信念様相論理の効率的な部分系†

山本幹雄†† 森岡靖太†† 中川聖一††

複数の人間の信念を表現し，推論する論理として様相論理の1つである KD 45 (*m*) がある．しかし，この公理系は充足決定問題の計算量がP領域完全であるという問題点を持っている．理由はこの論理の意味論である可能世界モデルの可能世界の数が入力に対して指数関数的に増大するためである．可能世界の数を減らすような制限によって計算量を減らすことができる．本論文ではこのような2つの制限を提案し考察する．1つ目の制限は KD 45 (*m*) に別の公理を加えたもの，2つ目は論理式の形を制限したものである．それぞれの制限は，可能世界の数を入力の長さに対して多項式的にしか増加しないように制約する．このことから充足決定問題の計算量が NP 完全に下がることを示す．また，制限によって信念様相の否定に関する事実（すなわち，「分からない」に関する事実）の表現力が弱まる．それぞれ，「何重にもネストした信念についての事実が分からない」を表現できない，ネストした「分からない」を表現できないという制限が付く．「分からない」についての複雑な信念は人間にとっても推論するのが困難であり，めったに使われないため，この制限は妥当である．

1. はじめに

近年，他者の心的な状態を表現・推論する手法の研究が盛んである[6]．これは，人間と機械（あるいは機械同士）の間でコミュニケーションを持つシステムの研究が増えたことと，高度なコミュニケーションでは相手の心的状態を考慮に入れる必要があるためである．

心的なモデルにはいろいろな側面が考えられるが，信念・知識に関しての研究が最も盛んである．信念・知識の形式的なモデル化のアプローチとしては，様相論理に基づくもの[8]，Syntactic Theory[7]，自己認識論理[10]が挙げられる．

様相論理に基づくモデル化はこれらのアプローチの中では最も古く形式化も進んでいる．しかし，論理的全知や計算量の問題など多くの問題点を持っている．本論文では，計算量の問題について考察する．

計算量の問題とは信念命題様相論理式の充足決定問題の計算量が非常に大きいことである．具体的には1人の信念のみを扱う場合はNP完全であるが，2人以上の人間を扱う場合はP領域完全であることが知られている[6]．このため，信念様相論理をそのまま実用的なシステムに応用することはできない．なんらかの制約を行って計算量の少ない部分系を使う必要がある．

様相論理の計算量が大きいのは可能世界意味論の世界が論理式の長さに対して指数関数的に増加する可能性があるためである．このため，Horn 節に限定しても計算量が多項式時間クラスにならないことが示唆されている[5]．様相論理の充足決定問題の計算量を下げるにはまず第1に充足可能なモデルの可能世界の数が少なくなるような制限を行わなければならない．本論文では可能世界の数を減らすような論理の制限方法を2つ提案する．

2章で信念に関する命題様相論理の公理系とその可能世界意味論について述べ，3章で通常の信念様相論理に新しい公理を加えた公理系とその計算量，4章では論理式の形に制限を加えた部分系の計算量を考察する．

2. 信念に関する命題様相論理とその意味論

信念に関する命題様相論理の部分系を考察する前に，多重命題様相論理の構文，その意味論と通常の信念様相論理の公理系を簡単に定義しておく．

2.1 構　文

以下に命題様相論理式の定義を示す．

定義1：命題様相論理式

基本命題論理式集合：$\Phi=\{P, Q, R, \cdots\}$

論理結合子：$\neg$(否定)，$\wedge$(論理積)，$\vee$(論理和)

$\rightarrow$(含意，ただし $p\rightarrow q$ は $\neg p \vee q$ の略記)

様相演算子：$[1], [2], \cdots, [m]$

命題様相論理式：$Lm(\Phi)$=「Φを含み，論理結合子・様相演算子の下に閉じている集合」 □

様相演算子の直観的な解釈は $[i]p$ を「i 番目の人が p という命題を信じている」と読むことによって与えられる．また，様相演算子の数mは，この構文によって与えられる論理がm人までの人間の信念を表現でき

† An Efficient Sub-System of Doxastic Modal Logic by MIKIO YAMAMOTO, YASUHIRO MORIOKA and SEIICHI NAKAGAWA (Department of Information and Computer Sciences, Toyohashi University of Technology).

†† 豊橋技術科学大学情報工学系

ることを意味している．

2.2 可能世界意味論

様相論理の意味論としては，多くの場合 Kripke の可能世界意味論が用いられる．本論文では複数の人間の信念を表現する複数の様相演算子を用いるため，Kripke の可能世界意味論を若干拡張したマルチモデル M を使用する[2]．

マルチモデル M はタプル $\langle W, w_0, V, \rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_m \rangle$ で定義される．ここで，W は世界 w_i の集合，w_0 は現実世界を表現しており，$w_0 \in W$ である．一般の Kripke モデルには w_0 という概念はないが，ある／なしにかかわらず意味論としては等価である．しかし，現実世界を仮定したほうが意味論を理解するのに容易であるため加えた．V は $W \times \Phi$ から $\{T, F\}$ への関数であり，各世界での基本命題論理式の真偽値を決定する付値関数である．ρ_i は W 上での2項関係である．m は様相演算子の種類の数（m 人の信念）である．ρ_i はそれぞれの人の信念に関する構造をとらえるために使用される．マルチモデルを使用して，ある世界 w での命題様相論理式の真偽値を定義できる．あるマルチモデル $M=\langle W, \cdots \rangle$ の W に含まれる世界 w で様相論理式 p が真であることを $(M, w) \models p$ と表せば，次のように定義できる．

定義2：命題様相論理式の充足可能性

以下のように再帰的に定義される．

$(M, w) \models P$ (for $P \in \Phi$) iff $V(w, P) = T$

$(M, w) \models \neg p$ iff $(M, w) \not\models p$

$(M, w) \models p \wedge q$ iff $(M, w) \models p$ かつ $(M, w) \models q$

$(M, w) \models [i]p$ iff すべての $(w, t) \in \rho_i$ であるような t に対して $(M, t) \models p$ □

