

検出もれのない代数曲線の追跡法†

谷口行信** 杉原厚吉***

本論文では、平面代数曲線を検出もれなく求めるための新しい算法を提案する。従来の曲線追跡法には、小さなループや孤立点を検出しそなかったり、特異点の近辺で追跡に破綻をきたしたり、曲線の接続関係を誤って抽出したりするなどの欠点があったのに対して、ここに提案する算法はそれらの欠点を克服するものである。本手法では、特徴点と呼ばれる特殊な点を定義して、曲線追跡の際の出発点・終端点として用いる。これは代数曲線上に有限個存在し、代数方程式を解いて求めることができるもので、特に出発点として用いることのできる特徴点が多分枝に少なくとも1個ずつ存在することが証明できるため、検出もれのないことが保証される。また、追跡の際のステップ幅の自動調整機構を持つため、大きさの非常に異なる構造が混在していても、それらを効率よく検出できる。本手法の浮動小数点演算による実装法を検討し、それに基づいて試作したシステムが、多くの曲線に対して正しく追跡が行えることを示す。さらにその算法を利用して、二つの代数曲面の交線を求める算法を構成する。最後に本手法のソリッドモデリング、等高線図の描画、代数曲面の描画への応用について例とともに述べる。

1. はじめに

方程式の形で定義された代数曲線に対して、その実際の形状や位相構造を決定することは、ソリッドモデリングやコンピュータ・グラフィックスなど多くの幾何学的形状処理で必要となる基本的な演算の一つである¹²⁾。例えば、Bézier 曲面等の代数曲面を境界として持つ立体モデルに対して集合演算を施す場面では、立体モデルのトポロジカルな構造を決定するために、境界をなす代数曲面の間の交線を求めなければならない。このような場面で曲面交線のトポロジーを誤ることは、集合演算が暴走する大きな原因となるため、曲面交線——二つの代数方程式を連立したものとして定義される代数曲線——を“検出もれなく”求めることのできる算法が必要である。

平面代数曲線を求める代表的な方法には、格子法 (grid method)¹²⁾ と追跡法 (marching method)²⁾⁻⁴⁾ がある。格子法は、注目する領域に水平・垂直の平行線からなる格子を設け、曲線と格子の交点を手がかりに曲線を検出しようとするものであるが、微細構造を見落とししたり、トポロジーを誤認識したりする危険性があるため、本稿の目的には適さない。追跡法は、何らかの手段で曲線上に十分な数の出発点を設け、それらの点から曲線をたどっていく方法である。この方法

には多くの変種があるが、多くに共通する欠点として、小さなループや孤立点を検出できなかつたり、特異点があるとそこで追跡が破綻してしまうことがある。

本論文では、そのような欠点を克服するために、追跡法に対して出発点の見つけ方、ステップ幅の調整法などにきめの細かい工夫を加えることにより新しい算法を構成する。本論文で提案する算法の特長は、“すべての計算を正確に行えるならば”小さなループや孤立点などの小さな特徴までもらさず検出できること、特異点を追跡前に求めておくので特異点のところで破綻する心配がないことである（従来の方法には、このような仮定のもとでも検出もれを生ずるものが多かった）。

しかし、浮動小数点演算などの誤差を伴う演算を用いる場合には、算法をそのまま実装したのでは誤差のために正常な動作が保証されない。そこで、数値誤差に起因する破綻を防ぐために、(i)すべての演算を誤差を見積もりながら計算を進め、その見積もりを用いて二つの点と同じ位置を占めるか否か、関数の値が0か否か、などの判定を行うとともに、(ii)数式処理を利用できる部分はできるだけそれを利用する、などの総合的な配慮を加えて、実用的算法を設計した。この設計方針で試作システムを作成し、その実験結果についても報告する。

第2章では、平面代数曲線の追跡法について述べ、第3章では、その算法を利用して、二つの陰的に定義された代数曲面の間の交線を求める算法を構成する。第4章では、これらの追跡法を、ソリッドモデリング、等高線図の描画、陰曲面の描画などに応用する。

† A Robust Method for Tracing Algebraic Curves by YUKINOBU TANIGUCHI (NTT Human Interface Laboratories) and KOKICHI SUGIHARA (Department of Mathematical Engineering and Information Physics, Faculty of Engineering, University of Tokyo).

** NTT ヒューマンインタフェース研究所
*** 東京大学工学部計数工学科

2. 平面代数曲線の追跡法

本章では、平面代数曲線 $P: f(x, y)=0$ を任意に指定した有界な矩形領域内で追跡する算法を提案する。具体的には、入力として2変数多項式 $f(x, y)$ と矩形領域 $[x_{\min}, x_{\max}] \times [y_{\min}, y_{\max}]$ (以下、追跡対象領域と呼ぶ) が与えられたとき、領域内の曲線のトポロジーを表す平面グラフとその枝の位置を近似する点列を出力するものである。

曲線 $f(x, y)=0$ を定義する関数 f は重複因子を持たない (すなわち $f=g^2h$ と因数分解される g は ± 1 以外には存在しない) 2変数多項式であると仮定する。 $f=f_x=f_y=0$ (ただし、右下の添字はその変数に関する偏導関数を表す) を満たす点を平面代数曲線の特異点 (singular point) と呼び、曲線上の特異点でない点を通常点 (ordinary point) と呼ぶ。 f は重複因子を持たないと仮定したので特異点は高々有限個しかない。

