

べき乗法による2次元デジタルフィルタの 設計仕様行列の非負分解†

村上 純^{††} 鄧 天 波^{††} 田 所 嘉 昭^{††}

2次元デジタルフィルタ(2DDF)は画像処理等に用いられる基本的な処理技術である。特に、分母分離形と呼ばれる2DDFは1次元デジタルフィルタ(1DDF)の縦続接続として表現することができる。この特徴を利用することにより、2DDF設計は簡単になる。具体的には、設計仕様の周波数応答行列を何らかの分解法により、ベクトルの積の和に分解する。これらのベクトルを1DDFの設計仕様と考えて、1入力多出力と多入力1出力の2つの1DDFを設計し、縦続接続することにより2DDFが得られる。物理的に、周波数応答の振幅は非負であるから、分解したベクトルの成分も非負でなければならない。従来の分解法ではこのような行列の非負分解は不可能であったが、近年、逐次特異値分解(ISVD)法という非負分解法が提案された。この手法は、分解の各段でSVDを行い、逐次近似的に非負分解を求めるものである。しかし、計算時間が行列のサイズ($m \times m$)に対して m^3 のオーダーであり、効率的ではない。われわれは、固有値計算に用いられる、べき乗法を応用して行列の非負分解を行う新しいアルゴリズムを開発した。本手法は、計算時間が m^2 のオーダーであり、ISVD法と比較して誤差も小さくなることが分かった。

1. はじめに

2次元デジタルフィルタ(2DDF)は画像処理等に用いられる基本的な処理技術である¹⁾。特に分母分離形と呼ばれるタイプの2DDFは、設計が容易なことからよく用いられる。この場合には、設計仕様の周波数応答行列をベクトルの積の和に分解すれば、1次元デジタルフィルタ(1DDF)の設計問題に帰着できる²⁾。すなわち、得られたベクトルを1次元の周波数仕様と考えると、1入力多出力と多入力1出力の1DDFの縦続接続として2DDFを実現することができる。

設計仕様行列からベクトルの積の形式への分解にはLU分解や特異値分解(SVD)等が用いられる³⁾。物理的に、周波数応答の振幅は非負であるから、ベクトルのすべての成分は非負となる必要がある。従来の分解法ではこのような非負ベクトルへの分解は不可能であった。しかし、近年、分解の各段においてSVDを用いて、逐次近似的に非負ベクトルを計算する手法が開発されている^{4),5)}。この手法は、逐次特異値分解(ISVD)法と名付けられているが、計算時間および精度の点から必ずしも満足できる方法ではない。

本論文では、べき乗法を利用して2DDFの設計仕

様行列の非負分解を行う新しいアルゴリズムを提案する。デジタルフィルタの設計では、行列のサイズが 20×20 程度までの行列を考えれば十分であり、設計仕様行列を近似する際の計算精度は誤差が5%程度で十分である⁶⁾。したがって、このような仮定の下でISVD法と比較検討を行った。べき乗法は、行列の固有値計算法の一つであり、アルゴリズムが簡単で、計算時間が速いことから、絶対値最大の固有値と固有ベクトルの計算に用いられる。

2. 2DDFの設計仕様行列の非負分解

2.1 行列の特異値分解

行列をベクトルの積の和の形に分解する一般的な方法として、特異値分解がある⁴⁾。 (m, n) 行列 A のSVDは

$$A = UDV^T = \sum_{i=1}^r d_i u_i v_i^T \quad (1)$$

で定義される。ここで、 r は行列 A のランク、 U は (m, m) 直交行列、 V^T は (n, n) 直交行列の転置、 D は対角成分に特異値 d_i を持つ (m, n) 対角行列である。 u_i, v_i は行列 U, V の i 列、すなわち左特異ベクトル、右特異ベクトルで、

$$Av_i = d_i u_i, \quad (2)$$

$$A^T u_i = d_i v_i \quad (3)$$

の関係がある。

式(1)は行列が、ベクトルの積の和の形に分解できることを示している。

† Non-Negative Decomposition of Specification Matrices of Two-Dimensional Digital Filters by the Power Method by JUN MURAKAMI, TIAN-BO DENG and YOSHIKI TADOKORO (Department of Information and Computer Sciences, Faculty of Engineering, Toyohashi University of Technology).

