

9 段数 7 次陽的 Runge-Kutta 法の最適化について†

田中正次†† 村松 茂††† 山下 茂††††

s 段数 p 次陽的 Runge-Kutta 法の係数の誘導法については, Shanks および Cooper と Verner による一般的かつ理論的な研究がある。そして Shanks は, その研究の中で具体的な 9 段数 7 次陽的 Runge-Kutta 法を提案し, また Butcher は, Cooper と Verner の方法を用いて零係数の多い他の 9 段数 7 次陽的 Runge-Kutta 法を導いている。しかし, 公式の導出それ自体がかなり困難なので, 提案された公式は打ち切り誤差や安定性などの観点から十分最適化されているとはいえない。この研究においてわれわれは, 著者たちが導いた 4 自由度をもつ 9 段数 7 次陽的 Runge-Kutta 法の次数条件式群の解を使用する。また, 公式の打ち切り精度や安定性, 丸め誤差などに関する特性を評価するための基準を導入する。ついで, これらの基準に照らして公式が打ち切り誤差, 安定性, 丸め誤差などについて好ましい特性をもつように, 次数条件式群の解の自由パラメータを特殊化して公式を得た。その結果, これまでに知られている公式よりも特性が著しく優れている公式が得られたので報告する。

1. はじめに

s 段数 p 次陽的 Runge-Kutta 法の係数の誘導法については, Shanks¹⁾ および Cooper と Verner²⁾ による一般的かつ理論的な研究がある。そして Shanks は, その研究の中で具体的な 9 段数 7 次陽的 Runge-Kutta 法 (以下 9 段数 7 次陽的 Runge-Kutta 法を 9 段数 7 次法または単に 7 次法と略称する) を提案し, また Butcher は, Cooper と Verner の方法を用いて零係数の多い他の 9 段数 7 次法を導いている³⁾。しかし, 公式の導出自体がかなり困難なので, 提案された公式は打ち切り誤差や安定性などの観点から十分最適化されているとはいえない。

この研究においてわれわれは, 著者たちが導いた 4 自由度をもつ 9 段数 7 次陽的 Runge-Kutta 法の次数条件式群の解を使用する。また, 公式の打ち切り誤差や安定性, 丸め誤差などに関する特性を評価するための尺度 (判定基準) を導入する。ついで, これらの尺度に照らして公式が打ち切り誤差, 安定性, 丸め誤差などについて好ましい特性をもつように, 次数条件式群の解の自由パラメータを特殊化して公式を得た。その結果, これまでに知られている公式よりも特性が著しく優れている公式が得られたので報告する。

以下 2 章において 9 段数 7 次陽的 Runge-Kutta 法について述べ, 3 章において同法の打ち切り誤差とその大小の判定法について説明する。また 4 章において同法の安定性とその優劣の判定法, および丸め誤差特性の粗い判定基準について述べる。5 章において, 解系のもつ自由度を活用し, 他の評価の観点にも注意しながら打ち切り誤差の観点から 9 段数 7 次法の最適化を試みる。また, 絶対安定領域の有効面積がほぼ最大で, しかも打ち切り誤差についても好ましい特性をもつ公式を提案する。6 章において, 公式誘導の考え方や導出の過程に誤りが無いことを立証するために数値例が示され, 新規に導出された公式と既知公式の特性が比較される。7 章において, この研究のまとめと関連研究および残された課題が述べられる。

2. 9 段数 7 次陽的 Runge-Kutta 法

常微分方程式の初期値問題を,

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (2.1)$$

とする。ここで y, y' および f はそれぞれ m 次元関数ベクトル, y_0 は m 次元ベクトルである。また f は十分滑らかとしよう。

そのとき, $x = x_n$ における解 y_n が与えられたとき $x = x_{n+1}$ における近似解 y_{n+1} を求める次の方法を, 9 段数陽的 Runge-Kutta 法という。

$$k_1 = h_n f(x_n, y_n)$$

$$k_i = h_n f\left(x_n + c_i h_n, y_n + \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} k_j\right) \quad (i=2, 3, \dots, 9)$$

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^9 a_i k_i \quad (2.2)$$

ここで a_i, b_{ij}, c_i は公式を特徴づける係数で, $h_n =$

† On the Optimization of Some Nine-Stage Seventh-Order Runge-Kutta Method by MASATSUGU TANAKA (College of Engineering, Nihon University), SHIGERU MURAMATSU (Fuji Xerox Ltd.) and SHIGERU YAMASHITA (Department of Electrical Engineering and Computer Science, Faculty of Engineering, Yamanashi University).

†† 日本大学工学部

††† 富士ゼロックス(株)

†††† 山梨大学工学部電子情報工学科

$x_{n+1}-x_n$ である。

(2.1)の理論解を $y(x)$ とすると, $y(x_n+h_n)$ の $x=x_n$ におけるテイラー展開が, $y_n=y(x_n)$ のときの (2.2) の y_{n+1} の右辺の $x=x_n$ におけるテイラー展開と, 与えられた微分方程式に関係なく h_n^7 の項まで正確に一致するとき, 公式(2.2)は 7 次法であるといわれる。ここでは公式(2.2)が 7 次法になるように係数パラメータ a_i, b_{ij}, c_i が選ばれた場合, すなわち 9 段数 7 次陽的 Runge-Kutta 法について考察する。

9 段数 7 次法には 2 つの既知公式が知られているが, それについては 5 章, 6 章および付録に譲る。9 段数 7 次法の表示は, 簡単のために慣用的に用いられる次の係数マトリックスによることにしよう。

c_2	b_{21}
c_3	$b_{31} \ b_{32}$
\vdots	$\dots\dots\dots$
c_9	$b_{91} \ b_{92} \dots\dots\dots b_{98}$
	$a_1 \ a_2 \dots\dots\dots a_8 \ a_9$

このタイプの公式には, Shanks による公式²¹⁾ (以下単に Shanks として引用する) および, Cooper と Verner の方法を用いて Butcher が導いた公式²²⁾ (以下単に C & V 7 として引用する) が知られている。これらの既知公式と, われわれが導いた公式と比較するために用いられた Cooper と Verner による 11 段数 8 次法²³⁾ (以下単に C & V 8 として引用する) が, 付録に掲げられる。

3. 打ち切り誤差とその大小の判定

文献 4) に示すように, われわれは 9 段数 7 次陽的 Runge-Kutta 法の次数条件式の, c_4, c_5, c_7 および c_8 を自由パラメータとする 1 つの解系を得ている。この解系に含まれる公式に対して, その $x=x_{n+1}$ における数値解 y_{n+1} の局所打ち切り誤差 T_{n+1} は, 一般に次のように表すことができる。

$$T_{n+1} = h_n^{115} \sum_{i=1}^{115} a_{7i} g_i(x_n, y_n) + O(h_n^{116}) \quad (3.1)$$

ここで a_{7i} は公式の係数のみの関数, $g_i(x, y)$ は微分方程式(2.1)の右辺の関数系 f に依存して定まる関数ベクトルで, この両者は根付き木 (rooted tree) の使用により導くことができる²⁴⁾。

h_n が十分小さければ, T_{n+1} は(3.1)の第 1 項, すなわち打ち切り誤差の主項によって近似することができる。よって

$$T_{n+1} \approx \sum_{i=1}^{115} a_{7i} g_i(x_n, y_n) \quad (3.2)$$

ここで a_{7i} は以下のように定義される。ただし $i \leq j$ ならば $b_{ij} = 0$ とする。また $c_1 = 0$ であることに注意しよう。