命題様相論理式の充足可能性と妥当性を次に定義する．

定義3：命題様相論理式の充足可能性と妥当性

$(M, w_0) \models p$ であるような (M, w_0) が1つでもある場合「p は充足可能である」と言う．また，すべての (M, w_0) に関して $(M, w_0) \models p$ である場合，「p は妥当である」と言い，$\models p$ で表現する． □

ρ_i にいくつかの制限を課すことによって，各種様相論理の健全性と完全性を証明できる．ρ_i の制限としては Reflexivity（すべての $s \in W$ に関して $(s, s) \in \rho$），Transitivity（$(s, t), (t, w) \in \rho$ ならば，$(s, w) \in \rho$），Eculidean（$(s, t), (s, w) \in \rho$ ならば，$(t, w) \in \rho$），Serial（すべての $s \in W$ に関して，少なくとも1つは $(s, w) \in \rho$ であるような w が存在する）といったものがある[6]．

次節では，あるマルチモデルに関して，完全な信念様相論理の公理系について述べる．

2.3 信念に関する公理系

KD45 と呼ばれる様相論理の公理系が，1人の信念に関する論理として広く知られている．以下に KD45 を複数の人間の信念を扱うものに拡張した KD45(m) の公理系を示す[6]．

定義4：KD45(m)

公理

(a1) すべての命題論理におけるトートロジー

(a2) $([i]p \wedge [i](p \rightarrow q)) \rightarrow [i]q$, $i=1, \cdots, m$

(a3) $[i]p \rightarrow \neg[i]\neg p$, $i=1, 2, \cdots, m$

(a4) $[i]p \rightarrow [i][i]p$, $i=1, 2, \cdots, m$

(a5) $\neg[i]p \rightarrow [i]\neg[i]p$, $i=1, 2, \cdots, m$

推論規則

(r1) p かつ $p \rightarrow q$ から q を推論する

(r2) p から $[i]p$ を推論する，$i=1, 2, \cdots, m$ □

KD45(m) に関する以下の定理がよく知られている．

定理1：KD45(m) の完全性[6]

KD45(m) は各 ρ_i に Transitivity, Euclidean, Serial の条件を課したマルチモデルに関して健全でかつ完全である． □

定理2：KD45(m) の充足決定問題の計算量[6),9)]

KD45(m) の論理式 p の充足決定問題の計算量は m に依存して次のようになる．

$m=1$ の場合：NP 完全

$m \geqq 2$ の場合：P 領域完全 □

定理3：木構造の可能世界関係[6]

KD45(m) の論理式 p が充足可能であるとき，また

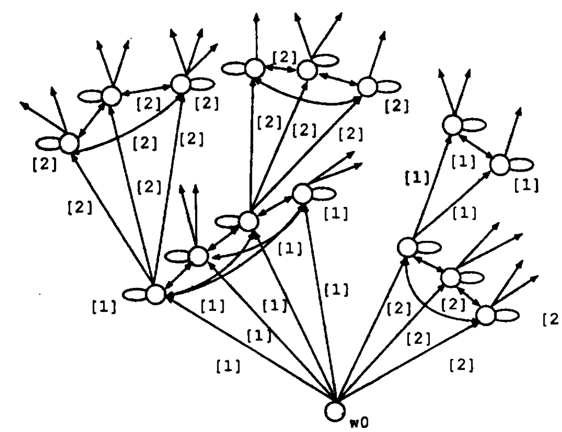


図1 KD45(2) のマルチモデルの例
Fig. 1 An example of multi-model for KD45(2).

そのときに限り世界間の関係が木構造（非巡回的なグラフ）をしたマルチモデルの関係 ρ を Transitivity, Euclidean, Serial の条件に閉じた関係に変換した（p を充足する）マルチモデル M' が存在する．□

図1に木構造の世界間の到達関係の例を示す．この例は1と2という2人の信念のモデルとなっている．

3. KD 45(m) に公理を加えて制限した信念様相論理

この章では KD 45 (m) に1つの公理を加えて制限した信念様相論理 KD 45_N (m) について考察する．

3.1 信念様相演算子の否定についての考察

まず様相演算子 $[i]$ について考察する．前節で述べたように $[i]p$ は「i 番目の人が p を信じている」と解釈できる．問題となるのは，この命題の否定 $\neg[i]p$ である．これは「i 番目の人は p を信じていない」という日本語で表現できるが，「信じていない」は2つの解釈を持つことができる．1つは(a)「i 番目の人が p の否定を信じている」であり，もう1つは(b)「i 番目の人が p を信じていることはない」という解釈である．(b)の解釈はあくまでも信じていないだけであって，否定を信じているとは言っていないことに注意を要する．信念に関する注意深い観察によって信念の論理は(b)の解釈をとっており，これを形式化しているのが KD 45 (m) 体系である．

しかし，「A君はそこに車があるとは信じていない．」という文から受ける印象は「A君はそこに車がないと信じている．」である．このように，言語的な「信じている」はその否定によって，命題の否定を信じている場合が多い．例えば，

「A君は神の存在を信じていない．」
「A君はその本が正しいと信じていない．」
「A君は雪が黒いとは信じていない．」

等である．これらは直観的には信じられる命題の否定を信じているという解釈がもっともらしい．このように，日常使用される「信じている」については，(a)のような強い解釈を行ってもよい場合が多い．

信念の論理に KD 45 (m) などのような，(b)の解釈をとる理由は「知らない」あるいは「わからない」を表現するためである．KD 45 (m) では $\neg[i]p\wedge\neg[i]\neg p$ が p も $\neg p$ も信じていないことを表現しているため,「わからない」を表現できる．しかし，(a)の解釈を行う論理では $\neg[i]p\wedge\neg[i]p=\neg[i]p\wedge[i]p$ となり，矛盾となる．このように「わからない」を表現し，推論するシステムでは KD 45 (m) を使う必要がある．しかし，まさにこのために $m\geqq 2$ の論理式の充足決定問題がP領域完全になるのである．次節以下で示すように，(a)の解釈をとる論理では $m\geqq 2$ に関しても NP クラスに留まる．(実際の証明の際には(a)の解釈を少し一般化した論理について考察する．)

3.2 KD 45_N (m) の公理系と性質

前節の(a)のような解釈をする論理は様相演算子の前の否定を中に入れることを許す公理を KD 45 (m) に加えることによって得られる．しかしここでは，次のように少し一般化された公理を導入する．

