

新しい電磁場数値過渡解法 Transient Green Method†

阿部博史** 速水謙††

電磁場の過渡解析を行うための新しい数値解法を提案する。本手法は次の3つの概念から成る。第一は、磁場ベクトルポテンシャルの支配方程式である線型の波動方程式が調和振動子方程式に変換できること、第二は、調和振動子方程式の過渡解を Green の手法により数値的に解くこと、第三は、状態変数を用いることにより Green の手法による計算を高速化できることである。本手法を Transient Green Method (TGM) と呼ぶことにし、まず、その定式化を与える。次に、TGM の数値解法としての特性を調べるために1次元問題の数値実験を行い、現在良く用いられる過渡解析法の差分法と比較した。その結果、TGM は差分法と比べて、同等の空間格子数に対し精度が、最高で100倍高く、計算格子の増加に対する真値への収束性も差分法を上回った。また、TGM は陽解法であるが、差分陽解法のような数値不安定は生じない。そして、差分法と同精度の TGM 解を得るのに必要な有効計算量は差分法の計算量よりも少ない。

1. はじめに

現在良く用いられる偏微分方程式の数値解法は、大別して、有限差分法¹⁾、有限要素法²⁾、境界要素法³⁾ としてスペクトル法⁴⁾などが上げられる。これらの数値解法には、それぞれ一長一短があり、解析する問題によって使い分けるのが通常である。例えば、解析に高い空間精度が要求される問題にはスペクトル法、複雑な形状物体の解析には有限要素法、そしてかつ一様媒体の線型問題に対しては境界要素法、等々である。しかし、これらの手法で過渡解析を行うには、時間微分の有限差分近似に、各手法による空間微分項の離散化方程式を組み合わせた混合法を用いるのが通常である。つまり、過渡解析する場合には有限差分法が主たる役割を果たしている。

さて、この有限差分法による過渡解法を大別すると、陽解法 (explicit) と陰解法 (implicit) に分けられる。この陽解は、時間ステップを進めて次ステップの物理量を算出する際、現ステップの量から直接 (陽) に算出する解法か、連立1次方程式を解いて次ステップの物理量を得る (陰) 解法かを示している。

一般に陽解法は、計算量が少なく、またスーパーコンピュータ上でベクトル化しやすいという利点がある。その反面、時間ステップをある制約を越えて大きくすると、数値不安定が生じて数値解が発散する不便があ

る。この時間ステップに対する双曲型方程式の制約の1つとして Courant Friedrichs Lewy (CFL) 条件が知られており、双曲型方程式の有限差分近似の場合、

$$C_{CFL} \equiv V \frac{\delta t}{\delta x} < 1$$

で与えられる。ただし、 δx 、 δt 、 V は、それぞれ空間ステップ、時間ステップ、そして系の特性速度を表す。

この陽解法の時間ステップに対する制約を取り除いた方法が陰解法である。しかし、次ステップの量を得るのに、毎回連立1次方程式を解かなければならず、大規模な計算が必要になる。

つまり、陽解法においては計算量は少ないが数値不安定性の問題が存在し、陰解法においては数値不安定問題は生じないが計算量が多くなる、という計算量と数値安定性のトレードオフの関係が存在する。

大規模な3次元初期値問題を数値的に扱うためには、計算量が少なく、かつ安定に計算を進められる手法が必要である。また、コンピュータの記憶容量を節約するため、単位計算格子数に対する精度が高いことも重要である。

これらの諸問題を解決する手法として、本論文は線型波動方程式の新しい数値過渡解法を提案する^{5),6)}。

本論文において、まず、電磁場方程式に対する新解法の定式化を与える。次に1次元の数値シミュレーションを行い、新解法と、差分法による数値解を比較し、考察を加える。

表記法として、論文中的のゴシック体アルファベットの標準体はベクトルを表し、またベクトルを表すアルファベットの標準体はベクトルの長さを示すことにする。

† A New Numerical Method for Transient Electromagnetic Problems—Transient Green Method—by HIROSHI ABE and KEN HAYAMI (Information Basic Research Laboratory, C&C Information Technology Research Laboratories, NEC Corporation).