平面代数曲線は図1のように多様な形状を呈する。(a)のように複数個の連結成分に分かれたり、(b)のように分岐点を持ったり、(c)のように尖ったり、(d)のように孤立点を持ったりする。(b), (c), (d)の原点は特異点であり、(b), (c)のような特異点を

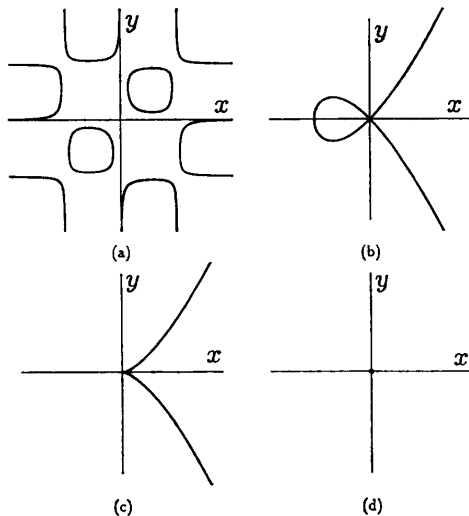


図1 平面代数曲線の例: (a) 複数個の成分を持つ曲線 $((x+1)x(x-1)(y+1)y(y-1)-0.05=0)$, (b) 結節点 $(y^2-x^2-x^3=0)$, (c) 尖点 $(y^2-x^3=0)$, (d) 孤立点 $(x^2+y^4=0)$

Fig. 1 Examples of plane algebraic curves with: (a) many components $((x+1)x(x-1)(y+1)y(y-1)-0.05=0)$, (b) a node $(y^2-x^2-x^3=0)$, (c) a cusp $(y^2-x^3=0)$, (d) an isolated point $(x^2+y^4=0)$.

それぞれ結節点 (node), 尖点 (cusp) と呼ぶ。

以下では、曲線 P からその特異点を除いたときできる連結成分のことをブランチと呼ぶ。

本論文で提案する算法の概略は次のとおりである。まず、2.1節で定義する特徴点と呼ばれる点の集合を求める。特徴点のうち特異点でない点を出発点 p_0 として次の手続きを繰り返す:

[追跡手続き] $i=0, 1, 2, \dots$ に対して、

- (i) p_i から接線方向にあるステップ幅だけ進み、その点を q_i とする
- (ii) q_i を Newton 法を用いて曲線 f 上の点に修正し、その点を p_{i+1} とする、

ということを、他の特徴点に到着するまで繰り返す (図2)。

この手続きによりブランチ上に点列 p_0, p_1, \dots が得られると同時に、特徴点の間の接続関係が分かる。

この追跡手続きは、特異点のところではうまく働かない。なぜなら、特異点では通常の意味での接線方向 $(-f_y, f_x)$ が決まらないからである。特異点を乗り越えて追跡を進める方法もある⁴⁾が、本算法では各ブランチを別々に追跡する。そのために、各ブランチ上に少なくとも1個以上の出発点を設けておく必要がある。

2.1 特徴点

曲線上のすべてのブランチの上に少なくとも1個ずつの出発点を設けるために、次の①~④の4種類の点をこの順に求める。①~④の点を合わせて特徴点 (characteristic points) と呼ぶ。

- ①境界点 (border points): 曲線 P と追跡対象領域の境界との交点を境界点と呼ぶ。境界点は次の四つの1変数代数方程式

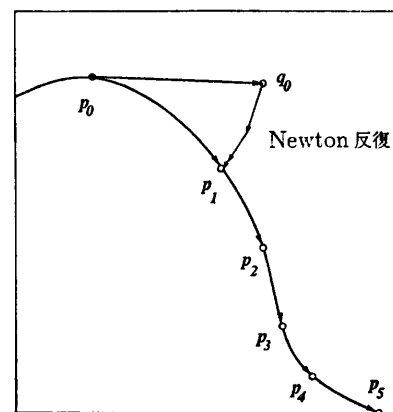


図2 曲線追跡の様子 (p_0 : 出発点)
Fig. 2 Curve tracing (p_0 : a start point).

$$\begin{aligned} f(x, y_{\min})=0, f(x, y_{\max})=0, \\ f(x_{\min}, y)=0, f(x_{\max}, y)=0 \end{aligned} \quad (1)$$

を解いて求められる。

②折り返し点 (turning points): 曲線 P 上の点で法線方向が x 軸あるいは y 軸に平行になる点をそれぞれ x 折り返し点, y 折り返し点と呼ぶ。これらの点は 2 変数連立代数方程式

$$f(x, y)=f_x(x, y)=0 \text{ (} x \text{ 折り返し点),} \quad (2)$$

$$f(x, y)=f_y(x, y)=0 \text{ (} y \text{ 折り返し点)} \quad (3)$$

を解いて求められる。(折り返し点が無限個ある場合の例外処理については付録を参照のこと。)

③特異点 (singular points): 特異点は連立代数方程式

$$f(x, y)=f_x(x, y)=f_y(x, y)=0 \quad (4)$$

を同時に満たす点である。(2), (3), (4)式から分かるように, x 折り返し点でありかつ y 折り返し点である点が特異点である。したがって, x 折り返し点と y 折り返し点を求めておけば, 特異点を改めて求め直す必要はない。