(a 6)　$\neg[\mathrm{B}_0][\mathrm{B}_1]\cdots[\mathrm{B}_N]p\rightarrow[\mathrm{B}_0]\neg[\mathrm{B}_1]\cdots[\mathrm{B}_N]p$,
$\mathrm{B}_i=1,2,\cdots,m$
ただし，$\mathrm{B}_i\neq\mathrm{B}_{i+1}$　である．

この公理は様相演算子がネストしているとき，内側から $N+1$ 個以上外にある様相演算子の否定は中に入れてよいことを述べた公理である．(a)の解釈はこの公理の $N=0$ という特殊な場合である．以下では，この体系を KD 45_N (m) と呼ぶことにする．KD 45_0 (m) は(a)の解釈をとる論理である．論理式の様相演算子のネストの一番深いところから N 個外側の様相演算子のスコープの中では「わからない」を自由に表現できる.「わからない」のネストも N 以下となる．しかし，一般に「わからないことがわからない」などのような複雑な知識を表現したり推論したりする機会は少ないと思われるため，$N=0$ または1の論理が重要である．

次の定理を証明することができる．

定理4：KD 45_N (m) の完全性

KD 45_N (m) は，可能世界間の関係 ρ_i に，Serial, Transitivity, Euclidean および(a 6)の公理に対応した次のような条件を加えたマルチモデルに関して，健全でかつ完全である．

$$\rho_{\mathrm{B}_N}^{-1}|\cdots|\rho_{\mathrm{B}_0}^{-1}|\rho_{\mathrm{B}_0}\subseteq\rho_{\mathrm{B}_N}^{-1}|\cdots|\rho_{\mathrm{B}_1}^{-1}\qquad N\geq 1$$
$$\rho_{\mathrm{B}_0}^{-1}|\rho_{\mathrm{B}_0}\subseteq\lambda\qquad N=0$$

ここで，“｜”は関係の連接(ρ_1, ρ_2 を2項関係とすると，$\rho_1|\rho_2=\{(s,w)|(s,t)\in\rho_1$ かつ $(t,w)\in\rho_2\}$), “-1” は逆関係($\rho^{-1}=\{(s,w)|(w,s)\in\rho\}$), λ は，すべての $s\in W$ に関して (s,s) であるような2項関係である．

□

証明：

Catach[4] の Deterministic Theory を使って間接的に証明することができる．Deterministic Theory を用いれば，KD 45 (m) のモデルに，公理(a 6)から導

かれる上記の ρ_i の制限を加えることによって，KD 45_N (m) の完全なモデルを得ることができる． □

様相演算子を論理式から取り除いた式を PC 変形式と呼び，ある論理式の真偽値がその論理式の PC 変形式と同値である場合，その様相論理は命題論理に崩壊した体系と呼ばれる[1]．命題論理に崩壊した様相論理では様相演算子がまったく意味を持っていない．KD 45_N (m) が命題論理に崩壊しないことを以下に示す．

定理 5：

KD 45_N (m) は命題論理に崩壊しない． □

証明：

$p \rightarrow [i]p$ は KD 45_N (m) において恒真ではない（この式を偽とする世界を簡単につくることができる）．しかし，この式の PC 変形式 $p \rightarrow p$ は命題論理の定理であるため，KD $45_N(m)$ においても定理であり，恒真である．つまり，KD $45_N(m)$ において，その PC 変形式と同値でない式が存在する．よって，KD $45_N(m)$ は命題論理には崩壊しない． □

また，KD 45_N (m) は，次の定理 6 に示されるような特徴を持つ．

定理 6：

$$[C_0]\cdots[C_k][B_0][B_1]\cdots[B_N]p \longleftrightarrow \neg[C_0]\cdots[C_k][B_0]\neg[B_1]\cdots[B_N]p$$

ただし，$C_i \neq C_{i+1}$，$B_i \neq B_{i+1}$ である． □

証明：

公理 (a 6) と公理 (a 3) より，明らかに次の式は定理である．

$$\neg[B_0][B_1]\cdots[B_N]p \longleftrightarrow [B_0]\neg[B_1]\cdots[B_N]p$$

この式は，p を任意の様相演算子列を頭に持つ論理式とすることによって，様相演算子のネストが内側から N 以上の様相演算子の否定を中に入れたものと，中に入れないものが同値であることを意味している．また，様相論理では同値の部分式を入れ換えても，全体の真偽値は変化しない．よって，上式を定理 6 の左辺に次々と適用することによって，右辺が得られる．

□

定理 6 より，特に $N=0$ の場合は，$[i]p \longleftrightarrow \neg[i]\neg p$ となり，一般の様相論理で言うところの必然様相と可能様相がまったく同じ意味になることになる．

さらに，KD 45_N (m) の可能世界意味論上の可能世界の到達関係には次のような命題が成り立つ．

定義 5：同レベルの世界

w_0 から同じ様相の系列をたどって到達できる世界の集合を同レベルの世界と呼ぶ． □

命題 1：

KD 45_N (m) のマルチモデル中の同レベルの各世界から，長さが N の同じ様相系列（同じ様相は連続しない）で到達できる世界の集合は等しい． □

証明：

一般に，$\rho_1 \subseteq \rho_2$ ならば $\rho_1^{-1} \subseteq \rho_2^{-1}$，さらに $(\rho_1|\rho_2)^{-1} = \rho_2^{-1}|\rho_1^{-1}$ であるから，定理 4 で示された到達関係の制限は次のように変形できる．

$$\rho_{B_0}^{-1}|\rho_{B_0}|\rho_{B_1}|\cdots|\rho_{B_N} \subseteq \rho_{B_1}|\cdots|\rho_{B_N} \tag{1}$$

ρ_{B_i} は Serial であるから，$\rho_{B_i}^{-1}|\rho_{B_i} \supseteq \lambda$ である．よって，

$$\rho_{B_0}^{-1}|\rho_{B_0}|\rho_{B_1}|\cdots|\rho_{B_N} \supseteq \lambda|\rho_{B_1}|\cdots|\rho_{B_N} = \rho_{B_1}|\cdots|\rho_{B_N} \tag{2}$$