** 日本電気(株) C&C 情報研究所情報基礎研究部

2. 新数値解法の導出

2.1 Maxwell 方程式と調和振動子方程式

真空中での Maxwell 方程式は次式のとおりである。

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\rho, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (1)$$

ただし、 \mathbf{E} , \mathbf{B} , ρ , \mathbf{J} , c はそれぞれ電場、磁場、電荷密度、電流密度、光速を表す。また、単位系は Gauss 単位系を用いている。ここで Coulomb ゲージのベクトルポテンシャル \mathbf{A} およびスカラポテンシャル ϕ は

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \\ \mathbf{E} &= -\nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

と定義される⁷⁾。よって式(1)と(2)よりポテンシャルの支配方程式を得る。

$$\nabla^2 \phi = -4\pi\rho \quad (3)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_i \quad (4)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \mathbf{J}_i + \mathbf{J}_s \\ \nabla \times \mathbf{J}_i &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{J}_i &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

である。また、式(4)は電荷保存式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (6)$$

を満たすという条件を暗に用いている。

次に、このベクトルポテンシャル方程式を調和振動子方程式に変換できることを示す。この支配方程式の変換は新解法の大きな特徴である。

まずベクトルポテンシャルとスカラポテンシャルに Fourier 変換を適用すると、

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{A}(\mathbf{k}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{k} \quad (7)$$

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\mathbf{k}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{k} \quad (8)$$

ただし、 \mathbf{k} は波数ベクトルを表す。これらの方程式を式(4)、(3)に代入すると、

$$k^2 \mathbf{A}(\mathbf{k}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}(\mathbf{k}, t)}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_i(\mathbf{k}, t) \quad (9)$$

$$k^2 \phi(\mathbf{k}, t) = 4\pi\rho(\mathbf{k}, t) \quad (10)$$

を得る。 $\rho(\mathbf{k}, t)$ は、式(8)同様、 $\rho(\mathbf{x}, t)$ の Fourier 成分を表す。また、 $\mathbf{J}_i(\mathbf{k}, t)$ は、

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{J}(\mathbf{k}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{k} \quad (11)$$

$$\Delta \times (\nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{x}, t)) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}, t)) - \nabla^2 \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) \quad (12)$$

と、式(5)より、

$$\mathbf{J}_i(\mathbf{k}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{k}, t) - \frac{\mathbf{J}(\mathbf{k}, t) \cdot \mathbf{k}}{k^2} \mathbf{k} \quad (13)$$

で与えられる。

式(9)は、変位 $\mathbf{A}(\mathbf{k}, t)$ 、外力 $(4\pi/c)\mathbf{J}_i(\mathbf{k}, t)$ の線型調和振動子の方程式と同形である。

2.2 Green の方法

ここで考えるべき方程式は、式(9)で表される線型振動子の方程式である。まず、図1で表される時間的に不連続に変化する衝撃関数

$$\begin{aligned} I(t, t_n; \delta t) &= 0 & t < t_n - \frac{1}{2}\delta t_n \\ &= 1 & t_n - \frac{1}{2}\delta t_n \leq t \leq t_n + \frac{1}{2}\delta t_n \\ &= 0 & t_n + \frac{1}{2}\delta t_n < t \end{aligned} \quad (14)$$

に対する解を考えることにする。この衝撃関数に対する解を $G_n(\mathbf{k}, t)$ とすると、 $G_n(\mathbf{k}, t)$ は

$$k^2 G_n(\mathbf{k}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G_n}{\partial t^2} = I(t, t_n; \delta t_n) \quad (15)$$

を満たしている。

この方程式の解は次式のとおりである。

$$\begin{aligned} G_n(\mathbf{k}, t) &= -\frac{i \sin(kc\delta t_n/2)}{k^2} [e^{i kc(t-t_n)} - e^{-i kc(t-t_n)}] \\ & \quad (t \geq t_n + \delta t_n/2) \end{aligned} \quad (16)$$

次に任意の時間変化をする電流 $\mathbf{J}_i(\mathbf{k}, t)$ に対する解 $\mathbf{A}(\mathbf{k}, t)$ を、衝撃関数に対する応答関数 $G_n(\mathbf{k}, t)$ より求める方法について述べる。

任意に時間変化する電流 $\mathbf{J}_i(\mathbf{k}, t)$ は、図2に示すように衝撃関数の線型和として近似的に表すことができ

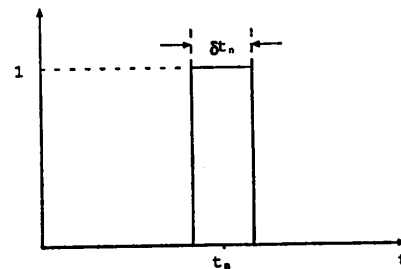


図1 衝撃関数, $I(t, t_n; \delta t)$
Fig. 1 Impulse function.