④特異点を結ぶブランチ上の点: 特異点が $n(\geq 2)$ 個ある場合を考える。特異点を y 座標値の大きい順に並べ, y 座標値が等しいときには x 座標値が大きい順に並べたものを, $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ とする。 $i=1, \dots, n-1$ に対して, $y_i \neq y_{i+1}$ ならば, 1 変数代数方程式

$$f(x, (y_i + y_{i+1})/2) = 0 \quad (5)$$

を満たす点を特徴点に加える。もし, $y_i = y_{i+1}$ ならば,

$$f((x_i + x_{i+1})/2, y_i) = 0$$

が成り立つときだけ, 点 $((x_i + x_{i+1})/2, y_i)$ を特徴点に加える。

図 3 に特異点が三つある曲線の特徴点を示す。ここでは, 4 種類の特徴点がすべて現れており, それらを種類ごとに異なる記号で表してある。

Farouki^{5),6)} は①~③の点を特徴点としたが特異点を結ぶ単調なブランチの上に出発点を得られないという不都合があった。図 3 の例では, 破線で示すブランチ上に出発点を得られない。この欠点を補うために, ここでは④の点を出発点に加えることにした。これによって理論的に十分な数の出発点を得られることは以下のように理解できる。

追跡対象領域内に現れるブランチは次の 4 種類に分類される: (i)両端が無限に延びるブランチ, (ii)ループをなすブランチ, (iii)一方の端点の特異点でありもう一方の端点が無限に延びるブランチ, (iv)二つ

の端点の特異点であるようなブランチ。

まず, (i), (iii)のブランチの上に④の点があることは明らかである。特異点を持たないループは傾きが滑らかに変化するから, (ii)のブランチの上には②の点が必要である。また, (iv)のブランチの上には②または④の点が必要である。したがって, ①, ②, ④の点を出発点とすれば, すべてのブランチの上に出発点が存在することが保証される。

2.2 特徴点の計算法

(1)式を解いて境界点を求めるためには, ある区間に含まれる 1 変数代数方程式の実根をもれなく列挙する必要がある。ここでは Durand-Kerner 法⁷⁾を用いて代数方程式の根を虚根を含めてすべて求め, その中から必要な根だけを取り出す方法を採用する。この方法を採用したのは, 数値計算によって求まった根に含まれる誤差を Smith¹⁴⁾ の方法で事後評価できるからである。

(2), (3)式を解いて折り返し点を求めるためには, 2 変数連立代数方程式のすべての実根を列挙する必要がある。このためには, 終結式を利用した方法¹¹⁾を採用する。この方法の概要は次のとおりである。解きたい 2 変数連立代数方程式を

$$\begin{cases} f(x, y) = f_0y^n + f_1y^{n-1} + \dots + f_n = 0, \\ g(x, y) = g_0y^m + g_1y^{m-1} + \dots + g_m = 0 \end{cases} \quad (6)$$

とする。ただし, $f_i (i=0, \dots, n), g_i (i=0, \dots, m)$ は x に関する多項式である。ここで, f と g の y に関する Sylvester の終結式は

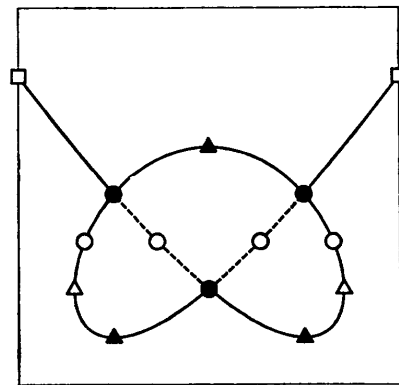


図 3 平面代数曲線 $x^4 - 2y^2 - 3y^2 - 2x^2 + 1 = 0$ の特徴点 (□: 境界点, Δ: x 折り返し点, ▲: y 折り返し点, ●: 特異点, ○: ④の点)

Fig. 3 Characteristic points of the plane algebraic curve $x^4 - 2y^2 - 3y^2 - 2x^2 + 1 = 0$ (□: border point, Δ: x -turning point, ▲: y -turning point, ●: singular point, ○: point ④).

$$\text{Res}_y(f, g) = \begin{pmatrix} f_0 & f_1 & \dots & f_{n-1} & f_n \\ f_0 & f_1 & \dots & f_{n-1} & f_n \\ & & \ddots & & \\ & & & f_0 & f_1 & \dots & f_{n-1} & f_n \\ g_0 & g_1 & \dots & g_{m-1} & g_m \\ g_0 & g_1 & \dots & g_{m-1} & g_m \\ & & \ddots & & \\ g_0 & g_1 & \dots & g_{m-1} & g_m \end{pmatrix} \begin{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} f_0 \\ f_0 \\ \\ f_0 \\ g_0 \\ g_0 \\ \\ g_0 \end{matrix}} \right\} m \\ \left. \vphantom{\begin{matrix} f_0 \\ f_0 \\ \\ f_0 \\ g_0 \\ g_0 \\ \\ g_0 \end{matrix}} \right\} n \end{matrix} \quad (7)$$

と定義される¹⁷⁾。終結式は連立代数方程式から1変数を消去する一つの一般的方法を与えるものである。すなわち、 (x_0, y_0) が(6)式の根であれば $\text{Res}_y(f, g)(x_0) = 0$ が成り立つ。したがって、次の手続きで(6)式のすべての根を求めることができる：

- (i) 行列式(7)を Laplace 展開し、 x に関する多項式 $h(x) = \text{Res}_y(f, g)$ を求める；
- (ii) $h(x) = 0$ の根をすべて求め、 x_1, \dots, x_N とする；
- (iii) $i = 1, \dots, N$ に対して、 $f(x_i, y) = 0$ の根をすべて求め、それらを y_{i1}, \dots, y_{iM_i} とする；
- (iv) (x_i, y_{ij}) ($i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M_i$) のうち $g(x_i, y_{ij}) = 0$ を満たすものを根として採用する。