†† 豊橋技術科学大学工学部情報工学系

2.2 逐次特異値分解法による非負分解法

2DDF の設計では、行列を非負ベクトルの積の和に分解する必要がある。そのような手法として近年提案された ISVD 法の概略を述べる^{9), 6)}。

行列 A の SVD は式(1)で表される。ただし、 $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_r \geq 0$ とする。行列 A は物理的性質から非負行列であるから、ベクトル u_i, v_i はすべての成分が非負である非負特異ベクトルとなる⁷⁾。したがって、

$$B_1 = d_1 u_1 v_1^T \quad (4)$$

を A の近似行列の第1段目(第1項)とする。

次に、残差行列

$$A_1 = A - B_1 \quad (5)$$

は一般に非負行列ではないので、

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= A_1^+ - A_1^-, \\ A_1^+(i, j) &= \max(A_1(i, j), 0), \\ A_1^-(i, j) &= -\min(A_1(i, j), 0) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

として、2つの非負行列に分解する。ただし、 \max と \min はそれぞれ最大値、最小値を表している。 A_1^+, A_1^- について SVD を行うと、

$$A_1^+ = \sum_{i=1}^{r^+} d_{1i}^+ u_{1i}^+ (v_{1i}^+)^T, \quad (7)$$

$$A_1^- = \sum_{i=1}^{r^-} d_{1i}^- u_{1i}^- (v_{1i}^-)^T \quad (8)$$

となる。 r^+, r^- はそれぞれ行列 A^+, A^- のランクである。 $u_{1i}^+, v_{1i}^+, u_{1i}^-, v_{1i}^-$ は非負特異ベクトルであるから、

$$B_1^+ = d_{11}^+ u_{11}^+ (v_{11}^+)^T, \quad (9)$$

$$B_1^- = d_{11}^- u_{11}^- (v_{11}^-)^T \quad (10)$$

の近似行列の候補が得られる。そこで

$$e_1^+ = \|A_1 - B_1^+\|, \quad (11)$$

$$e_1^- = \|A_1 - B_1^-\| \quad (12)$$

を評価し、小さいほうを第2段目での近似行列

$$B_2 = \begin{cases} B_1^+ & (e_1^+ \leq e_1^-) \\ B_1^- & (e_1^+ > e_1^-) \end{cases} \quad (13)$$

とする。すなわち、行列 B_2 が近似行列の第2項目である。ただし、式(11)、(12)ではユークリッドノルム⁸⁾を用いている。以下、本論文ではノルムはすべてユークリッドノルムを用いる。

さらに、残差行列

$$A_2 = A_1 - B_2 \quad (14)$$

について同様の操作を繰り返す。この操作を残差ベクトルのノルムが十分小さくなるまで続けると、最終的に、行列 A を非負特異ベクトルの外積項の和で近似することができる。

3. べき乗法による非負分解法

3.1 べき乗法の特異値分解計算への応用

任意に選んだ初期ベクトルに、行列を繰り返し掛けると、その行列の絶対値最大の固有値に対する固有ベクトルの成分が他の方向の成分に比べて次第に優越になるという原理が、べき乗法の基本である。この計算法はアルゴリズムが簡単で使いやすいので、絶対値最大の固有値と固有ベクトルのみが必要な場合によく用いられる。また、このべき乗法は、SVD の計算にも利用することができ^{9), 10)}、逐次的に非負分解を計算する場合には、最大特異値と特異ベクトルのみが必要であるから都合がよい。