る。

$$J_i(\mathbf{k}, t) \approx \sum_n J_i(\mathbf{k}, t_n) I(t, t_n; \delta t) \quad (17)$$

よって、与えられた電流の時系列 $J_i(\mathbf{k}, t_n)$ に対する調和振動子方程式(9)の解は、

$$\begin{aligned} A(\mathbf{k}, t) &\approx \sum_n \frac{4\pi}{c} J_i(\mathbf{k}, t_n) G_n(\mathbf{k}, t) \quad (18) \\ &= - \sum_n \frac{4\pi}{c} J_i(\mathbf{k}, t_n) \frac{i \sin(kc\delta t_n/2)}{k^2} \\ &\quad \times [e^{ikc(t-t_n)} - e^{-ikc(t-t_n)}] \quad (19) \end{aligned}$$

で近似的に与えられる。

2.3 状態変数 F_n^\pm の導入

Greenの方法によると、電流時系列 $J_i(\mathbf{k}, t_n)$ に対する、任意の時刻 t におけるベクトルポテンシャル $A(\mathbf{k}, t)$ は、近似式(19)で与えられる。このまま複素数形式を保ち級数の部分を展開すると、

$$\begin{aligned} A(\mathbf{k}, t) &\approx \frac{-i4\pi}{k^2 c} \left[e^{ikc(t-t_n)} \left\{ \sin \frac{kc\delta t_n}{2} J_i(\mathbf{k}, t_n) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sin \frac{kc\delta t_{n-1}}{2} J_i(\mathbf{k}, t_{n-1}) e^{ikc(t_n-t_{n-1})} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \dots + \sin \frac{kc\delta t_1}{2} J_i(\mathbf{k}, t_1) e^{ikc(t_n-t_1)} \right\} \right. \\ &\quad \left. - e^{-ikc(t-t_n)} \left\{ \sin \frac{kc\delta t_n}{2} J_i(\mathbf{k}, t_n) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sin \frac{kc\delta t_{n-1}}{2} J_i(\mathbf{k}, t_{n-1}) e^{-ikc(t_n-t_{n-1})} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \dots + \sin \frac{kc\delta t_1}{2} J_i(\mathbf{k}, t_1) e^{-ikc(t_n-t_1)} \right\} \right] \\ &\quad + A(\mathbf{k}, t_0) \quad (20) \end{aligned}$$

ただし、 $A(\mathbf{k}, t_0)$ は初期条件である。ここで、状態変数 F_n^\pm を導入すると、

$$A(\mathbf{k}, t) = \frac{-i}{k^2} [e^{ikc(t-t_n)} F_n^+ - e^{-ikc(t-t_n)} F_n^-]$$

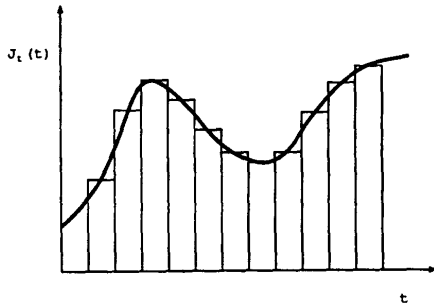


図2 衝撃関数の重ね合わせによる近似
Fig. 2 Temporal variation of current density approximated by superposition of impulse functions.

$$+ A_{static}(\mathbf{k}) \quad (21)$$

と簡略化することができる。ただし、 $A_{static}(\mathbf{k})$ は時間的に定常な静ポテンシャル成分を表す。また F_n^\pm は、

$$F_n^\pm = F_{n-1}^\pm \cdot e^{\pm ikc(t_n-t_{n-1})} + \frac{4\pi}{c} J_i(\mathbf{k}, t_n) \sin \frac{kc\delta t_n}{2} \quad (22)$$