- $a_{71} = \sum_{i,j,k,l,m,n,o} a_i b_{ij} b_{jk} b_{kl} b_{lm} b_{mn} b_{no} c_o - 1/40320$
- $a_{72} = \sum_{i,j,k,l,m,n,o} a_i b_{ij} b_{jk} b_{kl} b_{lm} b_{mn} c_n^2 / 2 - 1/40320$
- $a_{73} = \sum_{i,j,k,l,m,n} a_i b_{ij} b_{jk} b_{kl} b_{lm} b_{mn} c_n c_m - 1/13440$
- $a_{74} = \sum_{i,j,k,l,m} a_i b_{ij} b_{jk} b_{kl} b_{lm} c_m^3 / 8 - 1/40320$
- $a_{75} = \sum_{i,j,k,l,m,n} a_i b_{ij} b_{jk} b_{kl} b_{lm} b_{mn} c_n c_l - 1/10080$
- $a_{76} = \sum_{i,j,k,l,m} a_i b_{ij} b_{jk} b_{kl} b_{lm} c_m^2 c_l / 2 - 1/10080$
- $a_{77} = \sum_{i,j,k,l,m,n} a_i b_{ij} b_{jk} b_{kl} b_{lm} c_m b_{ln} c_n / 2 - 1/13440$
- $a_{78} = \sum_{i,j,k,l,m} a_i b_{ij} b_{jk} b_{kl} b_{lm} c_m c_l^2 / 2 - 1/6720$
- $a_{79} = \sum_{i,j,k,l} a_i b_{ij} b_{jk} b_{kl} c_l^4 / 24 - 1/40320$
- $a_{710} = \sum_{i,j,k,l,m,n} a_i b_{ij} b_{jk} b_{kl} b_{lm} b_{mn} c_n c_k - 1/8064$
- $a_{711} = \sum_{i,j,k,l,m} a_i b_{ij} b_{jk} b_{kl} b_{lm} c_m^2 c_k / 2 - 1/8064$
- $a_{712} = \sum_{i,j,k,l,m} a_i b_{ij} b_{jk} b_{kl} b_{lm} c_m c_l c_k - 1/2688$
- $a_{713} = \sum_{i,j,k,l} a_i b_{ij} b_{jk} b_{kl} c_l^3 c_k / 6 - 1/8064$
- $a_{714} = \sum_{i,j,k,l,m,n} a_i b_{ij} b_{jk} b_{kl} b_{lm} c_m b_{ln} c_n - 1/4032$
- $a_{715} = \sum_{i,j,k,l,m} a_i b_{ij} b_{jk} b_{kl} c_l^2 b_{km} c_m / 2 - 1/4032$
- $a_{716} = \sum_{i,j,k,l,m} a_i b_{ij} b_{jk} b_{kl} b_{lm} c_m c_l^2 / 2 - 1/4032$
- $a_{717} = \sum_{i,j,k,l} a_i b_{ij} b_{jk} b_{kl} c_l^2 c_k^2 / 4 - 1/4032$
- $a_{718} = \sum_{i,j,k,l,m} a_i b_{ij} b_{jk} b_{kl} c_l b_{km} c_m c_k / 2 - 1/2688$
- $a_{719} = \sum_{i,j,k,l} a_i b_{ij} b_{jk} b_{kl} c_l c_k^3 / 6 - 1/4032$
- $a_{720} = \sum_{i,j,k} a_i b_{ij} b_{jk} c_k^5 / 120 - 1/40320$
- $a_{721} = \sum_{i,j,k,l,m,n} a_i b_{ij} b_{jk} b_{kl} b_{lm} b_{mn} c_n c_j - 1/6720$
- $a_{722} = \sum_{i,j,k,l,m} a_i b_{ij} b_{jk} b_{kl} b_{lm} c_m^2 c_j / 2 - 1/6720$
- $a_{723} = \sum_{i,j,k,l,m} a_i b_{ij} b_{jk} b_{kl} b_{lm} c_m c_l c_j - 1/2240$
- $a_{724} = \sum_{i,j,k,l} a_i b_{ij} b_{jk} b_{kl} c_l^2 c_j / 6 - 1/6720$
- $a_{725} = \sum_{i,j,k,l,m} a_i b_{ij} b_{jk} b_{kl} b_{lm} c_m c_k c_j - 1/1680$
- $a_{726} = \sum_{i,j,k,l} a_i b_{ij} b_{jk} b_{kl} c_l^2 c_k c_j / 2 - 1/1680$
- $a_{727} = \sum_{i,j,k,l,m} a_i b_{ij} b_{jk} b_{kl} c_l b_{km} c_m c_j / 2 - 1/2240$