(1)，(2) 式より，

$$\rho_{B_0}^{-1}|\rho_{B_0}|\rho_{B_1}|\cdots|\rho_{B_N} = \rho_{B_1}|\cdots|\rho_{B_N} \tag{3}$$

$\rho_1 = \rho_2$ ならば $\rho|\rho_1|\rho' = \rho|\rho_2|\rho'$ であるから，(3) 式の両辺を $\rho_{B_1}^{-1}$ と ρ_x ではさみ，次のように変形する．

$$\rho_{B_1}^{-1}|\rho_{B_0}^{-1}|\rho_{B_0}|\rho_{B_1}|\rho_{B_2}|\cdots|\rho_{B_N}|\rho_x = \rho_{B_1}^{-1}|\rho_{B_1}|\rho_{B_2}|\cdots|\rho_{B_N}|\rho_x \tag{4}$$

ここで，右辺を (3) 式によって変形すると，

$$\underline{\rho_{B_1}^{-1}|\rho_{B_0}^{-1}|\rho_{B_0}|\rho_{B_1}}|\rho_{B_2}|\cdots|\rho_{B_N}|\rho_x = \rho_{B_2}|\cdots|\rho_{B_N}|\rho_x \tag{5}$$

となる．(5) 式の下線部は関係とその逆関係のネストであるが，この部分は上記の (4) 式と (5) 式の導出を繰り返すことにより，任意に深くできる．よって，KD 45_N (m) の可能世界の到達関係には次の式が成り立つ．

$$\rho_{C_1}^{-1}|\rho_{C_2}^{-1}|\cdots|\rho_{C_2}|\rho_{C_1}|\rho_{B_1}|\cdots|\rho_{B_N} \subseteq \rho_{B_1}|\cdots|\rho_{B_N} \tag{6}$$

(6) 式では，前半の逆関係の系列を任意の数だけたどることができるので，ある世界から必ず w_0 に到達できる．w_0 から逆関係の系列を逆にたどった世界は，もとのある世界と同レベルの世界すべての集合である．さらに同レベルの世界集合すべてから，長さ N の様相系列をたどる関係が，単なる長さ N の関係の連接に含まれることを意味している．すなわち，同レベルの世界から長さ N の任意の系列（同じ様相は連続しない）により，到達できる世界は等しいことを意味する． □

定理 4 の $N=0$ の場合の可能世界の関係は，ある世界から多くとも 1 つの世界にしか到達できないことを意味する．これは，定理 6 の $N=0$ の場合が意味することと同じである．図 2 に $N=0$ の場合のマルチモデルの例を示す．KD 45 (m) とは異なり，あるネス

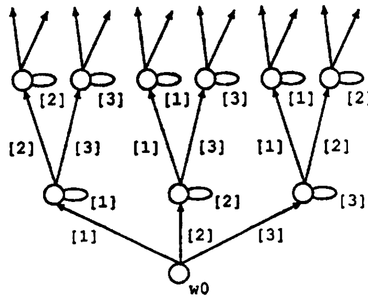


図 2 KD 45$_0$(3) のマルチモデルの例
Fig. 2 An example of multi-model for KD 45$_0$(3).

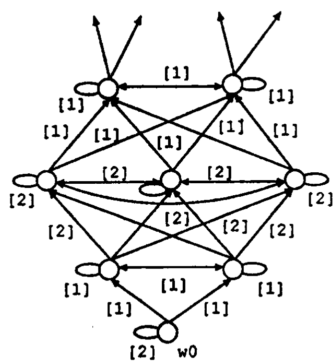


図 3 KD 45$_1$(2) のマルチモデルの例
Fig. 3 An example of multi-model for KD 45$_1$(2).

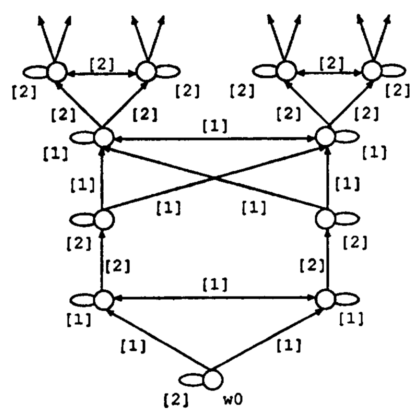


図 4 KD 45$_2$(2) のマルチモデルの例
Fig. 4 An example of multi-model for KD 45$_2$(2).

トのレベルで他人の信念を表す可能な世界はただ1つだけであり，非常に単純になっていることがわかる．また，**図 3** に $N=1$ の場合，**図 4** に $N=2$ の場合を示す．それぞれ，命題1の性質を反映している．

3.3 KD 45$_N$(m) の論理式の充足決定問題の計算量

次に，KD 45$_N$ (m) の論理式の充足決定問題の計算量を考察する．はじめに KD 45(m)，KD 45$_N$ (m) のどちらにも言える一般的な補題を証明する．

補題 1：

KD 45 (m) あるいは KD 45$_N$ (m) の論理式 p が充足可能であるならば，世界の数が $|p|^c$ ($|p|$ は論理式に含まれる文字および記号の数，c は定数) 以下であるようなマルチモデル M が1つは存在し，M は p を充足するとする．このとき，充足決定問題は NP クラスに属する． □

証明：

各世界での付値関数を p に現れる基本論理式だけに値を与えるように限定すれば，p に現れる基本論理式の数が n 個 ($|p|=n$ とする) 以下である．また，各世界間の関係 ρ_i の要素の数は n^{2c} 以下である．p に現れる様相演算子の種類も n 個以下であるから，ρ_i は n 個以下である．よって，$O(n^{(2c+2)})$ 以下の時間でマルチモデルを非決定的に推測できる．さらに，ρ を制限する条件のチェックも多項式時間で行うことができるため，多項式時間で非決定的に p を充足する正しいマルチモデルを推測することができる．

マルチモデル M が与えられたならば，$(M,s)\models p$ であるかどうかを多項式時間で決定的に調べることができる．これは，再帰的に p の部分式を調べることで計算できる．

