+} +(0, s(+(0, 0))) \to_{R_+} +(0, s(0)) \to_{R_+} s(+(0, 0)) \to_{R_+} s(0)$ と簡約により $+$ は消去される．

ある項が基底可簡約であるとは，項のすべての変数に任意の基底項を代入して得られる基底項が可簡約であることである [5]．項 $+(x, y)$ は基底可簡約である．項 $f(\vec{x_i})$ が基底可簡約なとき演算子 f を基底可簡約と呼ぶこととする．本論文では，可簡約演算子について，(1) 基底可簡約の一般化と (2) ソート情報に基づく可簡約の定義の二通りの拡張を与える．

TRS R_+ の例を再び考える．$+(x, y)$ が基底可簡約であるためには，任意の基底項 s, t に対して，$+(s, t)$ がリデックスを持つ必要があった．しかし $+$ が簡約されるために基底項である必要があるのは t だけである．実際，$+(x, 0)$，$+(x, s(s(0)))$，$+(x, +(s(0), 0))$ のように $+$ の2引数目のみが基底項であればリデックスが現れる．引数を限定した基底可簡約の一般化を以下で与える．

定義 1. 演算子 f，引数（自然数）の集合 I，任意の基底項 $t_i (i \in I)$ および項 $t_i (i \notin I)$ に対して，項 $f(\vec{t_i})$ が可簡約のとき，f を I 基底可簡約と呼ぶ．

演算子 $+$ は $\{2\}$ 基底可簡約である．基底正規形は I 基底可簡約演算子を含まないという性質が成り立つ．

次にソート情報に基づく可簡約性を提案する．ここからはソート付 TRS を扱う．対象の項を特別なソートの項に制限した可簡約性を定義する．

定義 2. ソートの集合 S に対して，演算子 f を含む任意の項 $t : s$ $(s \in S)$ が可簡約のとき f を S 可簡約と呼ぶ．

例 2. リストを表す TRS を考える．演算子 $car : L \to E$，$cdr : L \to L$，$cons : E \times L \to L$ とする．

$$R_L = \left\{ \begin{array}{l} car(cons(x, y)) \to x \\ cdr(cons(x, y)) \to y \end{array} \right.$$

演算子 $cons$ は $\{E\}$ 可簡約である．実際，$cons$ は項 $t : E$ のルートになれないため存在するならルートに最も近い $cons$ に対してリデックス $car(cons(..))$ または $cdr(cons(..))$ がある．

3. I 基底可簡約の応用：文脈依存書き換え

I 基底可簡約の応用として，書き換えを I のみに制限したときの正規形に関する性質がある．この性質を形式化するため文脈依存書き換え (CSR) の概念を導入する [6]．Σ を演算子，$\mathcal{N}$ を自然数の集合とする．

定義 3.[6] TRS R，写像 $\mu : \Sigma \to \mathcal{P}(\mathcal{N})$ に対して，CSR $\to_\mu$ は，(1)$l \to r \in R$，代入 θ に対して $l\theta \to_\mu r\theta$，(2) ある $i \in \mu(f)$ に対して $s_i \to_\mu t_i$ かつそれ以外の $j \neq i$ に対して $s_j \equiv t_j$ のとき $f(\vec{s_i}) \to_\mu f(\vec{t_i})$ で定義される．

簡単に言うと，$\to_\mu$ では演算子 f の $\mu(f)$ に含まれない引数の書き換えが禁止されている．例えば，$\mu(+) = \{2\}$ のとき $+(s(0), +(0, 0)) \to_\mu +(s(0), 0)$ であるが $+(+(0, 0), s(0)) \not\to_\mu +(0, s(0))$ である．引数の書き換えを禁止されていない演算子を自明といい，すべての演算子が自明なとき μ を自明という．自明な μ では $\to_R = \to_\mu$ である．CSR $\to_\mu$ の正規形を μ 正規形と呼ぶ．CSR では引数の書き換えを禁止しているため，正規形に関する

[†]北陸先端科学技術大学院大学 情報科学研究科，JAIST

性質が重要になる．一般に自明でない μ に対して，μ 正規形の集合と正規形の集合は一致しない．CSR の研究では，μ 正規形が正規形より弱い頭部正規形であるための条件は得られているが，正規形であるための条件はあまり研究されていない．I 基底可簡約性を用いて正規形と μ 正規形が一致する十分条件を与えることができる．

定理 1. CSR μ に対して，すべての自明でない f が $\mu(f)$ 基底可簡約のとき，基底 μ 正規形は正規形である．

R_+ において $\mu(+) = \{2\}$，$\mu(s) = \{1\}$ のとき，$+$ は $\mu(+)$ 基底可簡約で s は自明であるので基底 μ 正規形は正規形である．μ によって引数の書き換えが禁止されているため，一般に $\rightarrow_\mu$ は $\rightarrow_R$ に比べて書き換えの効率および停止性の面で長所を持つ．基底項の簡約は必ず基底項を返すため，本定理により，基底項の簡約に対し，より効率的で停止性を示しやすい書き換えを得られる．

4. I 基底 S 可簡約の応用：隠蔽代数

隠蔽代数は，システムの構造を隠し，振る舞いを記述することで，より一般的な仕様記述を可能にする基礎理論である [3, 4]．隠蔽代数では，隠蔽ソート H と呼ばれる特別なソートが 1 つ存在し，システムの状態は隠蔽ソートの項として表される．隠蔽ソート以外のソートは可視ソートと呼び，その集合を V と書く．システムの振る舞いを記述するための演算子として，観測演算と操作演算の 2 種類の振舞演算がある．振舞演算は，引数にただ 1 つだけ隠蔽ソートを持ち，返し値が可視ソートのとき観測演算，隠蔽ソートのとき操作演算という．隠蔽代数におけるすべての項は，振舞演算の引数以下に観測演算が現れないと仮定する．隠蔽代数に基づく TRS の例をあげる．

$$R_A = \begin{cases} val(add(0,x)) \rightarrow val(x) \\ val(add(s(x),y)) \rightarrow s(val(add(x,y))) \end{cases}$$