(m, n) 行列 A に対して、初期ベクトル x_0 (成分数 m)、 y_0 (成分数 n) を任意に選ぶ。

$$x_k = A y_{k-1}, \quad k=1, 2, \dots, \quad (15)$$

$$y_k = A^T x_{k-1}, \quad k=1, 2, \dots \quad (16)$$

として、 A または A^T を掛ける操作を繰り返す。ベクトル x_0, y_0 は A の特異ベクトルの1次結合で表現することができ、係数を a_i, b_i とすると、

$$x_0 = \sum_{i=1}^r a_i u_i, \quad (17)$$

$$y_0 = \sum_{i=1}^r b_i v_i \quad (18)$$

となる。実際の計算では x_k, y_k はノルムが1となるように正規化を行って、

$$x_0' = \alpha_0 x_0, \quad (19)$$

$$y_0' = \beta_0 y_0 \quad (20)$$

とする。ただし、 $\alpha_0 = 1/\|x_0\|$ 、 $\beta_0 = 1/\|y_0\|$ である。

$2k$ 回目の反復で x_{2k}', y_{2k}' は、

$$\begin{aligned} x_{2k}' &= \alpha_{2k}' \sum_{i=1}^r a_i d_i^{2k} u_i \\ &= \alpha_{2k}' a_1 d_1^{2k} \left\{ u_1 + \sum_{i=2}^r \frac{a_i}{a_1} \left(\frac{d_i}{d_1} \right)^{2k} u_i \right\}, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} y_{2k}' &= \beta_{2k}' \sum_{i=1}^r b_i d_i^{2k} v_i \\ &= \beta_{2k}' b_1 d_1^{2k} \left\{ v_1 + \sum_{i=2}^r \frac{b_i}{b_1} \left(\frac{d_i}{d_1} \right)^{2k} v_i \right\}, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\alpha_{2k}' = \alpha_0 \beta_1 \alpha_2 \dots \beta_{2k-1} \alpha_{2k}, \quad (23)$$

$$\beta_{2k}' = \beta_0 \alpha_1 \beta_2 \dots \alpha_{2k-1} \beta_{2k} \quad (24)$$

となる。ただし、 $\alpha_j = 1/\|x_j\|$ 、 $\beta_j = 1/\|y_j\|$ である。

2以上の i に対して $|d_i/d_1| \leq 1$ であるから、十分大きい k について

$$x_{2k}' \approx \alpha_{2k}' a_1 d_1^{2k} u_1, \quad (25)$$

$$y_{2k}' \approx \beta_{2k}' b_1 d_1^{2k} v_1 \quad (26)$$

となり、最大特異値に対する特異ベクトル u_1, v_1 の定数倍のベクトルが得られる。また、式(25), (26)で $x_{2k}', u_1, y_{2k}', v_1$ はノルムが1に正規化されているので、式(23), (24)から

$$\alpha_0 \beta_1 \alpha_2 \cdots \beta_{2k-1} \alpha_{2k} a_1 d_1^{2k} \doteq 1, \quad (27)$$

$$\beta_0 \alpha_1 \beta_2 \cdots \alpha_{2k-1} \beta_{2k} b_1 d_1^{2k} \doteq 1 \quad (28)$$

となる。同様に x_{2k-1}', y_{2k-1}' の場合には

$$\beta_0 \alpha_1 \beta_2 \cdots \beta_{2k-2} \alpha_{2k-1} b_1 d_1^{2k-1} \doteq 1, \quad (29)$$

$$\alpha_0 \beta_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{2k-2} \beta_{2k-1} a_1 d_1^{2k-1} \doteq 1 \quad (30)$$

となる。式(27), (30)から

$$d_1 \doteq 1/\alpha_{2k}, \quad (31)$$

式(28), (29)から

$$d_1 \doteq 1/\beta_{2k} \quad (32)$$

の関係が得られるので、これらの式から最大特異値を計算することができる。以上がべき乗法による最大特異値と特異ベクトルの計算の原理である。

3.2 べき乗法の非負分解への応用

べき乗法による最大特異値と特異ベクトルの計算アルゴリズムを部分的に修正すると、非負分解の計算に応用することができる。すなわち式(15), (16)の反復の過程で、反復ベクトル x_k を

$$\left. \begin{aligned} x_k &= x_k^+ - x_k^-, \\ x_k^+(i) &= \max(x_k(i), 0), \\ x_k^-(i) &= -\min(x_k(i), 0) \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