よって，非決定的に多項式時間で p が充足可能であるかどうかを決定できるので NP クラスに属することになる． □

KD 45$_N$ (m) は命題論理を内に含むので充足決定問題が NP 困難であることは明らかである．よって，KD 45$_N$ (m) の充足可能な論理式 p が $|p|^c$ 以下の世界からなるマルチモデルで充足可能であることを示せば，補題1を使用して KD 45$_N$ (m) の充足決定問題が NP 完全であることを示すことができる．

Ladner は S 5 の論理式 p が充足可能であるならば，p に含まれる様相演算子の数以下の世界からなるモデルで充足可能であることを証明するために，与えられた充足可能なモデルから $|p|$ 以下の世界からなるモデルへのマッピングを考えた[9]．ここでも同様の手法を使う．まず，$f_n(seq, w)$ という関数を定義してから，マッピングを定義する．

定義 6：到達関係を逆にたどったとき共通の世界に行き着く世界の集合 $f_n(seq, w)$

seq をある様相系列 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ としたとき，$(w, w')\in\rho_j^{-1}$ であるような w' を1つ選ぶ．ここで，ρ_j は

$\rho_j=\rho_{i_1}|\rho_{i_2}|\cdots|\rho_{i_k}$　　$n>k$ の場合,

$\rho_j=\rho_{i_{k-n+1}}|\rho_{i_{k-n+2}}|\cdots|\rho_{i_k}$　　$n\leqq k$ の場合,

である．このとき $f_n(seq, w)$ は次のように定義される．

$f_n(seq, w)=\{s|(w', s)\in\rho_j\}\cup\{w\}$ □

定義7：縮小されたマルチモデル

p を充足する KD 45_N (m) のマルチモデル $M=\langle W, w_0, V, \rho_1, \cdots, \rho_m\rangle$ があるとする．このとき，p の部分論理式から世界の集合へのマッピング $\sigma(q)$ を p の構造に関して再帰的に与える．q, r, s を p の部分式とする．

(1) $(M, w)\models p$ であるような w を W から選び，$\sigma(p)=\{w\}$ とする．

(2) $q=\neg r$ ならば，$\sigma(r)=\sigma(q)$.

(3) $q=r\wedge s$ または $r\vee s$ ならば，
$\sigma(r)=\sigma(s)=\sigma(q)$.

(4) $q=[i]r$ ならば，
$\sigma(r)=ST\cup SF\cup S_0$ とする．ここで，
$w'\in\sigma(q)$,
$seq=q$ をスコープ内とする様相演算子を内側のものから順に並べた列
$ST'=\{w|V(w, q)=T$ かつ $w\in\sigma(q)\}$,
$SF'=\{w|V(w, q)=F$ かつ $w\in\sigma(q)$,

とすると，ST, SF, S_0 は次のようになる．

ST: $ST'\cap f_N(seq, w')$ の各世界から様相 i で到達可能な世界の中から1つを選んだものの集合．

SF: $SF'\cap f_N(seq, w')$ の各世界から様相 i で到達可能な世界 w'' でかつ $V(w'', r)=F$ の世界の中から1つを選んだものの集合．

S_0: ST' の世界から様相 i で到達可能でかつ他の部分式に対してステップ(4)で選ばれた世界の集合．

σ の値域の要素（世界の集合）として選択された世界の和集合を $W', w'_0\in\sigma(p)$ とし，W' に関連した部分だけに限定した V' と ρ'_i を考える．さらに，ρ'_i の Transitive, Euclidean な条件についての閉包を ρ''_i とする．このとき，$\langle W', w'_0, V', \rho''_1, \cdots, \rho''_m\rangle$ のようなマルチモデル M' を縮小されたマルチモデルと呼ぶ． □

図5 に KD 45_1 (2) のマルチモデルの縮小の様子を示す．点線の部分が σ の構成で選択された世界である．

命題2：縮小されたマルチモデルの健全性

KD 45_N (m) のマルチモデル M が論理式 p を充足するならば，縮小されたマルチモデル M' も p を充足する． □

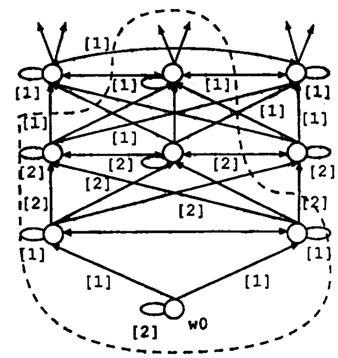


図5 世界の選択例
Fig. 5 An example of choosing worlds.

証明：

もとのマルチモデル M から選択された世界が真偽値を保存していれば，再帰的に論理式 p も真偽値(真)を保存する．すなわち，

$V(w, q)=V'(w, q)$，ここで，$w\in\sigma(q)$

が成り立てばよい．

様相演算子を含まない部分式は，もとの M の V の部分集合を使用するので真偽値が保存される．様相演算子を頭にもつ部分式についてはステップ(4)で処理される．ここで $f_N(seq, w')$ に含まれる世界については，真である場合も偽である場合も明らかに正しく処理されているが，$f_N(seq, w')$ に含まれない世界については何も処理されていない．しかし命題1より N 回たどれば同じ様相レベルから必ず同じ世界に到達できるため，$f_N(seq, w')$ に含まれていない世界は $f_N(seq, w')$ から到達できる世界に必ず到達可能である．すなわち，真偽値を保存している． □

命題3：

KD 45_N (m) の命題様相論理式 p が充足可能であるならば，n^N+n+1 以下の世界からなるマルチモデル M で充足可能である．ここで n は p 中の様相演算子の数である． □

証明：

縮小された世界 M' の世界の数を数え上げればよい．σ の定義のステップ(4)より，$\sigma(r)$ は ST, SF, S_0 の和であるが，S_0 は他の $[i]r$ に関する再帰以外で選択される世界であるから，$\sigma(r)$ を決定するために純粋に選択される世界は $ST\cup SF=\sigma([i]r)\cap f_N(seq, w)$ である（ここで，$w\in\sigma([i]r)$)．また，各世界から M' の中で到達可能として選択される世界の数は n 以下である．なぜなら，すべての $\sigma([i]r)$ の集合の中にある同一の世界が入っていても，$[i]r$ の形をした部分