ここで $val : H \rightarrow Nat$，$add : Nat \times H \rightarrow H$ とするとそれぞれ観測，操作に対応する．隠蔽代数では，状態（隠蔽ソートの項）の等価関係は振舞等価として定義される．状態 s，t が任意の操作列の適用後，任意の観測において等しいとき振舞等価といい，s, t が等価 ($\leftrightarrow^*$) または振舞等価のとき，$s \sim t$ と書く．この例では，$add(0, add(s(0), z))$ と $add(s(0), add(0, z))$ は通常の等価関係では等しくないが振舞等価である．実際それぞれの観測値は $s(val(z))$ であり，それぞれに同じ $add(n_i, .)$ を何度適用しても観測値は等しいままである．

隠蔽代数における可簡約演算子の概念を定義する．

定義 4. 演算子 f が可視ソート V の引数の集合 I に対し I 基底 V 可簡約のとき，振舞可簡約と呼ぶ．ただし I 基底 S 可簡約とは，項 $t : s$ $(s \in S)$ の f の出現すべての I 引数が基底項のとき t がリデックスを含むと定義する．

操作演算 add は振舞可簡約である．実際，可視ソート $V = \{Nat\}$ の項中の $add(s, t)$（ただし s は基底項）の出現のうち一つは必ずリデックス $val(add(s, t))$ になっているはずである．振舞可簡約性は操作演算の完備な定義を保証していると言える．

隠蔽代数の重要な性質の一つにコヒーレントがある．演算子 f の適用が（振舞）等価性を保持する ($\overrightarrow{s_i} \sim \overrightarrow{t_i} \Rightarrow f(\overrightarrow{s_i}) \sim f(\overrightarrow{t_i})$) とき，$f$ をコヒーレントと呼ぶ．コヒーレントの応用は大きく 2 通りある [4]．1 つは隠蔽代数の重要な性質である振舞等価の証明作業の軽減である．振舞等価は振舞演算すべての組み合わせに対して定義されているので振舞演算の数が多いとそれだけ証明が困難になる．コヒーレントな振舞演算は等価性の証明から除くことができる．R_A では add がコヒーレントになるため振舞等価の証明に必要ない．実際，$s \sim t \Leftrightarrow val(s) = val(t)$．

もう 1 つの応用は，振舞演算として定義できない隠蔽ソートの演算子に対してである．例えば，R_A に演算子 $add2 : H \times H \rightarrow H$ を定義したいが，引数に隠蔽ソートを 2 つ持っているので操作演算になれない．振舞等価が合同であるためには，そのような演算子はコヒーレントでなければならない [4]．規則 $val(add2(x,y)) \rightarrow val(x)+val(y)$ があるとき $add2$ はコヒーレントになる．

任意の項が正規形を持っているとき弱正規 TRS という．停止性はその十分条件である．振舞可簡約によるコヒーレントの十分条件を与える．

定理 2. TRS R が弱正規性を満たし，振舞演算でない演算子がすべて振舞可簡約ならば，すべての演算子はコヒーレントである．

証明スケッチとして $f : H \rightarrow H$ のとき，$s \sim t \Rightarrow f(s) \sim f(t)$ を示す．C を任意回の操作演算適用後の任意の観測演算の適用とする (E.g. $val(add(0, add(0, \Box)))$)．弱正規性と可簡約性により，$C[f(x)]$ は振舞演算のみからなる正規形 $C'[x]$ を持つ．$s \sim t$ より $C'[s] = C'[t]$ である．したがって $C[f(s)] = C'[s] = C'[t] = C[f(t)]$ となり，$f(s) \sim f(t)$ である．

本論文で提案した可簡約演算子の決定可能性は，基底可簡約項の決定可能性を論じた文献 [5] などから導くことができる．コヒーレントの十分条件の 1 つに観測完備 [2] がある．観測完備はシンタクティックな条件であり，弱正規性，可簡約性という TRS の諸性質から得られる本定理はその一般化になっている．$add2$ は観測完備であるが，add は観測完備ではない．本成果の応用は振舞仕様一般を対象としているが，特に CSR の実装である評価戦略 [7] を持ち，振舞仕様が記述できる仕様記述言語 CafeOBJ[3] に直接の貢献がある．

参考文献

[1] F. Baader and T. Nipkow, "Term rewriting and all that," Cambridge University Press, 1998.

[2] M. Bidoit and R. Hennicker. Observer complete definitions are behaviourally coherent. In Proc. OBJ/CafeOBJ/Maude Workshop at Formal Methods'99, Toulouse, France, pages 83-94, 1999.

[3] R. Diaconescu and K. Futatsugi, "CafeOBJ report," World Scientific, 1998.

[4] R. Diaconescu and K. Futatsugi, *behavioural coherence in object-oriented algebraic specification*, J. Universal Computer Science, 6(1), 74-96, 2000.

[5] D. Kapur, P. Narendran and H. Zhang, *On sufficient completeness and related properties of term rewriting systems,* Acta Informatica, 24(4): 395-415, 1987.

[6] S. Lucas, *Context-sensitive computations in functional and functional logic programs,* J. Functional and Logic Programming, 1998(1), 1-61, 1998.

[7] M. Nakamura, "Evaluation strategy for term rewriting systems," Ph.D. thesis, Japan Advanced Institute of Science and Technology, 2002.