という漸化式を満たす。そして、

$$A(\mathbf{k}, t_0) = -\frac{i}{k^2} [F_0^+ - F_0^-] + A_{static}(\mathbf{k}) \quad (23)$$

である。ここで、 $-(i/k^2)F_0^\pm$ は $A(\mathbf{k}, t_0)$ のうち $\pm k$ 方向へ伝播する成分を表す。

式(22)の漸化式の意味は、時間ステップ数 $n-1$ までの過去の履歴 F_{n-1}^\pm に相変(ユニタリ変換)を与え、時間ステップ n での電流 $J_i(\mathbf{k}, t_n)$ からの寄与を加えることにより、現在の状態を示す変数 F_n^\pm が得られるということである。この漸化式により、過去の履歴をすべて計算する必要はなく、1ステップ前の履歴のみ記憶しておけば時間発展解を数値的に得ることができ、その計算量も少ないことがわかる。また、電流が存在しない時、任意の δt に対して、

$$|F_n^\pm| = |F_{n-1}^\pm|$$

である。このことは、本手法が δt によらず、常に安定であることを示す。

以上で得られた結果を用いて、式(2)、式(10)、式(21)より、電場、磁場は、

$$\begin{aligned} B(\mathbf{k}, t) &= -i\mathbf{k} \times A(\mathbf{k}, t) \\ &= -\frac{\mathbf{k}}{k^2} \times [e^{ikc(t-t_n)} F_n^+ - e^{-ikc(t-t_n)} F_n^-] \\ &\quad - i\mathbf{k} \times A_{static}(\mathbf{k}) \quad (24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(\mathbf{k}, t) &= -\frac{1}{c} \frac{\partial A(\mathbf{k}, t)}{\partial t} - i\mathbf{k}\phi(\mathbf{k}, t) \\ &= \frac{1}{k} [e^{ikc(t-t_n)} F_n^+ + e^{-ikc(t-t_n)} F_n^-] \\ &\quad - i\mathbf{k}\phi(\mathbf{k}, t) \quad (25) \end{aligned}$$

で与えられる。ただし、 F_n^\pm は式(22)で与えられる。

以上述べられた新解法を仮に Transient Green Method (TGM) と以後呼ぶことにする。この TGM の離散化は波数空間座標について行われ、既存の数値解法が実空間座標について離散化するのと異なっている。また、離散化された波数の総数を、波数格子数と呼ぶと、これは、既存の数値解法での空間格子数に対応する。これらの格子数を総称して、計算格子数と呼ぶことにすると、一般にこれらの計算格子数が増加すると計算精度も向上する。以後の議論で、TGM と差分法を比較する時は、これらの計算格子数を対応づけ

で考察することにする。

3. 数値実験

この章では、差分法と TGM の数値実験結果の比較により、TGM の有効性を明らかにする。

数値モデルとして、1次元の簡単なモデルを取り上げる。比較する既存手法としては、空間4次精度、時間2次精度のスタッガード空間格子の Leap-Frog 差分法を用いる。

3.1 数値モデル

まず、比較を行う数値モデルについて説明する。

いま、 $\partial/\partial x \neq 0$, $\partial/\partial y = \partial/\partial z = 0$ とし、また、簡単のために

$$J_z = (0, J_{iy}, 0) \quad (26)$$

$$A(k, t_0) = 0 \quad (27)$$

とする。また、電流密度の空間および時間変化は、

$$J_{iy}(x, t) = J_0 S(x-x_0) \sin \omega t$$

$$S(x-x_0) = (2\pi \Delta x)^{-1/2} e^{-((x-x_0)^2/2\Delta x^2)} \quad (28)$$

とする。ただし、 x_0 , Δx はそれぞれ電流分布の中心と半値幅を示す。

以上の数値実験モデルを TGM により離散化すると、式(9), (10), (21)より、

$$A_x(k, t) = A_x(k, t) = 0$$

$$A_y(k, t) = \frac{-i}{k^2} [e^{ikc(t-t_n)} F_n^+ - e^{-ikc(t-t_n)} F_n^-]$$

$$\phi(k, t) = 4\pi \rho(k, t)/k^2$$

となり、また状態変数は、

$$F_n^\pm = F_{n-1}^\pm \cdot e^{\pm ikc(t_n - t_{n-1})} + \frac{4\pi}{c} J_{iy}(k, t_n) \sin \frac{kc\delta t_n}{2} \quad (29)$$