$$\begin{aligned}
 a_{728} &= \sum_{i,j,k,l} a_i b_j b_j b_k b_k c_i^2 c_j^2 / 2 - 1/1120 \\
 a_{729} &= \sum_{i,j,k} a_i b_j b_j b_k c_i^2 c_j / 2 - 1/6720 \\
 a_{730} &= \sum_{i,j,k,l,m,n} a_i b_j b_j b_k b_l b_l c_m b_j c_n - 1/2688 \\
 a_{731} &= \sum_{i,j,k,l,m} a_i b_j b_j b_k b_l c_i^2 b_j c_m / 2 - 1/2688 \\
 a_{732} &= \sum_{i,j,k,l,m} a_i b_j b_j b_k b_l c_i c_k b_j c_m - 1/896 \\
 a_{733} &= \sum_{i,j,k,l} a_i b_j b_j b_k c_i^2 b_j c_l / 6 - 1/2688 \\
 a_{734} &= \sum_{i,j,k,l} a_i b_j b_j b_k b_l c_i b_j b_m c_n / 2 - 1/4032 \\
 a_{735} &= \sum_{i,j,k,l,m} a_i b_j b_j b_k b_l c_i b_j c_m^2 / 2 - 1/2016 \\
 a_{736} &= \sum_{i,j,k,l} a_i b_j b_j b_k c_i^2 b_j c_l^2 / 8 - 1/4032 \\
 a_{737} &= \sum_{i,j,k,l,m} a_i b_j b_j b_k b_l b_m c_m^2 / 2 - 1/2688 \\
 a_{738} &= \sum_{i,j,k,l} a_i b_j b_j b_k b_l c_i^2 c_j^2 / 4 - 1/2688 \\
 a_{739} &= \sum_{i,j,k,l} a_i b_j b_j b_k b_l c_i c_k c_j^2 / 2 - 1/896 \\
 a_{740} &= \sum_{i,j,k} a_i b_j b_j b_k c_i^2 c_j^2 / 12 - 1/2688 \\
 a_{741} &= \sum_{i,j,k,l,m} a_i b_j b_j b_k b_l c_i b_j c_m c_j - 1/672 \\
 a_{742} &= \sum_{i,j,k,l} a_i b_j b_j b_k c_i^2 b_j c_l c_j / 2 - 1/672 \\
 a_{743} &= \sum_{i,j,k,l,m} a_i b_j b_j b_k b_l c_i c_k b_j c_m / 6 - 1/2688 \\
 a_{744} &= \sum_{i,j,k,l} a_i b_j b_j b_k b_l c_i c_j^3 / 6 - 1/2016 \\
 a_{745} &= \sum_{i,j,k} a_i b_j b_j b_k c_i^2 c_j^3 / 12 - 1/2016 \\
 a_{746} &= \sum_{i,j,k,l} a_i b_j b_j b_k b_l c_i c_j^2 c_l / 4 - 1/896 \\
 a_{747} &= \sum_{i,j,k} a_i b_j b_j b_k c_i c_j^4 / 24 - 1/2688 \\
 a_{748} &= \sum_{i,j} a_i b_j c_j^6 / 720 - 1/40320 \\
 a_{749} &= \sum_{i,j,k,l,m,n} a_i b_j b_j b_k b_l b_m b_m c_n c_i - 1/5760 \\
 a_{750} &= \sum_{i,j,k,l,m} a_i b_j b_j b_k b_l b_m c_m^2 c_i / 2 - 1/5760 \\
 a_{751} &= \sum_{i,j,k,l,m} a_i b_j b_j b_k b_l b_m c_m c_i c_i - 1/1920 \\
 a_{752} &= \sum_{i,j,k,l} a_i b_j b_j b_k b_l c_i^3 c_j / 6 - 1/5760 \\
 a_{753} &= \sum_{i,j,k,l,m} a_i b_j b_j b_k b_l b_m c_m c_k c_i - 1/1440 \\
 a_{754} &= \sum_{i,j,k,l} a_i b_j b_j b_k b_l c_i^2 c_k c_j / 2 - 1/1440 \\
 a_{755} &= \sum_{i,j,k,l,m} a_i b_j b_j b_k b_l c_i b_k c_m c_i / 2 - 1/1920 \\
 a_{756} &= \sum_{i,j,k,l} a_i b_j b_j b_k b_l c_i c_k^2 c_j / 2 - 1/960 \\
 a_{757} &= \sum_{i,j,k} a_i b_j b_j b_k c_i^4 c_j / 24 - 1/5760 \\
 a_{758} &= \sum_{i,j,k,l,m} a_i b_j b_j b_k b_l b_m c_m c_j c_i - 1/1152 \\
 a_{759} &= \sum_{i,j,k,l} a_i b_j b_j b_k b_l c_i^2 c_j c_i / 2 - 1/1152 \\
 a_{760} &= \sum_{i,j,k,l} a_i b_j b_j b_k b_l c_i c_k c_j c_i - 1/384 \\
 a_{761} &= \sum_{i,j,k} a_i b_j b_j b_k c_k^3 c_j c_i / 6 - 1/1152 \\
 a_{762} &= \sum_{i,j,k,l,m} a_i b_j b_j b_k b_l c_i b_j c_m c_i - 1/576 \\
 a_{763} &= \sum_{i,j,k,l} a_i b_j b_j b_k c_i^2 b_j c_l c_i / 2 - 1/576 \\
 a_{764} &= \sum_{i,j,k,l} a_i b_j b_j b_k b_l c_i c_j^2 c_i / 2 - 1/576 \\
 a_{765} &= \sum_{i,j,k} a_i b_j b_j b_k c_k^2 c_j c_i / 4 - 1/576 \\
 a_{766} &= \sum_{i,j,k,l} a_i b_j b_j b_k b_l c_i c_j c_l c_i / 2 - 1/384 \\
 a_{767} &= \sum_{i,j,k} a_i b_j b_j b_k c_k^3 c_j c_i / 6 - 1/576 \\
 a_{768} &= \sum_{i,j} a_i b_j c_j^5 c_i / 120 - 1/5760 \\
 a_{769} &= \sum_{i,j,k,l,m,n} a_i b_j b_j b_k b_l b_m c_m b_l c_n - 1/1920 \\
 a_{770} &= \sum_{i,j,k,l,m} a_i b_j b_j b_k b_l c_i^2 b_l c_m / 2 - 1/1920 \\
 a_{771} &= \sum_{i,j,k,l,m} a_i b_j b_j b_k b_l c_i c_k b_l c_m - 1/640 \\
 a_{772} &= \sum_{i,j,k,l} a_i b_j b_j b_k c_i^2 b_l c_l c_i / 6 - 1/1920 \quad (3.3) \\
 a_{773} &= \sum_{i,j,k,l,m} a_i b_j b_j b_k b_l c_i c_j b_l c_m - 1/480 \\
 a_{774} &= \sum_{i,j,k,l} a_i b_j b_j b_k c_i^2 c_j b_l c_l / 2 - 1/480 \\
 a_{775} &= \sum_{i,j,k,l,m} a_i b_j b_j b_k b_l c_i c_j b_l c_m / 2 - 1/640 \\
 a_{776} &= \sum_{i,j,k,l} a_i b_j b_j b_k c_k^2 b_l c_l / 2 - 1/320 \\
 a_{777} &= \sum_{i,j,k} a_i b_j c_j^4 b_l c_k / 24 - 1/1920 \\
 a_{778} &= \sum_{i,j,k,l,m,n} a_i b_j b_j b_k b_l c_i b_m b_m c_n - 1/1152 \\
 a_{779} &= \sum_{i,j,k,l,m} a_i b_j b_j b_k b_l c_i b_m c_m^2 / 2 - 1/1152 \\
 a_{780} &= \sum_{i,j,k,l,m} a_i b_j b_j b_k c_i^2 b_l b_m c_m / 2 - 1/1152 \\
 a_{781} &= \sum_{i,j,k,l} a_i b_j b_j b_k c_i^2 b_l c_l^2 / 4 - 1/1152 \\
 a_{782} &= \sum_{i,j,k,l,m} a_i b_j b_j b_k c_k c_j b_l b_m c_m - 1/384 \\
 a_{783} &= \sum_{i,j,k,l} a_i b_j b_j b_k c_k b_l c_l^2 / 2 - 1/384 \\
 a_{784} &= \sum_{i,j,k,l} a_i b_j c_j^3 b_l c_k c_l / 6 - 1/1152 \\
 a_{785} &= \sum_{i,j,k} a_i b_j c_j^3 b_l c_k^2 / 12 - 1/1152 \\
 a_{786} &= \sum_{i,j,k,l,m} a_i b_j b_j b_k b_l b_m c_m^2 / 2 - 1/1920 \\
 a_{787} &= \sum_{i,j,k,l} a_i b_j b_j b_k b_l c_i^2 c_j^2 / 4 - 1/1920
 \end{aligned}$$

$$a_{788} = \sum_{i,j,k,l} a_i b_{ij} b_{jk} b_{kl} c_i c_k c_l^2 / 2 - 1/640$$

$$a_{789} = \sum_{i,j,k} a_i b_{ij} b_{jk} c_i^2 c_k^2 / 12 - 1/1920$$

$$a_{790} = \sum_{i,j,k,l} a_i b_{ij} b_{jk} b_{kl} c_i c_j c_l^2 / 2 - 1/480$$

$$a_{791} = \sum_{i,j,k} a_i b_{ij} b_{jk} c_i^2 c_k^2 / 4 - 1/480$$

$$a_{792} = \sum_{i,j,k,l} a_i b_{ij} b_{jk} b_{kl} c_i c_j c_l^2 / 4 - 1/640$$

$$a_{793} = \sum_{i,j,k} a_i b_{ij} b_{jk} c_i c_k^2 c_l^2 / 4 - 1/320$$

$$a_{794} = \sum_{i,j} a_i b_{ij} c_i^4 / 48 - 1/1920$$

$$a_{795} = \sum_{i,j,k,l,m} a_i b_{ij} b_{jk} b_{kl} c_i b_{lm} c_m c_i - 1/384$$

$$a_{796} = \sum_{i,j,k,l} a_i b_{ij} b_{jk} c_i^2 b_{lk} c_l c_i / 2 - 1/384$$

$$a_{797} = \sum_{i,j,k,l} a_i b_{ij} b_{jk} c_i c_k b_{li} c_l c_i - 1/128$$

$$a_{798} = \sum_{i,j,k} a_i b_{ij} c_i^3 b_{lk} c_k c_i / 6 - 1/384$$

$$a_{799} = \sum_{i,j,k,l,m} a_i b_{ij} b_{jk} c_k b_{li} b_{lm} c_m c_i / 2 - 1/576$$

$$a_{7100} = \sum_{i,j,k,l} a_i b_{ij} b_{jk} c_k b_{li} c_l^2 c_i / 2 - 1/288$$

$$a_{7101} = \sum_{i,j,k} a_i b_{ij} c_i^3 b_{lk} c_k^2 c_i / 8 - 1/576$$

$$a_{7102} = \sum_{i,j,k,l,m} a_i b_{ij} b_{jk} c_k b_{li} c_l b_{lm} c_m / 2 - 1/384$$