(ii)において、1変数代数方程式の根を求めるために上述の Durand-Kerner 法を用いる。(iii)の $f(x_i, y)$ が恒等的に0である場合は付録の例外処理を行う。

特異点を求めるためには、 x 折り返し点 $p_1 = (x_1, y_1)$ と y 折り返し点 $p_2 = (x_2, y_2)$ が同じ位置を占めるか否かを判定する必要がある。しかし、座標値 x_1, y_1, x_2, y_2 はいずれも代数方程式を数値的に解いて得られた値であり、誤差を含んでいるため、単に $x_1 = x_2$ かつ $y_1 = y_2$ のとき同じ位置を占めると判定するわけにはいかない。このような判定では“適当に小さな数 ϵ ”を導入し、 $|x_1 - x_2| \leq \epsilon$ かつ $|y_1 - y_2| \leq \epsilon$ のとき同じ位置を占めると判定する、ということがよく行われる。しかし、各座標値に含まれる誤差はその値が得られた計算過程およびその根の重複度などによってまちまちであり、“適当に小さな数 ϵ ”などで一様に抑えられるものではない。仮に抑えられたとしても、 ϵ よりも小さな微細構造は検出できなくなるという不都合が生じる。

そこで、ここでは各点の座標値に含まれる誤差を見積もりながら計算を進め、それを利用して上の判定を行う。 $\text{Res}_y(f, g)$ の係数は、多項式 f, g の係数に対し

て加減乗算を繰り返し施して得られる値であり、大きな丸め誤差が混入している可能性がある。その丸め誤差を見積もるために区間演算に似た方法を用いる¹⁶⁾。また Durand-Kerner 法で求めた根に含まれる誤差は、Smith¹⁴⁾の方法で見積もる。座標値 x に含まれる丸め誤差の見積もりを δx で表すとき、

$$|x_1 - x_2| \leq \delta x_1 + \delta x_2 \quad \text{かつ} \quad |y_1 - y_2| \leq \delta y_1 + \delta y_2$$

が成り立てば二つの点 p_1, p_2 が同じ位置を占めると判定する。

2.3 曲線の追跡手続き

本節では、曲線上の通常点 p_0 と追跡の方向 α が与えられたとき、 p_0 から曲線をたどっていく手続きについて述べる。ただし、 $f(x, y) > 0$ の領域を右に見ながら進むとき $\alpha = 1$ 、左に見ながら進むとき $\alpha = -1$ とする。

まず、曲線 f をパラメータ s の関数 $r(s) = (x(s), y(s))$ とみなして $s = 0$ のまわりで

$$r(s) = r(0) + r'(0)s + \frac{r''(0)}{2}s^2 + O(s^3) \quad (8)$$

と Taylor 展開する。ここで、パラメータ s を点 p_0 から測った曲線の長さに変換ことにすると、係数 $r'(0), r''(0)$ はそれぞれ次式により計算できる⁴⁾：

$$r'(0) = (x', y') = \alpha \cdot (-f_y, f_x) / \|\nabla f\|, \\ r''(0) = (x'', y'') = -b_2 \nabla f / \|\nabla f\|^2.$$

ただし、 $b_2 = f_{xx}(x')^2 + 2f_{xy}x'y' + f_{yy}(y')^2$ とする。また、曲率 κ は

$$\kappa = \|r''(0)\| = |b_2| / \|\nabla f\|$$

で求めることができる。

ステップ幅 s_0 は、まず、曲率に応じて

$$s_0 = 2\rho / \kappa \quad (9)$$

と決める。すなわち、曲率が大ききところではステップ幅を小さく選ぶようにする。ただし、 ρ は $0 < \rho < 1$ を満たす定数であり、 ρ を小さく選べば追跡の信頼性が高くなるが、その反面ステップ数が増加するため追跡に時間がかかるので、適当な大きさに選ぶ必要がある。試作システムでは $\rho = 1/40$ として実験を行った。

(8)式の右辺の最後の項を除いたものに s_0 を代入し、その結果得られる点を q_0 とする。

点 q_0 は正確に曲線上に乗っていないので、その点を初期値として Newton 反復を繰り返すことによつて q_0 を曲線上の点へ修正する。すなわち、 $k = 0, 1, 2, \dots$ に対して、(i) $\nabla f(q_k) \cdot d = -f(q_k)$ を満たす d のうち ∇f と平行なものを d_k とする；(ii) $q_{k+1} = q_k + d_k$ とおく、ということを繰り返し、収束した先の点を p_1 とする。

2.4 ステップ幅の調整法

(9)で決めたステップ幅のまま追跡を行うと次のような例で追跡に失敗する。

例1 Newton法が速やかに—4, 5回のNewton反復で—収束しない場合がある。例えば、図4(a)の曲線 $y-x^2=0$ の原点は変曲点であり $\kappa=0$ であるから、ステップ幅は $s_0=\infty$ となる。

例2 曲率が急に变化する曲線では、追跡中に他のブランチに乗り移り曲線の接続関係を誤ることがある。図4(b), (c)の曲線では曲率が急に变化するため、追跡中に他のブランチに乗り移り曲線の接続関係を正しく求められない。

このような失敗を防ぐために、一步進むごとに次の四つの状況が生じていないかチェックする：

(状況1) Newton反復を5回行っても曲線上に収束しない場合、

(状況2) 図5(a)に示すように、 p_0 における頂角が 2ρ の二等辺三角形領域 $\triangle r p_0 r'$ の内部にちょうど1個の特徴点がある場合、