式はn個であるから，n以上は選択されない．よって，選択された世界 $(\sigma([i]r))$ と関係のある $f_N(seq, w)$ の世界は$n^{N-1}+1$以下であり，ステップ(4)で1つの部分式に対するσの世界を決めるときに新たに選択される世界は $n^{N-1}+1$ 以下である．$[i]r$ の形をした部分式はn個以下であり，w_0 は必ず選択されるので，M' の世界の集合 W' は次の式を満たす．

$$|W'| \leqq (n^{N-1}+1)\times n+1=n^N+n+1 \qquad \square$$

定理7：

KD 45$_N$ (m) の命題様相論理式pの充足決定問題は NP 完全である． □

証明：

KD 45$_N$ (m) の命題論理を内に含むため，充足決定問題がNP困難であることは明らかである．また，命題3と補題1によって，KD 45$_N$ (m) の充足決定問題は NP クラスに属することが言える． □

KD 45$_0$ (m) では定理6から $[i](p\vee q)=[i]p\vee[i]q$ が成り立つため節形式に分解できる．このため他の様相論理に比べはるかに効率的な推論を行うことができる．マルチモデルの各世界で評価すべき式を Horn 節に限定することによって，古典命題論理の Horn 節と同じオーダで充足決定問題が計算できることを期待できる[3)]．

しかし，KD 45$_N$$(m)$ は「わからない」を表現できないか，表現できても様相演算子のネストの深いところだけという制限があるため，適用できない分野もあるであろう．特に KD 45$_0$$(m)$ では，(a 6)より $[i](p\vee\neg p)\longleftrightarrow[i]p\vee[i]\neg p$ であるため，$[i]p\vee[i]\neg p$ が定理となる．この定理は，すべての命題についてiは肯定または否定のいずれかを信じていることを意味しており，現実の人間の信念モデルとしては強すぎる一面もある．次章では「わからない」が，ネストしていない限り任意の深さの部分に埋め込むことができ，かつ計算量が少ない KD 45 (m) の部分系について考察する．

4. 単調な信念節の節形式への制限

4.1 単調な信念節

様相論理式が命題論理のような節形式に変換できないのは，$[i](p\vee q)\neq[i]p\vee[i]q$ であることによる．拡張された節形式は，$[i](p\vee q)$ をリテラルと認める．続く節での議論はすべてこの節形式での議論とする．

定義8：様相論理に拡張された節形式

様相論理に拡張された節形式は信念節の論理積である．信念節は信念リテラルまたはその否定，あるいはそれらの論理和である．信念リテラルは基本命題論理式，または $[i]p$ の形をしたものである．ここでpは信念節である． □

また，拡張された節形式のある様相演算子の極性（正または負）は次のように再帰的に定義される．

定義9：様相演算子の極性

(1) 最も外側の様相演算子は否定が付いている場合には負，付いていない場合には正の極性を持っている．またその演算子のスコープの中は同じ極性の雰囲気を持つと言う．

(2) 負の雰囲気の中で，否定が付いている演算子は正の極性を持つ．付いていない演算子は負の極性を持つ．さらに，その演算子のスコープの中では同じ極性の雰囲気を持つ． □

例えば，$[1]\neg[2]([3]p\vee\neg[4]q)$ では，[1]，[4] が正の極性を，[2]，[3]が負の極性を持つ．

本章では，負の極性を持つ信念リテラルの数は制限しないが，その形を制限することによって，可能世界を減らす試みを行う．制限は次のように信念節に対して定義される．

定義 10：単調な信念節

負の極性を持つ信念リテラルのスコープの中の信念リテラルはすべて負の極性を持つ節を単調な信念節とする． □

例えば，次のような信念節は単調な信念節である．

$$[1](p\vee\neg[3](q\vee[4][5]r)\vee\neg[3]r)$$

負の極性を持つ[3]という様相演算子のスコープの中の様相演算子[4]と[5]は負の極性を持っている．

単調な信念節の系では，様相演算子列の中に否定が高々1回（基本命題論理式の前の否定は別）しか許されない．これによって，否定後に出現する様相演算子に関する世界の数を制限し，計算量の減少を図っている．次節では，この制限による計算量の考察を行う．

4.2 単調な信念節形式の充足決定問題の計算量

単調な信念節形式の充足決定問題が KD 45 (m) において NP 完全クラスであることを言うために，KD 45$_N$ (m) と同じようにpを充足するマルチモデルMから世界の数が少ないマルチモデルM'へのマッピングを定義する．

定義 11：単調な信念節に制限された場合の縮小されたマルチモデルへのマッピング

pを充足するマルチモデルを $M=\langle W, w_0, V, \rho_1, \cdots, \rho_m\rangle$ とする．pの部分式 q に対する W の部分集

合へのマッピング $\sigma(q)$ を p の構造に関して再帰的に与える．

（1） $(M, w) \models p$ であるような w を W から選び，$\sigma(p)=w$ とする．

（2） $q=\neg r$ ならば，$\sigma(r)=\sigma(q)$

（3） $q=r \wedge s$ または $q=r \vee s$ ならば，
$\sigma(r)=\sigma(s)=\sigma(q)$

（4） $q=[i]r$ の場合，

（A） q が正の極性を持ち，$V(\sigma(q), q)=T$ ならば，$(\sigma(q), w) \in \rho_i$ かつ $V(w, r)=T$ であるような w を選択し，$\sigma(q)=w$ とする．

（B） q が負の極性を持ち，$V(\sigma(q), q)=F$ ならば，$(\sigma(q), w) \in \rho_i$ かつ $V(w, r)=F$ であるような w を選択し，$\sigma(q)=w$ とする．

ここまでの様子を**図 6** の上の図に示す．一点鎖線に囲まれた部分が σ を得る過程で選択された世界である．

到達関係を σ の値として選択された世界に関係する部分だけに限定し，さらに同レベルの各世界から到達可能な世界の集合が等しくなるように拡張された到達関係を ρ_i' とする．すなわち，ρ_i' は同レベルの世界集合と，そこから1つの様相で到達できる世界集合が全結合となる．選択された世界に関係する部分だけに限定された付値関数 V を V' とする．さらに，ρ_i' の Transitive, Euclidean な条件についての閉包を ρ_i'' とする．ρ_i'' に拡張された到達関係の例を図 6 の下の図に示す．点線が拡張の際に付加された関係である．また，σ の値域の各要素の和集合を W'，$\sigma(p)$ の要素を w_0 とする．このとき，$\langle W', w_0, V', \rho_1'', \cdots, \rho_m'' \rangle$ のようなマルチモデル M' を単調な信念節に制限された場合の縮小されたマルチモデルと呼ぶ． □