$$a_{7103} = \sum_{i,j,k,l} a_i b_{ij} c_i^3 b_{lk} c_k b_{li} c_l / 4 - 1/384$$

$$a_{7104} = \sum_{i,j,k,l} a_i b_{ij} b_{jk} b_{kl} c_i^3 / 6 - 1/1152$$

$$a_{7105} = \sum_{i,j,k} a_i b_{ij} b_{jk} c_i^2 c_k^2 / 12 - 1/1152$$

$$a_{7106} = \sum_{i,j,k} a_i b_{ij} b_{jk} c_k c_l c_i^3 / 6 - 1/384$$

$$a_{7107} = \sum_{i,j} a_i b_{ij} c_i^3 c_j^3 / 36 - 1/1152$$

$$a_{7108} = \sum_{i,j,k,l} a_i b_{ij} b_{jk} c_k b_{li} c_l^2 / 2 - 1/192$$

$$a_{7109} = \sum_{i,j,k} a_i b_{ij} c_i^3 b_{lk} c_k^2 / 4 - 1/192$$

$$a_{7110} = \sum_{i,j,k,l} a_i b_{ij} c_j b_{lk} c_k b_{li} c_l c_i / 6 - 1/384$$

$$a_{7111} = \sum_{i,j,k} a_i b_{ij} b_{jk} c_k^4 / 24 - 1/1152$$

$$a_{7112} = \sum_{i,j} a_i b_{ij} c_i^4 c_j^4 / 48 - 1/1152$$

$$a_{7113} = \sum_{i,j,k} a_i b_{ij} c_j b_{lk} c_k^3 / 12 - 1/384$$

$$a_{7114} = \sum_{i,j} a_i b_{ij} c_i^5 c_j^5 / 120 - 1/1920$$

$$a_{7115} = \sum_i a_i c_i^7 / 5040 - 1/40320$$

われわれは、与えられた微分方程式に独立な、局所打ち切り誤差の大小を判定するための尺度として、次式によって定義される数量 A_{72} および A_{73} を使用する。

$$A_{72} = \sum_{i=1}^{115} |a_{7i}| \quad (3.4)$$

$$A_{73} = \sum_{i=1}^{115} a_{7i}^2 \quad (3.5)$$

[定義 1]

A_{72} および A_{73} を、9 段数 7 次陽的 Runge-Kutta 法 (2.2) の打ち切り精度判定基準という。

上記のタイプの打ち切り精度判定基準が有効であることを示す実例は、数多く存在する (たとえば文献 5), 6) その他田中による一連の研究など)。

4. 安定性とその優劣の判定および丸め誤差特性の評価

9 段数 7 次法 (2.2) を、テスト方程式

$$y' = \lambda y \quad (\text{ここで } \lambda \text{ は } \operatorname{Re}(\lambda) < 0 \text{ であるような複素定数である}) \quad (4.1)$$

に適用し、次数条件式を用いて整理すると、

$$y_{n+1} = P_{97}(h_n \lambda, \gamma_8, \gamma_9) y_n \quad (4.2)$$

が得られる。ただし、 $P_{97}(h_n \lambda, \gamma_8, \gamma_9)$ は次式によって定義される $h_n \lambda$ の多項式である。

$$\begin{aligned} P_{97}(h_n \lambda, \gamma_8, \gamma_9) = & 1 + h_n \lambda + \frac{(h_n \lambda)^2}{2!} + \frac{(h_n \lambda)^3}{3!} + \frac{(h_n \lambda)^4}{4!} \\ & + \frac{(h_n \lambda)^5}{5!} + \frac{(h_n \lambda)^6}{6!} + \frac{(h_n \lambda)^7}{7!} \\ & + \gamma_8 \cdot \frac{(h_n \lambda)^8}{8!} + \gamma_9 \cdot \frac{(h_n \lambda)^9}{9!} \end{aligned} \quad (4.3)$$

ここで γ_8, γ_9 は次のような 9 段数 7 次法の係数のみの関数であり、この両者によって安定性が支配される。

$$\begin{aligned} \gamma_8 = & (b_{21} b_{32} b_{43} b_{54} b_{65} b_{76} b_{87} a_8 + b_{21} b_{32} b_{43} b_{54} b_{65} b_{76} b_{87} a_9 \\ & + b_{21} b_{32} b_{43} b_{54} b_{65} b_{86} b_{98} a_9 + b_{21} b_{32} b_{43} b_{54} b_{75} b_{87} b_{98} a_9 \\ & + b_{21} b_{32} b_{43} b_{64} b_{76} b_{87} b_{98} a_9 + b_{21} b_{32} b_{53} b_{65} b_{76} b_{87} b_{98} a_9 \\ & + b_{21} b_{42} b_{54} b_{65} b_{76} b_{87} b_{98} a_9 + b_{31} b_{43} b_{54} b_{65} b_{76} b_{87} b_{98} a_9 \\ & + b_{32} b_{43} b_{54} b_{65} b_{76} b_{87} b_{98} a_9) \cdot 8! \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\gamma_9 = b_{21} b_{32} b_{43} b_{54} b_{65} b_{76} b_{87} b_{98} a_9 \cdot 9! \quad (4.5)$$

[定義 2]

(4.3) によって定義される $h_n \lambda$ の多項式 $P_{97}(h_n \lambda, \gamma_8, \gamma_9)$ を、9 段数 7 次陽的 Runge-Kutta 法 (2.2) の安定多項式という。

[定義 3]

$|P_{97}(h_n \lambda, \gamma_8, \gamma_9)| < 1$ であるとき、9 段数 7 次陽的 Runge-Kutta 法 (2.2) は、その $h_n \lambda$ に対して絶対安定であるといわれる。

[定義 4]

次式によって定義される領域 S の内点の集合を、9 段数 7 次陽的 Runge-Kutta 法 (2.2) の絶対安定領域と

いう。

$$S = \{h_n \lambda \mid |P_{97}(h_n \lambda, \gamma_8, \gamma_9)| \leq 1, h_n \lambda \in \mathbb{C}\} \quad (4.6)$$

また、 S の原点を含む単連結な閉領域の内点の集合から、 $Re(h_n \lambda) \geq 0$ を満足する $h_n \lambda$ を除いた集合を、有効絶対安定領域とよび S_e で表すことにする。

有効絶対安定領域は、絶対安定領域の中で数値解の安定性にとって有効な領域である。

[定義5]

有効絶対安定領域 S_e と実軸 R との交わり S_l , すなわち

$$S_l = S_e \cap R = (-\alpha, 0.0) \quad (4.7)$$

を、9段数7次陽的 Runge-Kutta 法(2.2)の絶対安定区間という。ここで、正数値 α は絶対安定区間の長さを表す。

いま $x = x_n$ において実際に得られる数値解(丸め誤差を含む)を \tilde{y}_n としよう。そのとき

$$\tilde{y}_{n+1} = P_{97}(h_n \lambda, \gamma_8, \gamma_9) \tilde{y}_n + r_{n+1} \quad (4.8)$$

と表すことができる。ここで r_{n+1} は、(4.8)の右辺の第一項の計算の際に発生する丸め誤差である。次に(4.2)の y_n および y_{n+1} に、それぞれ $y(x_n)$ および $y(x_{n+1})$ を代入すると、

$$y(x_{n+1}) = P_{97}(h_n \lambda, \gamma_8, \gamma_9) y(x_n) - T_{n+1} \quad (4.9)$$