(状況3) 図5(a)の二等辺三角形領域 $\triangle r p_0 r'$ の内部に2個以上の特徴点がある場合、

(状況4) 図5(b)に示すように、 p_1 における接ベクトル $t = \alpha(-f_y, f_x) / \|\nabla f\|$ と $\overrightarrow{p_0 p_1}$ とのなす角度 θ が、 $|\theta| > \rho$ を満たす場合。

そして、(状況1), (状況3), (状況4)のいずれかが

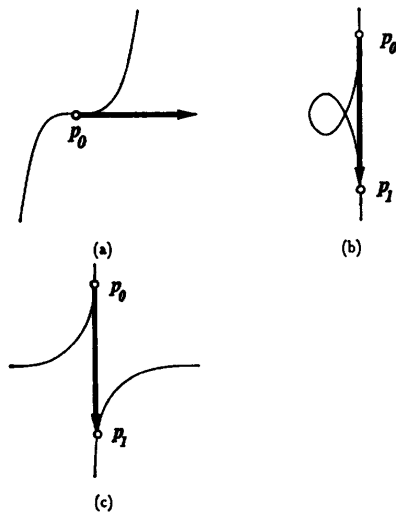


図4 追跡の失敗例：(a) Newton法が収束しない場合、(b) 微細構造を見落とす場合、(c) 曲線の接続関係を誤る場合

Fig. 4 Tracing failure: (a) Newton iteration does not converge, (b) small features are not detected, (c) curve connectivity is determined incorrectly.

生じていればステップ幅を半分にしてやり直す。(状況2)が生じたら、その特徴点に到達したと判断し、その特徴点が①または③ならそのブランチの追跡を終了し、②または④ならば追跡を続行する。

図4(a), (b), (c)はそれぞれ(状況1), (状況3), (状況4)の生じている例である。

もちろん、これらのチェックですべての失敗が防げるわけではないが、実験により多くの場合に有効であることを確認した。

2.5 実験結果

今まで述べてきた算法を試作システムとして実装し実験を行った。使用計算機は Sun Microsystems社の SPARCstation ELC, 使用言語は GNU C++, システムのソースコードは約1万行であり、数値計算は倍精度で行った。

まず、文献10), 13)に含まれている例題について実験を行った。文献13)には平面代数曲線の例題が90個含まれており、それらはすべて x, y に関して6次以下であった。これらすべてを試したところ、1例(ex. 90: $(y-x^2+1/4)^2-25y^5/16=0$)を除いて追跡に成功した。文献10)には57個の例題が含まれており、これらもすべて x, y に関して6次以下であった。これらのうち、文献13)と重複していないものが22個あり、これらに関してはすべて追跡が成功した。また、パラメータを含んだものが20個あり、これらについてはパラメータを適当に2, 3種類選んで追跡を行い、すべて追跡に成功した^{15), 16)}。図6にその一部を示す。図1も試作システムで描いたものである。文献10), 13)に含まれている曲線は特異点を持つものが多く、一般の曲線に比べて追跡が困難であるが、そのような曲線も正しく追跡できることを確認した。

追跡に要する時間は曲線の次数, 項数, 特異点の数

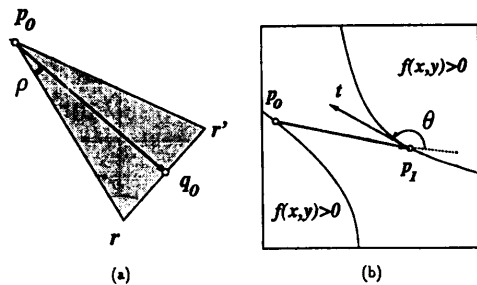


図5 ステップ幅の調整法：(a) 特徴点の有無をチェックする範囲、(b) 角度 θ のチェック

Fig. 5 A method for controlling the step size: (a) check of the number of characteristic points, (b) check of the angle θ .

などによって大きく変化するので一概には言えないが、図1(a)の曲線は8.6秒、図6(a)の曲線は3.2秒で追跡・表示が完了した。

しかし、曲線の定義多項式が x または y に関して7次以上の項を含んでいる場合には、終結式の展開に時間がかかりすぎるために追跡できないことが多かった。

次に、特異点を持つ曲線に摂動を加えて得られる曲線を追跡してみた。摂動を加えることによって特異点はなくなるが、その代わりに微細構造が生じる。図7

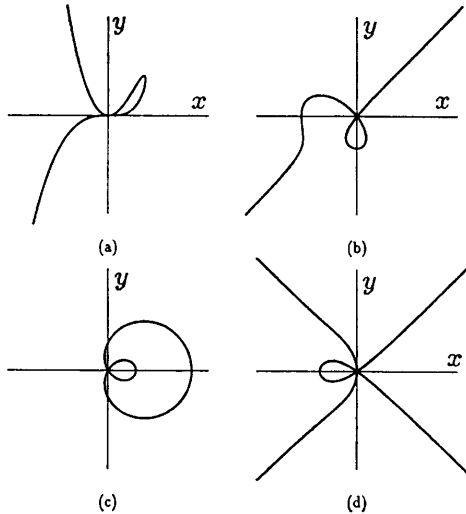


図6 平面代数曲線の追跡例：(a) $y^2 - 2x^2y + x^3 = 0$ ($-3 \leq x, y \leq 3$), (b) $y^2(y+3) - x^2(x+5) = 0$ ($-10 \leq x, y \leq 10$), (c) $(x^2 + y^2 - 2x)^2 - (x^2 + y^2) = 0$ ($-4 \leq x, y \leq 4$), (d) $y^4 - x^4 + 2xy^2 - x^3 = 0$ ($-3 \leq x, y \leq 3$)

Fig. 6 Examples of tracing of plane algebraic curves: (a) $y^2 - 2x^2y + x^3 = 0$ ($-3 \leq x, y \leq 3$), (b) $y^2(y+3) - x^2(x+5) = 0$ ($-10 \leq x, y \leq 10$), (c) $(x^2 + y^2 - 2x)^2 - (x^2 + y^2) = 0$ ($-4 \leq x, y \leq 4$), (d) $y^4 - x^4 + 2xy^2 - x^3 = 0$ ($-3 \leq x, y \leq 3$).