となる。したがって、電場および磁場は、

$$E_x(k, t) = -ik\phi(k, t) = -i\rho(k, t)/k$$

$$E_y(k, t) = -\frac{1}{k} [e^{ikc(t-t_n)} F_n^+ + e^{-ikc(t-t_n)} F_n^-]$$

$$B_z(k, t) = \frac{1}{k} [e^{ikc(t-t_n)} F_n^+ - e^{-ikc(t-t_n)} F_n^-]$$

$$E_z = B_x = B_y = 0 \quad (30)$$

で与えられる。上式での $E(k, t)$, $B(k, t)$ は Fourier 波数空間での値である。これらの値から実空間での電場、磁場を求めるには、Fourier 逆変換を用いる。

3.2 シミュレーション結果

本節では、前節において述べられた数値モデルにおける、TGM および有限差分法によるシミュレーション結果を示し、各々を比較することにより TGM の特徴を明らかにする。

まず、数値解析手法の重要な特徴として、真の解への収束性、計算精度、数値安定性、計算量の4点が挙げられる。収束性とは、離散化格子数を増やすにつれて数値解が真の解へ収束することである。異なる数値解法において、同じ計算格子数であっても精度が高い解法はそれだけ高周波数成分の現象をもとらえることができ、解法として優れているといえる。この点で、計算精度は数値解法の特徴を述べる時、大きな指標となる。数値的に安定であるという特徴は、急な数値的変動が起きて数値オーバフローを起こしたりすることがないということである。このことは、実際に計算する時には重要なことである。数値不安定を起こしてオーバフローすれば、それまでの計算は全く無駄になってしまう。それに対し収束的かつ安定であれば、ある一定の精度の範囲で解が与えられる。最後に、実際に際して重要なことに、計算量が少ないことが上げられる。いかに精度良く計算できても計算量が大きすぎれば実用的でない。

3.2.1 真の解への収束性および精度

この項においては、数値解法の特徴の中で特に重要でかつ互いに密接に関係する収束性と精度について定量的に論ずる。そのためには比較のための真の解もしくは十分に高精度な近似解が必要となる。ここでは、モデルの解析解が得られないため、その収束性、精度が理論的に知られているスタッガード格子の Leap-Frog 差分法による数値解を比較のための高精度解として用いる。そして、差分法の1ステップ当たりの誤差が、十分に小さい $\approx 10^{-5}$ のオーダーになるように、理論的な精度解析から空間格子数を 8192 にした。用いられた数値シミュレーションの諸元を表1に示す。ただし、 N_x , t , δt , δx , Δx , f は各々空間格子数、シミュレーション時間、時間ステップ、空間ステップ、式(28)の電流分布の半値幅そして印加電流の周波数を示す。

以上で与えられたパラメータにおける差分法による数値実験結果を図3に示す。この、シミュレーション時間 $t = 10^{-8}$ (sec) での高精度差分法を用いて、TGM 解の計算格子数に対する精度および収束性を実際に数

表1 比較のための差分法による数値シミュレーションの諸元

Table 1 Parameters for FDM simulation with large number of grids for comparison.

N_x	t (sec)	δt (sec)	δx (cm)	Δx (cm)	f (MHz)
8192	10^{-8}	10^{-12}	1000/8192	10	600

値実験して調べたのが図4である。既存手法との比較の意味で、差分法の数値実験結果も◇で示した。また、TGMの結果は+で示され、時間ステップはどちらも $\delta t = 10^{-11}$ (sec)である。図4の横軸および縦軸はそれぞれ計算格子数(差分法:空間格子数, TGM:波数格子数)および高精度解からの標準偏差である。