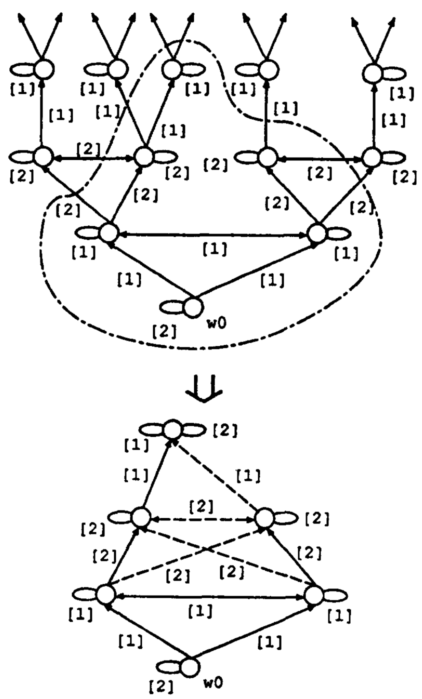


図 6 単調な信念節のための世界の選択例
Fig. 6 An example of choosing worlds for monotonic doxastic clauses.

命題 4：単調な信念節に制限された場合の p を充足するマルチモデルから得られる縮小されたマルチモデル M' は p を充足する． □

証明：

様相演算子のない部分式に関しては，M' の構成において M の付値関数 V がそのまま使われているため，その真偽値を保存するのは明らかである．問題は世界の到達関係を変更したにもかかわらず様相演算子を含む論理式 $q=[i]r$ が p の真偽値に影響を与える場合には真偽値を保存することを証明することである．

M' の構成のステップ（4）で，q が正の極性で偽の場合と，負の極性で真の場合は無視された．この場合の部分式の真偽値は全体の論理式 p の真偽値に影響を与えないからである．なぜなら，正の極性を持つ信念リテラルは必ず論理和の一部分として現れ，かつ否定は付いていないため，その値が偽であれば論理和全体の真偽値に影響を与えない．また，負の極性を持つ信念リテラルが真の値を持っている場合には，負の極性を持っている一番外側の信念リテラル（否定を持っている）を偽としてしまうため，同じ理由で p に影響を与えない．例えば，$\neg[i](q \vee [j]r)$ というような論理式をある世界で真とするためには，$[i]$ の中の論理式の否定が成り立つ世界に少なくとも1つ到達可能でなければならない．すなわち，$\neg q \wedge \neg[j]r$ が成り立つ世界である．ここで，$[j]r$ は偽でなければならない．単調な信念節の場合，負の極性を持つ信念リテラルすべてにこのことが言える．真であればもとの論理式を真とすることに影響を与えていない世界であることになる．よって，それぞれの場合の真偽値を保存する必要がないため無視してよい．

無視されなかった部分式（すなわち，$\sigma([i]r)$ の値が定義されている）$[i]r$ は $\sigma([i]r)$ が指示する世界で必ず真偽値を保存することを証明しなければならない．極性が正で真の場合と，極性が負で偽の場合があった．

$q=[i]r$ の極性が負で偽の場合は，$\sigma([i]r)$ の世界

から r が偽である世界が必ず到達可能な世界として選択されているので真偽値(偽)を保存する．問題は $q=[i]r$ の極性が正で真の場合である．同じレベルの世界から到達可能な世界集合を全結合する際に，極性が負で偽の場合に選択された世界が，もとのマルチモデルでは到達可能ではなかったにもかかわらず，$\sigma([i]r)$ の世界から到達可能となってしまう可能性がある．可能世界意味論より，$[i]r$ がある世界で真となるためには，その世界から到達可能なすべての世界で r が真となっている必要があるため，到達関係の拡張の際に接続されたすべての世界においても r が真でなければならない．しかし，極性が正ということは，単調な信念節の定義より，$[i]r$ をスコープ内とする外側の様相演算子もすべて正の極性を持っていることになる．このため，一番外側の正の極性を持つ信念リテラルが真であるためには，その中間の信念リテラルもすべて真でなければならない．つまり，w_0 から $[i]r$ をスコープとする各様相演算子からなる様相演算子の系列で到達できる世界で，$[i]r$ はすべて真であることを意味する．そこから到達可能なすべての世界でも r は真であるため必ず真偽値は保存される． □

命題 5：単調な信念節の論理積である p が充足可能である場合，p の中の様相演算子の数を n とすると，$n+1$ 個以下の可能世界からなるマルチモデルで充足可能である． □

証明：

p を充足する縮小されたマルチモデル M' の構成手続きにおいて，1つの様相演算子につき1つの世界しか新たに選択しないのは明らかであり，かつ w_0 は必ず選択されるので M' は $n+1$ 個以下の世界しか持たない． □

補題1と命題4より以下の定理が導かれる．

定理 8：単調な信念節に制限された KD 45 (m) の充足決定問題の計算量は NP 完全である． □

4.3 単調な信念節に制限された信念論理の性質

単調な信念節に制限された信念論理は，次のような定理によって，示される性質を持つ．

定理 9

単調な信念節に制限された論理式は，KD 45 (m) と KD 45_1 (m) において同値である． □

証明：

KD $45_1(m)$ のマルチモデルと，単調な信念節に制限された KD 45 (m) における縮小されたマルチモデルの条件が等価であることを言えばよい．KD $45_1(m)$ のマルチモデルの条件は，3.2 節で述べたように，同じ様相のレベルの各世界から到達できる世界の集合が同じである（すなわち全結合）ことである．また，単調な信念節に制限された KD 45 (m) の縮小されたマルチモデルは，その構成の定義より明らかに，同じ様相のレベルの各世界から到達できる世界の集合は等しい．さらに，KD 45 (m) のモデルは KD $45_1(m)$ のモデルを含むため，恒真性をチェックするために考慮すべきモデルは等価となる．すなわち，2つの論理における単調な信念節に制限された論理式は同値である． □