が得られる。ここで T_{n+1} は、 $f = \lambda y$ としたときの局所打ち切り誤差である。いま(4.8)から(4.9)を辺々引き算し、

$$e_n = \tilde{y}_n - y(x_n) \quad (4.10)$$

$$E_{n+1} = r_{n+1} + T_{n+1} \quad (4.11)$$

とおけば、

$$e_{n+1} = P_{97}(h_n \lambda, \gamma_8, \gamma_9) e_n + E_{n+1} \quad (4.12)$$

が得られる。勿論 E_{n+1} は、第 $(n+1)$ ステップにおける局所誤差である。

(4.12)から[定義3]の絶対安定の意味がはっきりしてくる。テスト方程式(4.1)を9段数7次法(2.2)を用いて積分するとき、安定多項式 $P_{97}(h_n \lambda, \gamma_8, \gamma_9)$ は、集積誤差 e_n の次のステップへの伝播率になっている。公式(2.2)がある $h_n \lambda$ に対して絶対安定であるとは、そのような刻み幅 h_n で積分するとき、集積誤差 e_n は絶対値が縮小されて次のステップに伝播

されることを意味する。

この研究においてわれわれは、安定性の優劣を比較するために次のような尺度を使用する。

(i) 有効絶対安定領域の面積 $A(S_e)$

$A(S_e)$ の大きいほど安定性がよいとする。

(ii) 有効絶対安定領域 S_e の包含関係

(iii) 絶対安定区間の長さ α

(iv) 安定多項式の絶対値の大小

公式AおよびBの安定多項式をそれぞれ $P_{97}(h_n \lambda, \gamma_8^A, \gamma_9^A)$ および $P_{97}(h_n \lambda, \gamma_8^B, \gamma_9^B)$ とするとき、

$$|P_{97}(h_n \lambda, \gamma_8^A, \gamma_9^A)| < |P_{97}(h_n \lambda, \gamma_8^B, \gamma_9^B)| \quad (4.13)$$

ならば、その $h_n \lambda$ に対して公式Aは公式Bより安定性がよいとする。

打ち切り精度、安定性などを極限まで追求しようとすると、われわれはしばしば丸め誤差に起因する計算の限界に遭遇する。したがって、打ち切り誤差や安定性について最適化を試みる際には、丸め誤差に関する性質の劣化に注意を払わなければならない。このような目的のために、われわれは次式で定義される数量 R を使用する。

$$R = \sum_{i=1}^9 |a_i| + \sum_{i=2}^9 \sum_{j=1}^{i-1} |b_{ij}| \quad (4.14)$$

[定義6]

(4.14)で定義される R を、9段数7次陽的 Runge-Kutta 法(2.2)の丸め誤差特性判定基準という。

一般に R は小さいほど好ましいのは勿論であるが、常微分方程式の数値解は倍精度で求めることが多いので、 R が著しく大きくない限りその大小に余り神経質

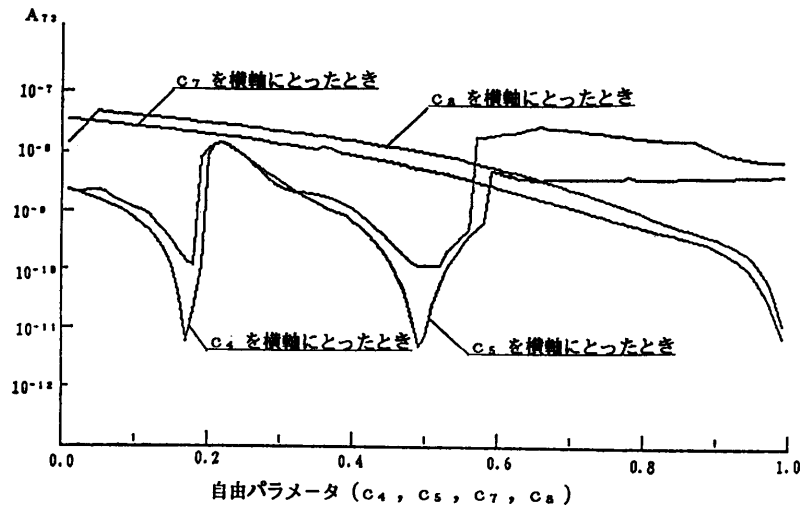


図1 打ち切り誤差に関する特性図
Fig. 1 The characteristic of truncation error.

表 1 各公式の特性値
Table 1 The characteristic values of each formula.

	A_{73}	A_{73}	$A(S_e)$	α	R
Shanks	$0.1493454e-2$	$0.1678949e-6$	25.60985	4.4731	$0.6976e+2$
C & V 7	$0.4664776e-2$	$0.7481319e-6$	10.91974	2.6662	$0.2183e+2$
Mesh 97	$0.1199154e-3$	$0.3516996e-9$	32.91478	4.6143	$0.1836e+3$
Nolls 97	$0.2517475e-4$	$0.9862175e-11$	36.43435	4.9125	$0.3161e+4$
Area 97	$0.6716192e-3$	$0.1331981e-7$	51.52572	7.1767	$0.3248e+2$

になる必要はないだろう。

5. 9 段数 7 次法の最適化

5.1 打ち切り精度ほぼ最良の公式

打ち切り誤差に関する特性を調査するため、文献4)に示す解系の4つの自由パラメータのうち1つを固定し、残った3つのパラメータを変動させ、打ち切り精度判定基準 A_{73} の値を最小にする。図1は、横軸に固定する自由パラメータの値(4種類)、縦軸にその固定された自由パラメータの各値に対する打ち切り精度判定基準 A_{73} の最小値の常用対数をとって、その挙動をグラフに表したものである(各自由パラメータの変域および刻み幅を[0.0, 1.0]および0.0001とし、 A_{73} の最小化にはメッシュ法が用いられた)。この図の観察から、 $c_4=0.15$, $c_5=0.5$, c_7 , $c_8=1$ の付近で A_{73} の値が最小になっていることがわかる。また、このとき A_{73} の値は 10^{-10} 以下に落ちており、打ち切り誤差に関して最適化することによって、既知公式の精度を上回る精度が得られることは勿論、8次の精度が達成可能であることも推測される。

いま、すべての自由パラメータを0.0~1.0間で微小間隔で変動させ、打ち切り精度判定基準 A_{73} を最小にすることを考える(この方法をMesh法とよぶことにしよう)。Mesh法によって得られた公式Mesh 97の係数を以下に示す。Mesh 97の自由パラメータの値は、 $c_4=0.1607$, $c_5=0.4455$, $c_7=0.8645$, $c_8=0.9117$ である。この公式の各特性値は、既知公式やわれわれによって導かれた他の公式のそれらと共に表1に示される。表1の打ち切り精度判定基準の観察から、Mesh 97は既知公式のShanksやC&V7に比べて、打ち切り誤差に関して十分最適化がなされていることがわかる。

ついでわれわれは、Mesh法によって得られた公式“Mesh 97”の自由パラメータの値を出発点として、非

線形最小自乗法の数学ソフトウェア Nolls⁷⁾を用い、打ち切り誤差の観点から一層の最適化を図る。このようにして得られた公式 Nolls 97 を以下に示す。Nolls 97 の自由パラメータの値は、 $c_4=0.175874\dots$, $c_5=0.498740\dots$, $c_7=0.991185\dots$, $c_8=0.999501\dots$ とされており、図1の特性図の結果と符号している。