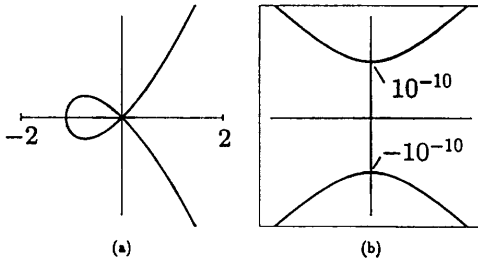


図7 微細構造が正しく求められた例：(a) $y^2 - x^2 - x^3 - 10^{-10} = 0$, (b) 原点付近を 10^{10} 倍に拡大した図
Fig. 7 Small feature successfully detected: (a) $y^2 - x^2 - x^3 - 10^{-10} = 0$, (b) figure around the origin magnified by 10^{10} .

は追跡結果の一例である。(a)は $-2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2$ の領域を示したもので、(b)は(a)の原点付近を 10^{10} 倍に拡大して表示したものである。この例のように、非常に微細な構造を持つ曲線もステップ幅の調整が適切に行われるために追跡できることを確認した。ここで、 10^{-10} 程度の微細構造が求めたのは、誤差の見積もりを用いて二つの点と同じ位置を占めるか否かの判定をきめ細かく行ったためである。

しかしながら、原点から離れたところに高次の特徴点があると、その座標値が精度よく求まらず意味のない結果を出力することがある。例えば、追跡対象領域よりも見積もった誤差の方が大きくなることがある(文献13), ex. 90の追跡に失敗したのはこのためである。その原因としては、(i)高次の特異点に対応する代数方程式 $\text{Res}_y(f, f_y) = 0$ または $\text{Res}_x(f, f_x) = 0$ の根は高次の重根になっているため根を精度よく求めることができないこと、(ii) $\text{Res}_y(f, f_y)$ または $\text{Res}_x(f, f_x)$ の値を評価するとき、 $|x|$ または $|y|$ が大きいと大きな丸め誤差が混入すること、などが考えられる。

3. 曲面交線の追跡法

本章では、前章の追跡法を利用して曲面の交線を追跡する算法を構成する。

問題は、3次元空間において陰的に定義された二つの代数曲面 $f(x, y, z) = 0, g(x, y, z) = 0$ の交線 C をある領域 $[x_{\min}, x_{\max}] \times [y_{\min}, y_{\max}] \times [z_{\min}, z_{\max}]$ の内部で求めることである。 C 上の点で $\nabla f \times \nabla g = 0$ を満たす点を特異点と呼ぶ。円柱 $x^2 + y^2 = 1$ と球 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ の交線のように、特異点を無限個持つような曲線は本論文では扱わない。

次のような手続きで曲面交線を求める：

- (i) 適当な方向から C を平面に射影したとき得られるはずの平面代数曲線 $P: h(x, y) = 0$ を求める。
- (ii) P の特徴点のうち②~④に属するものを求め、それらの点を3次元空間内に戻す。
- (iii) 曲線 C と追跡対象領域の交点を求め、出発点に加える。
- (iv) 3次元空間内で追跡を行う。

(iv)における追跡の手続きは平面の場合と同じであるから(文献4)を参照のこと、以下では(i)についてだけ述べる。

3.1 平面への射影

本節では、空間代数曲線を平面代数曲線へ射影する手続きについて述べる¹⁾。Cを一般の方向に沿って平面に射影するために、まず座標変換

$$\begin{aligned} x &= a_1X + b_1Y + c_1Z, \\ y &= a_2X + b_2Y + c_2Z, \\ z &= a_3X + b_3Y + c_3Z \end{aligned} \tag{10}$$

を施して得られる曲面の方程式を $f'(X, Y, Z)=0$, $g'(X, Y, Z)=0$ とする。Cをこの新しい座標系のZ軸に沿ってXY平面に射影してできる平面代数曲線は、 $P: h(x, y) = \text{Res}_z(f', g') = 0$ として得られる。

(10)式の a_i, b_i, c_i ($i=1, 2, 3$) は以下の三つの条件を満たすように決める。

(条件1) (a_i, b_i, c_i) を行列と見たとき、それが正則である。

(条件2) f', g' がZに関して1次以上の多項式である。

(条件3) h が重複因子を持たない多項式である。これは、 $\text{Res}_x(h, h_x) \neq 0$ かつ $\text{Res}_y(h, h_y) \neq 0$ であることと同値である¹⁷⁾。

(条件2) はC上の特異点がP上の特異点に移るために必要である¹⁶⁾。

3.2 実験結果

2次曲面同士の交線を以上の方法で求めた。図8に、円錐と円柱の交線を太い実線で示す。円錐の頂点に円柱が接するように配置したものであり、原点に特異点を持つが、このような交線も正しく追跡できることを確認した。

しかしながら、 x, y に関してそれぞれ6次以下の平面代数曲線しか追跡できないという制限のため、次数の高い曲面同士の交線は追跡できなかった¹⁶⁾。

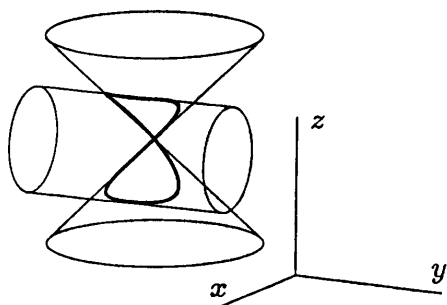


図8 円錐 $x^2+y^2-z^2=0$ と円柱 $(x-1)^2+z^2=1$ の交線
Fig. 8 Intersection curve of the cone $x^2+y^2-z^2=0$ and the cylinder $(x-1)^2+z^2=1$.