定理 9 から，単調な信念節に制限された論理式は KD 45_1 (m) における真偽値と等価であるため，KD 45_1 (m) の定理を用いた変形を受けても単調であるという条件からはずれない限り，KD 45 (m) における真偽値は等価である．以下のような KD 45_1 (m) の定理を用いることができる．

定理 10：KD 45_1 (m) の定理

$$[i](p\vee[j]q)\longleftrightarrow[i]p\vee[i][j]q$$ □

証明：

公理(a 2)を変形すると $[i](p\vee q)\rightarrow[i]p\vee\neg[i]\neg q$ となるため，

$$[i](p\vee[j]q)\rightarrow[i]p\vee\neg[i]\neg[j]q$$

である．定理 6 より，KD 45_1 (m) では $[i][j]p\longleftrightarrow\neg[i]\neg[j]p$ であるため上式は，

$$[i](p\vee[j]q)\rightarrow[i]p\vee[i][j]q$$

となる．逆は明らかに成り立つので，定理 10 は定理である． □

定理 9 と定理 10 により，単調な信念節に制限された論理式は，次の一般形に変形できる．

$$\bigvee_i \phi_i p_i$$

ここで，ϕ_i は任意の様相演算子の単調な列，p_i は様相演算子を含まない命題リテラルの論理和である．

例えば，次のように変形される．

$$[i](p\vee[j](q\vee\neg[k]r)\vee q)$$
$$\Downarrow$$
$$[i](p\vee q)\vee[i][j]q\vee[i][j]\neg[k]r$$

このように，様相演算子列のあとに一般の命題論理の節形式がくる形になる．これは，計算の過程で各様相演算子列が指示する世界集合に関係する事実だけを容易に得ることができることを意味しており，これを利用して充足決定問題のアルゴリズムを高速化できる．

5. おわりに

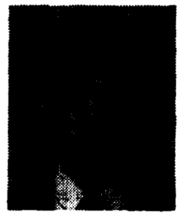
KD 45 (m) は理想的な人間の信念のモデルとして

よく使われるが，計算量が大きいという問題点があった．KD 45 (m) がすぐれている点は「わからない」という命題に対する表現力である．しかし，この点が計算量を増やしている原因でもあるため,「わからない」の表現能力を落とした新しい公理系 (KD 45_N (m))，または KD 45 (m) のままで論理式の形を制限（単調な信念節）することによって計算量を減らす試みを行った．様相論理の計算量が大きいのは可能世界の数が多いことが原因である．今回提案した手法は可能世界の数が多項式オーダまで落ちているので，各可能世界の中で計算される式の形を制限（例えば Horn 節）することによって，容易に充足決定問題を多項式時間クラスにする制限を追加できる[3]．また，他の P 領域完全の問題，例えば体系 K や S 4 などの様相論理も同様の手法で計算量を減らすことができるとわれわれは考えている．

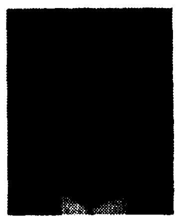
参　考　文　献

1) 三浦，大浜，春藤(訳)：様相論理入門，恒星社厚生閣 (1980). (Hughes, G. E. and Cresswell, M. J.: *An Introduction to Modal Logic*, Methuen (1968).)
2) 山本，中川：多重様相論理 TMS, 人工知能学会誌，Vol. 6, No. 3, pp. 397-406 (1991).
3) 山本，森岡，中川：充足決定問題が多項式時間クラスであるような信念様相命題論理の部分系，第 43 回情報処理学会全国大会論文集，分冊 3，pp. 67-68 (1991).
4) Catach, I.: Normal Multimodal Logic, *Proc. of the 7th AAAI*, pp. 491-495 (1988).
5) Fariñas del Cerro, L. and Penttonen, M.: A Note on the Complexity of the Satisfiability of Modal Horn Clauses, *J. of Logic Programming*, Vol. 4, No. 4, pp. 1-10 (1987).
6) Halpern, J. Y. and Moses, Y.: A Guide to the Modal Logics of Knowledge and Belief, *Proc. of the 9th Int. Joint Conf. on AI*, pp. 480-490 (1985).
7) Haas, A. R.: A Syntactic Theory of Belief and Action, *Artif. Intell.*, Vol. 28, pp. 245-292 (1986).
8) Hintikka, J.: *Knowledge and Belief*, Cornell University Press, Ithaca, N. Y. (1962).
9) Ladner, R. E.: The Computational Complexity of Provability in Systems of Modal Propositional Logic, *SIAM J. Comput.*, Vol. 6, No. 3, pp. 467-480 (1977).
10) Moore, R.: Semantical Considerations on Non-Monotonic Logic, *Artif. Intell.*, Vol. 25, pp. 75-94 (1985).

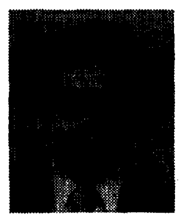
（平成 3 年 11 月 5 日受付）
（平成 4 年 7 月 10 日採録）



山本　幹雄（正会員）
昭和 59 年豊橋技術科学大学情報工学課程卒業．昭和 61 年同大学大学院修士課程修了．同年(株)沖テクノシステムズラボラトリ入社．昭和 63 年豊橋技術科学大学情報工学系教務職員．自然言語処理，人工知能に関する研究に従事．電子情報通信学会，人工知能学会，AAAI, ACL 各会員．



森岡　靖太
平成 3 年豊橋技術科学大学情報工学課程卒業．現在同大学院修士課程情報工学専攻在学中．人工知能の研究に従事．



中川　聖一（正会員）
昭和 51 年京都大学大学院博士課程修了．同年京都大学情報助手．昭和 55 年豊橋技術科学大学情報工学系講師．昭和 58 年助教授．平成 2 年教授．工学博士．昭和 60～61 年カーネギー・メロン大学客員研究員．音声情報処理，自然言語処理，人工知能の研究に従事．昭和 52 年電子通信学会論文賞受賞．著書：「情報基礎学詳説」（分担執筆，コロナ社），「確率モデルによる音声認識」（電子情報通信学会），「音声・聴覚と神経回路網モデル」（共著，オーム社）など．電子情報通信学会，日本音響学会，人工知能学会，IEEE, INNS 各会員．