また、同様にTGM解の、時間ステップ δt に対する精度および収束性を示したのが、図5である。計算格子数は、TGM, 差分法それぞれ100, 400である。

これらの図の頭打ちのレベルは、計算格子数(図4)と時間ステップ(図5)に依らない。つまり、このレベルは、比較のための高精度解の誤差レベルを示す。したがってここでは、この頭打ちのレベル以外の部分について議論する。

図4より、計算格子数に対して、差分法がほぼ4次のオーダーなのに対し、TGMは明らかに、より高次のオーダーで収束していることが分かる。その差は計算格子数60ほどのところで最大で、100倍以上になって

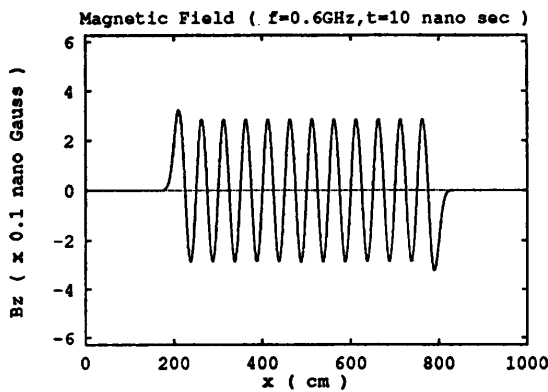


図3 比較のための差分解(空間格子数: 8192)
Fig. 3 Solution obtained by FDM.

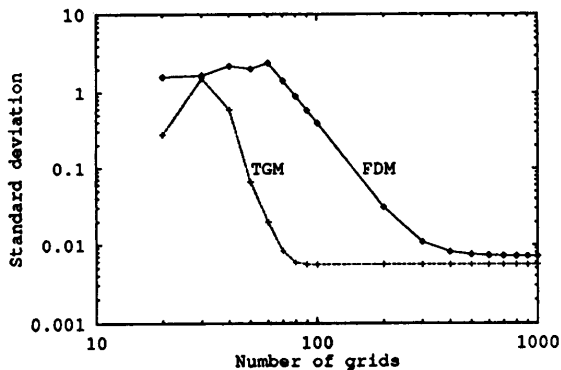


図4 TGMと差分法の計算格子数に対する精度および収束性
Fig. 4 Convergence vs. number of grids for TGM (+) and FDM (◇) ($\delta t = 10^{-11}$ (sec)).

いる。また、図5より、時間ステップに対して、差分法、TGM共にほぼ2次のオーダーで収束していることが分かる。

また、図4で、標準偏差0.01を実現するのに必要な格子数を比べてみると、差分法が約300(空間格子数)であるのに対し、TGMは約70(波数格子数)である。つまり、この例題において、標準偏差0.01を達成するのに、TGMは差分法の1/4の計算格子数で済む。同様に図5より、標準偏差0.01を達成するのに、差分法が約 3×10^{-11} (sec)なのに対し、TGMは 10^{-10} (sec)で済むことが分かる。このことは、TGMは差分法の1/3の時間ステップ数で標準偏差0.01を達成できることを示す。

3.2.2 安定性

本項では、差分陽解法による過渡解析の際に大きな制約条件となる数値安定性の問題を、TGMの場合について考察する。

TGMはその時間発展を式(22)中に示されるように、状態変数 F_k に $e^{+ik\delta t}$ を掛けるユニタリ変換によっており、 δt を大きくとっても $|F_k|$ は発散しない。これを実際に数値シミュレーションにより確認したのが、図6と図7である。ただし、 C_{CFL} は、TGMの波数格子数を差分法における空間格子数と解釈したCFL数である。TGMは差分陽解法におけるCFL条件を満たすもの(図6)についてはもちろん、CFL条件を満たさないもの(図7)についても良好な結果を与える。このことは、差分陽解法では数値不安定がおきて計算できない時間ステップでも、TGMでは計算できることを示す。さらに図7で示される結果において、時間ステップは粗い(全20ステップ)が、数値解は良い精度を保っている。このことは、TGMが粗い

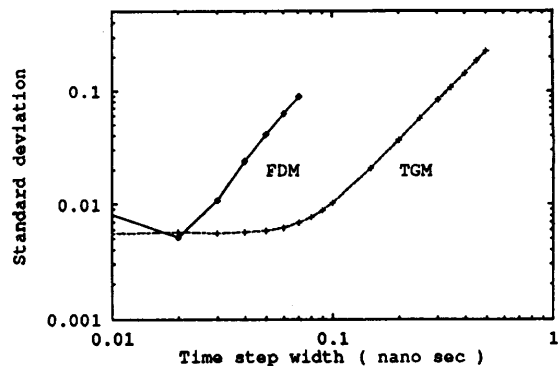


図5 TGMと差分法の δt に対する精度および収束性
Fig. 5 Convergence vs. δt for TGM (+: 100 grids) and FDM (◇: 400 grids).