【Mesh 97】(4倍精度で計算して有効桁20桁をとったもの)

$$\begin{aligned}
 c_2 &= 0.71422222222222222222d - 01 \\
 c_3 &= 0.10713333333333333333d + 00 \\
 c_4 &= 0.16070000000000000000d + 00 \\
 c_5 &= 0.44550000000000000000d + 00 \\
 c_6 &= 0.57347877844021887331d + 00 \\
 c_7 &= 0.86450000000000000000d + 00 \\
 c_8 &= 0.91170000000000000000d + 00 \\
 c_9 &= 0.10000000000000000000d + 01 \\
 a_1 &= 0.46166859124963461157d - 01 \\
 a_2 &= 0.00000000000000000000d + 00 \\
 a_3 &= 0.00000000000000000000d + 00 \\
 a_4 &= 0.25446926240096597476d + 00 \\
 a_5 &= 0.23160153027034919145d + 00 \\
 a_6 &= 0.16728312084340236191d + 00 \\
 a_7 &= 0.42131321090920440436d + 00 \\
 a_8 &= -.18803738074360686617d + 00 \\
 a_9 &= 0.67203397194721472537d - 01 \\
 b_{21} &= 0.71422222222222222222d - 01 \\
 b_{31} &= 0.26783333333333333333d - 01 \\
 b_{32} &= 0.80350000000000000000d - 01 \\
 b_{41} &= 0.40175000000000000000d - 01 \\
 b_{42} &= 0.00000000000000000000d + 00 \\
 b_{43} &= 0.12052500000000000000d + 00 \\
 b_{51} &= 0.61361703614476026438d + 00 \\
 b_{52} &= 0.00000000000000000000d + 00 \\
 b_{53} &= -.23569047798717419008d + 01
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{54} &= 0.21887877437269816364d + 01 \\
b_{61} &= -.15947919471772952705d + 01 \\
b_{62} &= 0.000000000000000000d + 00 \\
b_{63} &= 0.65332218361073787534d + 01 \\
b_{64} &= -.49476785171192895484d + 01 \\
b_{65} &= 0.58272740662942493886d + 00 \\
b_{71} &= 0.31826865123465047020d + 01 \\
b_{72} &= 0.000000000000000000d + 00 \\
b_{73} &= -.13316381817098599759d + 02 \\
b_{74} &= 0.11429110202962390538d + 02 \\
b_{75} &= -.16469217740259453345d + 01 \\
b_{76} &= 0.12160068758156498531d + 01 \\
b_{81} &= 0.79693031482537380314d + 01 \\
b_{82} &= 0.000000000000000000d + 00 \\
b_{83} &= -.34389946069279829035d + 02 \\
b_{84} &= 0.29543895049125504665d + 02 \\
b_{85} &= -.52319353106257860673d + 01 \\
b_{86} &= 0.31890801958529017220d + 01 \\
b_{87} &= -.16869701332652931652d + 00 \\
b_{91} &= 0.47353216616399246938d + 01 \\
b_{92} &= 0.000000000000000000d + 00 \\
b_{93} &= -.21337205463127031229d + 02 \\
b_{94} &= 0.18963834301206884983d + 02 \\
b_{95} &= -.38537772308673409018d + 01 \\
b_{96} &= 0.23614331022666242398d + 01 \\
b_{97} &= 0.37746001856881894776d + 00 \\
b_{98} &= -.24706638968788073419d + 00
\end{aligned}$$

【Nolls 97】(4倍精度で計算して有効桁20桁をとったもの)

$$\begin{aligned}
c_2 &= 0.78166465105555555556d - 01 \\
c_3 &= 0.11724969765833333333d + 00 \\
c_4 &= 0.17587454648750000000d + 00 \\
c_5 &= 0.49874011019850000000d + 00 \\
c_6 &= 0.77212169008853851458d + 00 \\
c_7 &= 0.99118566901896000000d + 00 \\
c_8 &= 0.99950195827682000000d + 00 \\
c_9 &= 0.100000000000000000d + 01 \\
a_1 &= 0.51260142501324166934d - 01 \\
a_2 &= 0.000000000000000000d + 00 \\
a_3 &= 0.000000000000000000d + 00 \\
a_4 &= 0.27521638457225584784d + 00 \\
a_5 &= 0.33696650338197282587d + 00 \\
a_6 &= 0.18986072226268125901d + 00 \\
a_7 &= 0.84610982530609745495d + 01
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_8 &= -.13015942351679011923d + 03 \\
a_9 &= 0.12184502151101091058d + 03 \\
b_{21} &= 0.78166465105555555556d - 01 \\
b_{31} &= 0.29312424414583333333d - 01 \\
b_{32} &= 0.87937273243750000000d - 01 \\
b_{41} &= 0.43968636621875000000d - 01 \\
b_{42} &= 0.000000000000000000d + 00 \\
b_{43} &= 0.13190590986562500000d + 00 \\
b_{51} &= 0.73618348368951701066d + 00 \\
b_{52} &= 0.000000000000000000d + 00 \\
b_{53} &= -.28337999620895936428d + 01 \\
b_{54} &= 0.25963565885985766322d + 01 \\
b_{61} &= -.12062819383206433867d + 02 \\
b_{62} &= 0.000000000000000000d + 00 \\
b_{63} &= 0.48208380969581863884d + 02 \\
b_{64} &= -.38058630439276117840d + 02 \\
b_{65} &= 0.26851905429892263371d + 01 \\
b_{71} &= 0.10521957191441549257d + 03 \\
b_{72} &= 0.000000000000000000d + 00 \\
b_{73} &= -.41792888289184693851d + 03 \\
b_{74} &= 0.33231554777416396863d + 03 \\
b_{75} &= -.19827591022983800454d + 02 \\
b_{76} &= 0.12125398952702377699d + 01 \\
b_{81} &= 0.11467755704762585743d + 03 \\
b_{82} &= 0.000000000000000000d + 00 \\
b_{83} &= -.45556121644503529877d + 03 \\
b_{84} &= 0.36224095511111329723d + 03 \\
b_{85} &= -.21671904400175272020d + 02 \\
b_{86} &= 0.13189132017914745150d + 01 \\
b_{87} &= -.48025570432383756836d - 02 \\
b_{91} &= 0.11521334849065519043d + 03 \\
b_{92} &= 0.000000000000000000d + 00 \\
b_{93} &= -.45769356483840412265d + 03 \\
b_{94} &= 0.36393688151944545632d + 03 \\
b_{95} &= -.21776682042397576180d + 02 \\
b_{96} &= 0.13250670890163702596d + 01 \\
b_{97} &= -.45181914604453402742d - 02 \\
b_{98} &= -.53202685487284736142d - 03
\end{aligned}$$

5.2 有効絶対安定領域の面積ほぼ最大の公式

図2は、安定性を支配するパラメータ γ_8, γ_9 が、 $A(S_e)$ (有効絶対安定領域の面積) を最大にする値の周辺で変動したときの $A(S_e)$ の等高線図を示す⁹⁾。この図において各曲線に近接して記録された数字は、その等高線の高さを表す。後述するように、有効絶対

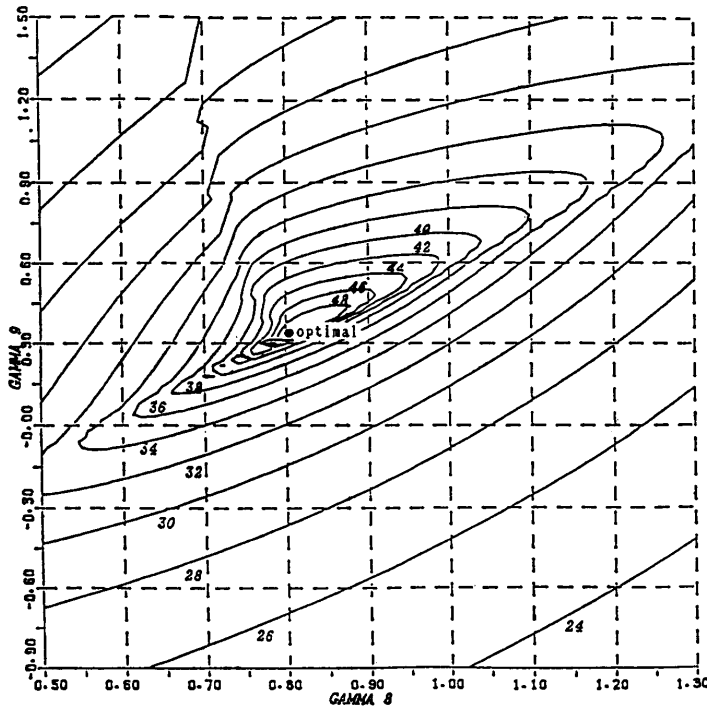


図 2 有効絶対安定領域の面積の等高線図

Fig. 2 Contour lines of the area of effective absolute stability region.