として、正の成分で構成されるベクトルと負の成分で構成されるベクトルに分ける。ベクトル y_k についても同様に

$$\left. \begin{aligned} y_k &= y_k^+ - y_k^-, \\ y_k^+(i) &= \max(y_k(i), 0), \\ y_k^-(i) &= -\min(y_k(i), 0) \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

とする。これらのベクトルについてノルムを計算し、大きいほうを修正反復ベクトル

$$\hat{x}_k = \begin{cases} x_k^+ (\|x_k^+\| \geq \|x_k^-\|) \\ -x_k^- (\|x_k^+\| < \|x_k^-\|) \end{cases} \quad (35)$$

$$\hat{y}_k = \begin{cases} y_k^+ (\|y_k^+\| \geq \|y_k^-\|) \\ -y_k^- (\|y_k^+\| < \|y_k^-\|) \end{cases} \quad (36)$$

とする。つまり、反復ベクトル x_k, y_k が特異ベクトル u_1, v_1 に近づく過程において、1個でも負(または正)の成分が現れたら強制的に0にする。このような修正を施し、反復ベクトルとして \hat{x}_k, \hat{y}_k を用いれば、最終的に行列を非負分解するベクトルが得られる。

4. 計算結果

4.1 2DDF の設計仕様行列の構成

周波数軸 ω_1 と ω_2 の平面上のサンプル点を $(\omega_{1m}, \omega_{2n})$ で表し、次のような $(M+1) \times (N+1)$ 個のサンプル点をとることにする。

$$\left. \begin{aligned} \omega_{1m} &= m\pi/M, & 0 \leq m \leq M, \\ \omega_{2n} &= n\pi/N, & 0 \leq n \leq N. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

各サンプル点での周波数応答の振幅 $H_d(\omega_{1m}, \omega_{2n})$ から設計仕様の周波数応答行列 A を

$$A = \begin{bmatrix} H_d(0, 0) & H_d(0, 1) & \cdots & H_d(0, N) \\ H_d(1, 0) & H_d(1, 1) & \cdots & H_d(1, N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_d(M, 0) & H_d(M, 1) & \cdots & H_d(M, N) \end{bmatrix} \quad (38)$$

と構成する。ただし、各成分は $H_d(\omega_{1m}, \omega_{2n})$ であるが、簡単化のために $H_d(m, n)$ で表した。具体例として、図1に示したような

$$H_d(\omega_{1m}, \omega_{2n}) = \begin{cases} 1 & (R \leq 0.4) \\ (0.6-R)/0.2 & (0.4 \leq R \leq 0.6) \\ 0 & (R \geq 0.6) \end{cases} \quad (39)$$

の特性を持つ低域通過フィルタを考える。ここで R は

$$R = \sqrt{\omega_{1m}^2 + \omega_{2n}^2} / \pi \quad (40)$$

である。

4.2 計算結果の比較

われわれの提案するべき乗法による行列の非負分解法を、従来の ISVD による方法と比較する。

図2に $M=N=10$ の場合の計算結果の各段階の誤差を10段(10項)まで示す。ただし、初めに与えられた周波数応答行列のノルムを100%としたとき、近

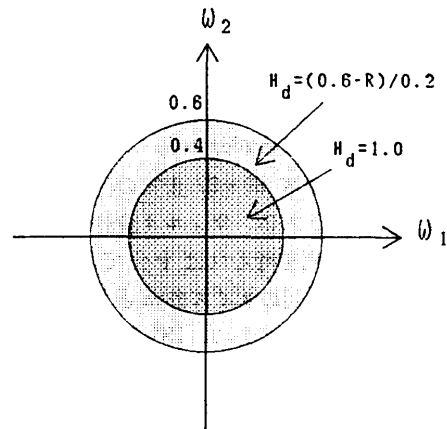


図1 2次元周波数応答特性の例
Fig. 1 Example of 2-D frequency response.