4. 応用例

本章では、今まで述べてきた算法の応用例を三つ挙げる。

(a) ソリッドモデリングへの応用: 有理パラメトリック曲面 $(x, y, z) = (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v))$ と、陰曲面 $f(x, y, z) = 0$ の交線を求める場合には、平面代数曲線 $f(X(u, v), Y(u, v), Z(u, v)) = 0$ を追跡すればよい^{5), 8)}。有理3次パラメトリック曲面と2次曲面の交線を求める問題は、6次の平面代数曲線の追跡問題に帰着できる。

(b) 等高線図の描画への応用: 多項式 $f(x, y)$ の等高線図は、平面代数曲線 $f(x, y) = c$ を種々の c の値に対して追跡することにより描画できる。図9に示すように、特異点を持つ等高線(太い実線)も正しく描くことができる。

(c) 代数曲面の描画への応用: 陰的に定義された代数曲面 $S: f(x, y, z) = 0$ の輪郭線(silhouette curve)を描くために、曲面交線の追跡法を用いることができる。

代数曲面 S を (a, b, c) の方向に沿って平行投影するときの輪郭線上の点は代数方程式

$$f=0, af_x+bf_y+cf_z=0 \tag{11}$$

を満たす。第2式は輪郭線上の点では法線方向と視線方向が直交することを表している。したがって、(11)式で定義される二つの代数曲面の交線を追跡すればよい。この方法は、レイトレーシングなどの方法では描けないと思われる孤立点まで検出できるという特長を持つ。図10は孤立点を持つ代数曲面をこの方法で描画したものである。図8の円錐や円柱の輪郭線もこの方法で代数曲線として描いてある。

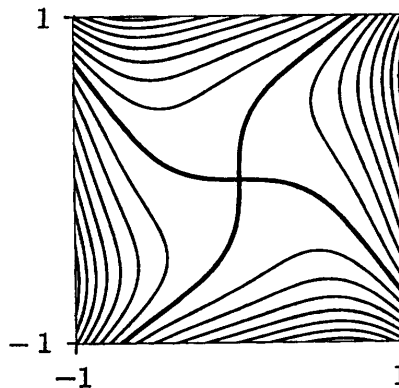


図9 $f(x, y) = xy + x^4 - y^4$ の等高線図の描画
Fig. 9 Drawing of the contour lines of $f(x, y) = xy + x^4 - y^4$.

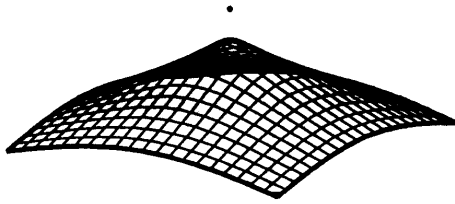


図 10 孤立点を持つ代数曲面の描画

Fig. 10 Drawing of the algebraic surface with an isolated point.

また、代数曲面を x, y, z 軸に垂直な平面で切断して表示することもできる。 z 軸に垂直な平面 $z=c$ で切断する場合には、平面代数曲線 $f(x, y, z)=0$ を追跡すればよい (図 10)。

5. おわりに

本論文では、検出もれのない代数曲線の追跡法を提案し、さらに、浮動小数点演算に伴う誤差を考慮した実装法を構成した。本手法の特長は、従来から用いられていた 3 種類の特徴点に新たに④の特徴点を追加することにより、検出もれを防ぐことができるようになったこと、および、きめの細かいステップ幅の自動調整機構を設けたことにより、大域的構造と微細構造が混在する曲線に対しても正しいトポロジーを効率よく検出できるようになったこと、である。本手法の曲線追跡のソリッドモデリング、等高線図の描画、代数曲面の描画への応用についても実例を含めて考察し、その有効性を確かめた。

ここで提案した算法は、終結式を求めるための数式処理的手法から、折り返し点と特異点を判別するための区間代数的手法まで、いわば雑多な技術の寄せ集めと見えるかもしれない。しかしながら、理論的に (すなわち数値誤差のない世界で) 正しいだけでなく、誤差を伴う現実の環境で正常かつ効率的に動作するシステムを設計する作業は総合的な技術である。ここで提案した算法がこのような形をとったのは、“ちゃんと動く” システムを追求した自然な結果であると筆者らは考えている。

提案した算法の欠点は、現時点では x, y に関してそれぞれ 6 次以下の平面代数曲線しか扱えないことである。これは終結式の展開に時間がかかっているためであり、今後は終結式を展開しないで連立代数方程式を解く方法について考えていく必要がある。例えば、Kriezis et al.^{8),9)} は特徴点を求めるために Newton 法を適用している。すべての根が求められるという保証はなくなるが、この種の手法も検討してみ