有効絶対安定領域の面積=51.52572

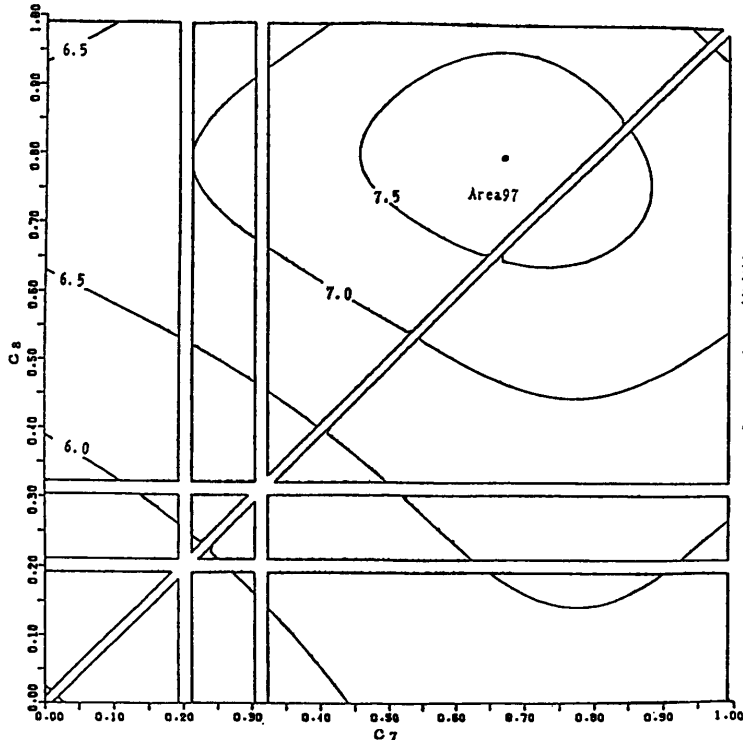


図 3 有効絶対安定領域の面積が最大の場合の「打ち切り精度判定基準の逆数の常用対数」の等高線図

Fig. 3 Contour lines of criterion of the size of truncation error.

安定領域の面積ほぼ最大の公式の導出の際には、この図が公式が誤りなく導出されたかどうかのチェックに利用される。

6 段数 5 次法や 7 段数 6 次法の最適化においては、自由パラメータの 1 つを安定性を支配するパラメータと入れ換えることにより、所望の安定特性をもち、しかもそのような安定特性をもつ公式の中では打ち切り精度ほぼ最良の公式を導くことができた。しかし、9 段数 7 次法においては、解系も安定性を支配するパラメータも共により複雑で、自由パラメータと安定性を支配するパラメータの入れ換えを、数式として実現することができなかった。

そこでわれわれの解系⁴⁾における自由パラメータと、打ち切り誤差や安定性の間の関係を調べるために、4 つの自由パラメータのうち 2 つを Shanks の公式の係数と一致させ、残りの 2 つを自由パラメータとする可能なすべての組合せについて、次のような調査を行った。すなわち、前記の各組における 2 つの自由パラメータを両軸にとり、各々を変域 0.0~1.0 で変動させ、打ち切り精度判定基準の逆数の常用対数 $\log_{10}(A_{73})^{-1}$ の等高線図を描いたり、また各自由パラメータが前記の変域で変動するとき、それに伴って有効絶対安定領域の面積 $A(S_e)$ がどのように変動するかをグラフで表した。これらの作業を通じて、“安定性は自由パラメータの c_4 と c_8 のみに関係する”という顕著な事実が発見され、以後の最適化の仕事が著しく容易になった*。

有効絶対安定領域の面積 $A(S_e)$ はほぼ最大の公式は、次のようにして導かれた。

(i) まず、自由パラメータ c_7 および c_8 を、それぞれ Shanks の公式の係数に固定した。すなわち $c_7=1/$

*これは数値に観察された事実で、未だ厳密な証明は得られていない。

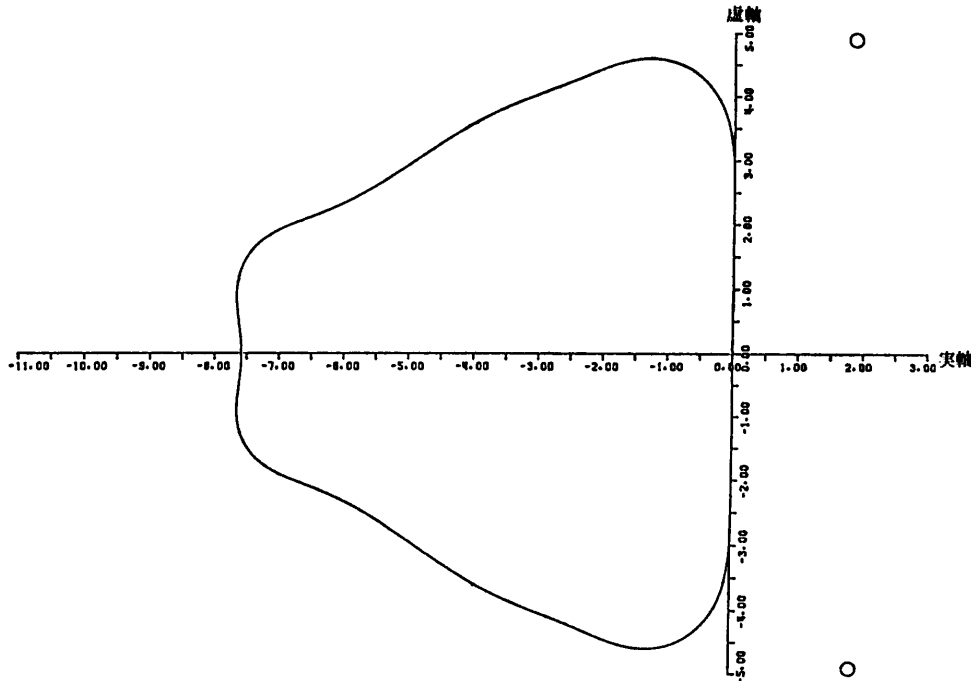


図 4 有効絶対安定領域の面積ほぼ最大の場合の絶対安定領域
 Fig. 4 The region of absolute stability in case of $\max A(S_e)$.

9, $c_8=5/6$ と置いた。

(ii) 次に、残りの自由パラメータ c_4 および c_5 を両軸にとり、共に変域を $0.0 \sim 0.1$ として有効絶対安定領域の面積 $A(S_e)$ の等高線図を描き、 $\max A(S_e)$ が得られる c_4 と c_5 の値を求め、 $c_4=0.21$, $c_5=0.32$ を得た。

(iii) 次に、2つの自由パラメータ c_4 および c_5 を $c_4=0.21$, $c_5=0.32$ に固定し、 c_7 および c_8 を両軸にとって共に変域 $0.0 \sim 1.0$ で変動させ、 $\log_{10}(A_{73})^{-1}$ の等高線図、図 3 を描いた。同図上の白い帯状部分の中心線では、公式の係数が定義されず、したがって A_{73} が定義されない。この図の観察により、 $c_7=0.67$, $c_8=0.80$ で打ち切り精度がほぼ最良になることが知られる。

以上のことから、自由パラメータが $c_4=0.21$, $c_5=0.32$, $c_7=0.67$, $c_8=0.80$ なる値をとるとき、得られる公式は有効絶対安定領域の面積ほぼ最大で、しかもそのような安定特性をもつ公式の中で打ち切り精度がほぼ最良であることがわかる。このとき安定性を支配するパラメータ γ_8 と γ_9 および有効絶対安定領域の面積 $A(S_e)$ は、それぞれ $\gamma_8=0.802089$, $\gamma_9=0.330891$ および $A(S_e)=51.52572$ となる。この公式を Area 97 とよぼう。図 2 の \cdot optimal はこの公式に対応する点で、上記のような手続きで得られた結果が誤りでないことを側面から立証している。以下に Area 97 の