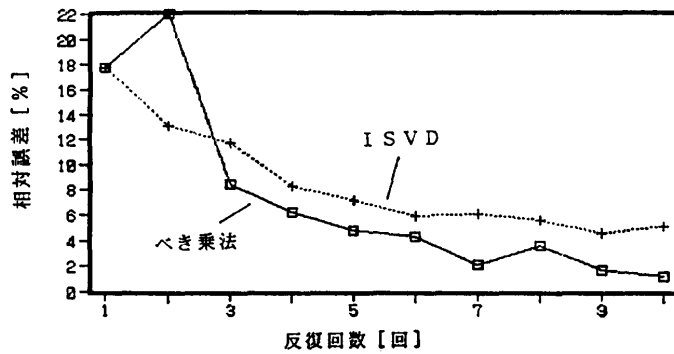


図2 収束性の比較

Fig. 2 Comparison of convergence characteristics.

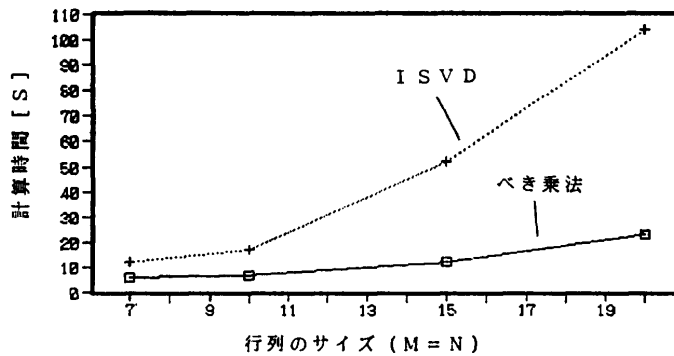


図3 計算時間の比較

Fig. 3 Comparison of computation time.

似結果の行列から計算した残差行列のノルムをパーセントで示した。べき乗法では2段目の誤差が1段目よりも大きくなるが、3段目から急激に減少し、10段目ではISVDの約1/4に誤差を小さくすることができる。M, Nを大きくしてもほぼ同様の結果が得られる。デジタルフィルタ設計では、なるべく少ない項数で元の行列を近似することが要求され、計算精度は誤差が5%程度で十分である。べき乗法では5段目の誤差が約5%となるのに対して、ISVDでは誤差は約7%であるから、べき乗法を用いたほうが少ない項数でよい近似となることが分かる。

また、図3はサイズ20×20までの行列についての計算時間の比較である。フィルタ設計では、20×20程度のサイズの行列を考えれば十分である。一般にSVDの計算は、行列のサイズをmとしたとき m^3 のオーダーの計算量が必要であり、ISVDでは各段で2回ずつSVDの計算を行うのでかなりの計算時間がかかることになる。一方、べき乗法は m^2 のオーダーであり、非負分解も同程度の計算量であるから、理論的には計算時間はほぼmのオーダーで短縮できる。グラフで

はmの値が小さいため、これほどの減少は示していないが、 $m=20$ のところで約1/5の減少になっている。

なお、計算はパーソナル・コンピュータ、NEC-PC 9801-NS (32ビットCPU) を使用し、Fortranの単精度演算で行った。

5. おわりに

べき乗法を応用した2DDF設計仕様行列の非負分解法が、ISVDと比較して収束性、計算時間の点で有利であることを示した。ただし図2で、べき乗法の2段目での誤差が1段目より大きくなることは改善すべき問題点である。2段目では、1段目の分解で得られた近似行列を、元の行列Aから引いて残った行列の近似を行う。1段目の分解はAが非負行列であるから、通常のSVDとなり2乗誤差が最小である。このような場合、残差行列の構成成分には、正の値と負の値が確率的にはほぼ同数存在すると考えられる。この行列を2つのベクトルの積で近似すると、各ベクトルは正負ほぼ同数の成分を持つことになる。ところが、べき乗法を修正した際、式(35)、(36)で強制的に、反復ベクトルの非零