る必要がある。

謝辞 本研究を行うにあたり、適切な指導と助言をいただいた東京大学工学部計数工学科の伊理正夫教授、富岡豊助手、今井敏行助手に感謝いたします。

参考文献

- 1) Abhyankar, S. S. and Bajaj, C. L.: Automatic Parametrization of Rational Curves and Surfaces IV: Algebraic Space Curves, *ACM Trans. Gr.*, Vol. 8, pp. 325-334 (1989).
- 2) Bahnhill, R. E., Farin, G., Jordan, M. and Piper, B. R.: Surface/Surface Intersection, *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 4, pp. 3-16 (1987).
- 3) Bahnhill, R. E. and Kersey, S. N.: A Marching Method for Parametric Surface/Surface Intersection, *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 7, pp. 257-280 (1990).
- 4) Bajaj, C. L., Hoffmann, C. M., Lynch, R. E. and Hopcroft, J. E. H.: Tracing Surface Intersections, *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 5, pp. 285-307 (1988).
- 5) Farouki, R. T.: The Characterization of Parametric Surface Sections, *Comput. Gr. Image Process.*, Vol. 33, pp. 209-235 (1986).
- 6) Farouki, R. T.: Trimmed-Surface Algorithms for the Evaluation and Interrogation of Solid Boundary Representations, *IBM J. Res. Dev.*, Vol. 31, pp. 314-334 (1987).
- 7) 伊理正夫: 数値計算—方程式の解法 (理工系 基礎の数学), 朝倉書店, 東京 (1981).
- 8) Kriezis, G. A., Prakash, P. V. and Patrikalakis, N. M.: Method for Intersecting Algebraic Surfaces with Rational Polynomial Patches, *Comput. Aided Des.*, Vol. 22, pp. 645-654 (1990).
- 9) Kriezis, G. A., Patrikalakis, N. M. and Wolter, F.-E.: Topological and Differential-Equation Methods for Surface Intersections, *Comput. Aided Des.*, Vol. 24, pp. 41-55 (1992).
- 10) 森口繁一, 宇田川銑久, 一松 信: 岩波数学公式 I, 岩波書店, 東京 (1956).
- 11) Moses, J.: Solution of Systems of Polynomial Equations by Elimination, *Comm. ACM*, Vol. 9, pp. 634-637 (1966).
- 12) Pratt, M. J. and Geisow, A. D.: Surface/Surface Intersection Problems, *The Mathematics of Surfaces* (Gregory, J. A. ed.), pp. 117-142, Oxford University Press (1986).
- 13) 坂井忠次: グラフと追跡, 培風館, 東京 (1963).
- 14) Smith, B. T.: Error Bounds for Zeros of a Polynomial Based upon Gerschgorin's Theorems, *J. ACM*, Vol. 17, pp. 661-674 (1970).

- 15) 谷口行信: 検出もれのない曲面交線の追跡法, 電子情報通信学会技術報告 (パターン認識・理解), PRU-91-89 (1991), および, 情報処理学会研究報告 (グラフィクスと CAD), 91-CG-54-2 (1991).
- 16) 谷口行信: 検出もれのない代数曲線の追跡法とその応用, 東京大学工学系研究科計数工学専攻修士論文 (1992).
- 17) Walker, R.J.: *Algebraic Curves*, Princeton University Press (1950).

付録 折り返し点が無限個ある場合の例外処理

ここでは, 折り返し点が無限個ある場合の例外処理について述べる. 例えば, $f(x, y) = xy = 0$ では f と f_y が共通因子を持つので x 折り返し点が無限個現れる.

x 折り返し点を求めるために, 連立代数方程式 $f = f_y = 0$ から変数 y を消去して1変数代数方程式 $h(x) = \text{Res}_y(f, f_y) = 0$ を求める. ここで, f が重複因子を持たないという仮定から, $\text{Res}_y(f, f_y)$ は恒等的に0ではありえない¹⁷⁾. したがって, $h(x) = 0$ の根は有限個である. それらを x_1, \dots, x_N とする.

続いて, 各 x_i に対応する y の値を求めるために, $f(x_i, y) = 0$ を解く必要があるが, $f(x_i, y)$ が恒等的に0となれば, 直線 $x = x_i$ 上の点はすべて x 折り返し点であることが分かる. このような直線を x 折り返し線と呼ぶことにする.

同様にして, y 折り返し線も求めておいて, 最後に

x 折り返し線と y 折り返し線の交線を特異点として特徴点に加える.

(平成4年4月1日受付)

(平成4年7月10日採録)



谷口 行信 (正会員)

昭和43年生. 平成2年東京大学工学部計数工学科卒業. 平成4年同大学工学系研究科計数工学専攻修士課程修了. 現在 NTT ヒューマンインタフェース研究所勤務. 映像処理の研究に従事. コンピュータグラフィクス, ソリッドモデリングなどに興味を持つ.



杉原 厚吉 (正会員)

昭和23年生. 昭和46年東京大学工学部計数工学科卒業. 昭和48年同大学院工学系研究科計数工学専門課程修士課程修了. 電子技術総合研究所, 名古屋大学工学部を経て, 現在東京大学工学部計数工学科教授. 工学博士. コンピュータビジョン, 計算幾何学などの研究・教育に従事. 著書 *Machine Interpretation of Line Drawings* (MIT Press, 1986), *Spatial Tessellations* (John Wiley, 1992, 共著) など. 1980, 1988, 1991年度本学会論文賞受賞. 電子情報通信学会, 日本オペレーション・リサーチ学会, 日本応用数理学会等の会員.