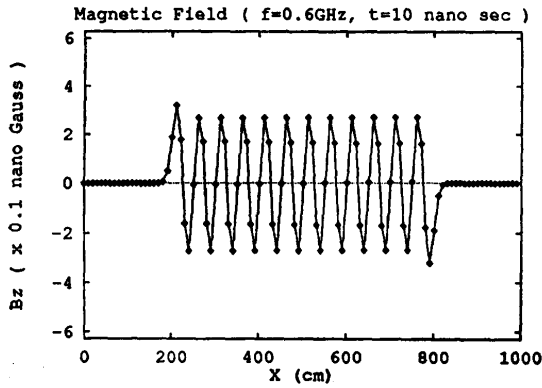


図 6 $C_{cfl}=0.3$ (100steps)
Fig. 6 TGM solution with CFL condition $C_{cfl}=0.3$.

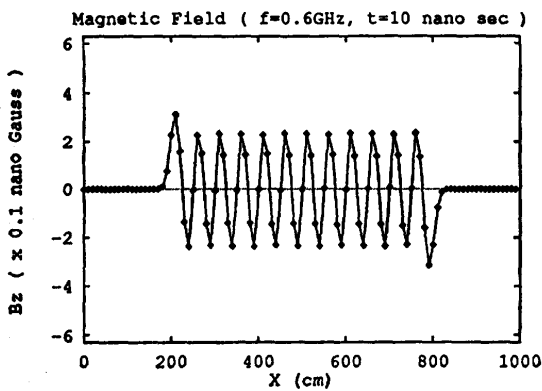


図 7 $C_{cfl}=1.5$ (20steps)
Fig. 7 TGM solution with CFL condition $C_{cfl}=1.5$.

時間ステップでも真の解に近い値を与えるロバストな解法であることを示す。

3.2.3 計算量

この項では、TGM の計算量について考察する。計算量の多少を決めるため、差分陽解法と比較する。差分陽解法は、数値解法の中でも 1 ステップあたりの計算量が最も少ない手法の 1 つである。ここでは、差分陽解法の中の時間 2 次空間 4 次精度 Leap-Frog 法と比較する。

ここでは、電流密度 $J(x, t)$ および電荷密度 $\rho(x, t)$ が与えられた時、1 時間ステップ後の $E(x, t)$, $B(x, t)$ を求めるのに必要な四則演算の数を計算量と定義する。ただし、1 次元問題で、各ベクトルは、電場 3 成分、磁場 2 成分 ($B_z \equiv 0$) を持つとする。また、複素数の乗除算は 4 演算、加減算は 2 演算と数える。

上記の条件のもとで、差分法での計算量を調べると、 x 方向の空間格子数を N とすると、

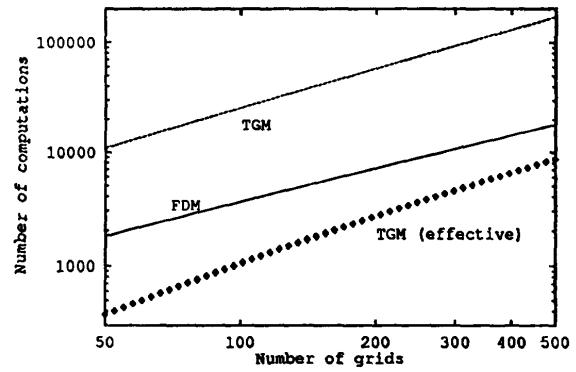


図 8 計算格子数対、差分法 (実線), TGM (破線) の計算量および TGM の有効計算量 (◇)
Fig. 8 Number of computations for FDM and TGM, and effective number of computations for TGM against number of grids.