の成分がすべて正または負となるようにしたので、約半数の成分が無視されることになる。これが、2段目での誤差が大きくなる原因であり、元の行列によらず、同様の条件の下で、本手法のように反復ベクトルの非負(または非正)の成分を無視すると起こりうる現象である。例えば、図2の8段目にも前段より大きな誤差が現れている。今後、この点について改善を試みる予定である。

謝辞 有益なご助言をいただいた査読者に感謝する。なお、本論文は情報処理学会数値解析研究会で行った発表¹¹⁾の内容に加筆、修正したもので、熱心にご検討くださった研究会の方々に感謝する。

参考文献

- 1) Dudgeon, D. E. and Mersereau, R. M.: *Multidimensional Digital Signal Processing*, Prentice-Hall (1984).
- 2) 樋口龍雄: デジタル信号処理の基礎, p. 147, 昭晃堂 (1986).
- 3) 川又政征, 樋口龍雄: 多次元信号処理の基礎 (IV) — 多次元デジタルフィルタの設計 (近似

- 法)一, 信学誌, Vol. 74, No. 8, pp. 847-856 (1991).
- 4) Golub, G. H. and Reinsch, C.: Singular Value Decomposition and Least Squares Solutions, *Numer. Math.*, Vol. 14, pp. 403-420 (1970).
- 5) Deng, T. B. and Kawamata, M.: Design of Two-Dimensional Recursive Digital Filters Based on the Iterative Singular Value Decomposition, *Trans. IEICE*, Vol. E73, No. 6, pp. 882-892 (1990).
- 6) Deng, T. B. and Kawamata, M.: Design of Separable-Denominator 2-D Digital Filters Based on the Iterative Singular Value Decomposition of the Prescribed Magnitude Specification Matrix, *Proc. ICSP '90*, pp. 777-780 (1991).
- 7) Twogood, R. E. and Mitra, S. K.: Computer-Aided Design of Separable Two-Dimensional Digital Filters, *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, Vol. ASSP-25, pp. 165-169 (1977).
- 8) 柳井晴夫, 竹内 啓: 射影行列・一般逆行列・特異値分解, p. 42, 東京大学出版会 (1983).
- 9) Good, I. J.: Some Applications of the Singular Decomposition of a Matrix, *Technometrics*, Vol. 11, No. 4, pp. 823-831 (1969).
- 10) 村上 純, 大岩 元: べき乗法による特異値と特異ベクトルの計算, 信学春全大, D-1 (1990).
- 11) 村上 純, 鄧 天波, 田所嘉昭: べき乗法による行列の非負分解, 情報処理学会研究報告, NA-38-2 (1991).

(平成3年9月9日受付)

(平成4年2月14日採録)



村上 純 (正会員)

昭和34年生。昭和57年豊橋技術科学大学工学部情報工学課程卒業。昭和59年同大学大学院修士課程修了。同年熊本電波高専情報工学科助手, 平成2年同講師, 平成3年豊橋技術科学大学情報工学系講師。デジタル信号処理への特異値分解の応用に興味を持っている。電子情報通信学会, 応用物理学会各会員。



鄧 天波

1984年大連軽工業学院・工・自動制御卒業。1988年宇都宮大学大学院修士課程修了。1991年東北大学大学院博士課程修了。工学博士。豊橋技術科学大学情報工学系助手を経て, 現在, 科学技術庁基礎科学特別研究員。音声情報処理および多次元デジタルフィルタの最適設計に関する研究に従事。電子情報通信学会会員。



田所 嘉昭 (正会員)

昭和18年生。昭和42年東北大学工学部電子工学科卒業。昭和44年同大学大学院修士課程修了。工学博士(東北大学)。昭和44年より東北大学工学部助手, 昭和53年豊橋技術科学大学講師, 昭和61年同大学教授。デジタル信号処理とその応用, 福祉工学に関する研究に従事。電気学会, 電子情報通信学会, 計測自動制御学会, IEEE 各会員。