$$36N \tag{31}$$

となる。

TGM については、Fourier 変換に FFT を用いるとして、波数格子数を N とすると、

$$36(N \log_2 N) + 16N \tag{32}$$

となる。また、TGM において、各時間ステップで Fourier 変換が必要でない場合、 $16N$ の計算量で済む。図 8 の実線と破線でそれぞれ差分法と TGM の格子数 N に対する計算量を示す。同じ格子数で比較すると、一般には TGM の計算量は差分法より多い。しかし、各時間ステップで Fourier 変換が必要でない場合は TGM の計算量は差分法の半分以下である。

次に、同じ計算精度の数値解を得るのに必要な計算量を考える。図 4, 5 より、1 次元問題では同じ計算精度を得るのに、TGM は、差分法の 1/4 の計算格子数、1/3 の時間ステップ数で済む。つまり、TGM は差分法の計 1/12 の計算量で同じ精度を得る。そこで、差分法と同じ精度を得るのに必要な TGM の計算量を有効計算量と定義すると、式 (32) より有効計算量は、

$$36\left(\frac{N}{12} \log_2 \frac{N}{12}\right) + 16\left(\frac{N}{12}\right) \tag{33}$$

となる。結果を図 8 中の◇に示す。本例題において、差分法と同じ精度を得るための TGM の有効計算量は差分法より少ないことが示された。

4. おわりに

本論文では新しい電磁場数値過渡解法として Transient Green Method を提案した。また、1 次元問題の一例題における数値実験において同手法は、時間 2

次空間 4 次精度 Leap-Frog 差分陽解法と比較して、

1. 真解への収束性が高い。
2. 計算精度が高い。
3. 時間ステップ δt に依らず、常に安定である。
4. 有効計算量が少ない。

ことを示した。

TGM の定式化は線型の波動方程式に限られているが、その範囲では既存手法である差分法を大幅に上回る長所を持つことを示した。

今後、高次元への拡張、任意の境界条件の考慮、また電磁場解析の中の非線型性、例えば、誘電体、磁性体、導電体をこの TGM の中に数値モデルとして取り込み、応用分野を広めていきたい。また、同じ線型波動方程式を支配方程式とする音響解析への応用も考えていきたい。

参 考 文 献

- 1) Anderson, D. A., Tannehill, J. C. and Pletcher, R. H.: *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, Hemisphere Publishing Company (1984).
- 2) シルベスタ, P. P., フェラーリ, R. L.: 有限要素法による電磁界解析, サイエンス社 (1988).
- 3) プレビア, C. A.: 境界要素法の応用・1, 企画センター (1983).
- 4) Voigt, R. G., Gottlieb, D. and Hussaini, M. Y. (eds.): *Spectral Methods for Partial Differential Equations*, SIAM, Philadelphia (1984).
- 5) 阿部博史: 電磁場解析のための Green の手法を用いた量子論的アプローチによる新数値解法, 第 41 回情報処理学会全国大会論文集, 1-41 (1990).
- 6) 阿部博史, 速水 謙: Green 関数を用いた新しい電磁場数値過渡解法, 第 12 回計算電気電子工学シンポジウム予稿集, pp. 335-340 (1991).
- 7) 電磁気学の教科書, 例えば, Jackson, J. D.: *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons (1975).

(平成 3 年 12 月 11 日受付)

(平成 4 年 6 月 12 日採録)



阿部 博史 (正会員)

1989 年東北大学理学部地球物理学博士課程中退。同年日本電気(株)入社。以来、コンピュータによる電磁場解析の研究に従事し、現在に至る。American Geophysical Union 会員。



速水 謙 (正会員)

1979 年東京大学工学部計数工学科(数理工学専攻)卒業。1981 年同大学院修士課程修了。同年、日本電気(株)入社。以来、LSI の配線収容性予測、数値シミュレーション; 特に連立一次方程式の反復解法、境界要素法、数値積分法の研究に従事。1986 年-88 年英国 Computational Mechanics Institute 客員研究員。1991 年 Ph. D. 現在、日本電気(株) C&C 情報研究所情報基礎研究部研究課長。日本応用数学会、シミュレーション学会、International Society for Boundary Elements 各会員。