係数を掲げる。またその特性値を表 1 に、絶対安定領域を図 4 に示す。

【Area 97】(4倍精度で計算して有効桁 20 桁をとったもの)

- $c_2=0.93333333333333333333333333333333d-01$
- $c_3=0.14000000000000000000000000d+00$
- $c_4=0.21000000000000000000000000d+00$
- $c_5=0.32000000000000000000000000d+00$
- $c_6=-.16274621011852692090d+00$
- $c_7=0.67000000000000000000000000d+00$
- $c_8=0.80000000000000000000000000d+00$
- $c_9=0.10000000000000000000000000d+01$
- $a_1=0.13630761380021530465d+00$
- $a_2=0.00000000000000000000000000d+00$
- $a_3=0.00000000000000000000000000d+00$
- $a_4=-.13662189208026812402d-01$
- $a_5=0.42322070309808872211d+00$
- $a_6=-.13030483363339594765d-01$
- $a_7=0.16556314127696195904d+00$
- $a_8=0.23605373046381864725d+00$
- $a_9=0.65547483932281774110d-01$
- $b_{21}=0.93333333333333333333333333333333d-01$
- $b_{31}=0.35000000000000000000000000d-01$
- $b_{32}=0.10500000000000000000000000d+00$
- $b_{41}=0.52500000000000000000000000d-01$
- $b_{42}=0.00000000000000000000000000d+00$
- $b_{43}=0.15750000000000000000000000d+00$
- $b_{51}=0.81995464852607709751d-01$

- $b_{52} = 0.000000000000000000d + 00$
- $b_{53} = -.17414965986394557823d - 01$
- $b_{54} = 0.25541950113378684807d + 00$
- $b_{61} = -.20533682309598151325d + 00$
- $b_{62} = 0.000000000000000000d + 00$
- $b_{63} = -.44393951204447165311d + 00$
- $b_{64} = 0.72995403515289554497d + 00$
- $b_{65} = -.24342391013096929951d + 00$
- $b_{71} = 0.17150292772836502655d + 01$
- $b_{72} = 0.000000000000000000d + 00$
- $b_{73} = -.43180649178050407314d + 00$
- $b_{74} = -.23377245765500305880d + 01$
- $b_{75} = 0.21884816050671330236d + 01$
- $b_{76} = -.46397981402024862795d + 00$
- $b_{81} = -.15786010592067496622d + 01$
- $b_{82} = 0.000000000000000000d + 00$
- $b_{83} = 0.49941361275996201755d + 00$
- $b_{84} = 0.25057457752088259662d + 01$
- $b_{85} = -.15314753672066863925d + 01$
- $b_{86} = 0.47114812660171573828d + 00$
- $b_{87} = 0.43376891184293233267d + 00$
- $b_{91} = 0.28732772869825370543d + 01$
- $b_{92} = 0.000000000000000000d + 00$
- $b_{93} = -.65082261058378345329d + 00$
- $b_{94} = -.47878254219540124733d + 01$
- $b_{96} = 0.43296357731979085782d + 01$
- $b_{96} = -.75593233426026815710d + 00$
- $b_{97} = -.72858529898258975965d + 00$
- $b_{98} = 0.72025260560020821080d + 00$

6. 数値例と公式の比較および考察

最適化が正しく行われたかどうかを調査するため、多数の問題について数値実験を行った。実験には既知公式 Shanks と C & V7, 打ち切り誤差の観点から最適化することによって得られた Mesh 97 と Nolls 97, および安定性に関して最適化された公式 Area 97 が用いられた。

実験は、前記の各公式を用いて刻み幅 0.1 と 0.05 で各 100 ステップ積分し、第 1 ステップおよび最終ステップの相対誤差、最大相対誤差を調査することによって行われた。使用計算機は VAX 11/785 で、計算は倍精度で実行された。

取り上げた例題単一微分方程式 10 例と連立微分方程式 7 例の数値解の精度については、単一の場合も連立の場合もほぼ同様な結果が得られていて各公式の評価を変えることがないので、ここでは表 2 に示す単一微分方程式を、刻み幅 0.5 と 0.1 で積分した結果のみを表 3 から表 12 に掲げる。

次に安定性を評価するための特性値が正しく得られているかどうか、また安定性の観点から最適化が誤り

なく遂行されているかどうかを検証するために、次の弱 stiff 問題

$$y' = 100(\sin x - y) \quad y(0) = 0 \quad (6.1)$$

(理論解 $y = (\sin x - 0.01 \cos x + 0.01e^{-100x})/1.0001$) を、各公式を用いていろいろな刻み幅で解き、その結果を表 13 に示した。表中*で示した部分は、それより小さい刻み幅で発散が確認されており、数値をあげる意味をもたないことを示す。

表 13 の観察からわれわれは、表 1 に示す安定性に関する特性値に誤りがないと推測することができる。

引用したグラフ、特性値の表、多くの数値実験結果からわれわれは次のような結論を引き出すことができる。

(1) われわれの公式の導出には誤りがなく、その意図は実現されたといえるだろう。

すなわち、

(2) 各公式の特性値を示す表 1 と、数値例とその計算結果を示す表 2 ~ 表 13 の観察から、打ち切り誤差の観点から最適化された公式 Mesh 97 は、既知公

表 2 数値実験に使用した単一系初期値問題 (下段は理論解)
Table 2 Single initial value problems used numerical experiments.

単一系微分方程式の初期値問題とその理論解		
問題 1	$y' = -y$ $y = e^{-x}$	$y(0) = 1$
問題 2	$y' = 2y/(1+x)$ $y = (x+1)^2$	$y(0) = 1$
問題 3	$y' = 2\sqrt{y-1}/x$ $y = (\log_e(x)+2)^2 + 1$	$y(1) = 5$
問題 4	$y' = 1 - y^2$ $y = \tanh(x)$	$y(0) = 0$
問題 5	$y' = -y^2 - (2x-1)y - (1-x+x^2)$ $y = -x + 1/(1+e^{-x})$	$y(0) = 0.5$
問題 6	$y' = -x^2y^2/3$ $y = 9/(x^2+1)$	$y(2) = 1$
問題 7	$y' = -y/x$ $y = 1/x$	$y(1) = 1$
問題 8	$y' = -y + \sin(2x)$ $y = (\sin(2x) - 2\cos(2x))/5$	$y(0) = -0.4$
問題 9	$y' = \sqrt{y-y/x}$ $y = (x/3 + 1/\sqrt{x})^2$	$y(1) = 16/9$
問題 10	$y' = (x+1)^{1/2} + 2y/(x+1)$ $y = 2(x+1)^{1/2}/3$	$y(0) = 2/3$

表 3 【問題 1】の数値実験における相対誤差
Table 3 Relative errors in numerical experiments of problem 1.

$$y' = -y \quad y(0) = 1 \quad (\text{理論解 } y = e^{-x})$$

h	error	Shanks	C & V 7	Mesh97	Nollis97	Area97
0.5	first-step	0.133533d-06	0.209449d-05	0.938660d-09	0.699596d-09	0.260991d-07
	last-step	0.133532d-04	0.209427d-03	0.938660d-07	0.699889d-07	0.260990d-05
	maximum	0.133532d-04	0.209427d-03	0.938660d-07	0.699889d-07	0.260990d-05
0.1	first-step	0.248741d-12	0.340555d-11	0.340489d-14	0.238649d-13	0.522389d-13
	last-step	0.248744d-10	0.340555d-09	0.341220d-12	0.234627d-11	0.522361d-11
	maximum	0.248744d-10	0.340555d-09	0.341220d-12	0.234627d-11	0.522361d-11

表 4 【問題 2】の数値実験における相対誤差
Table 4 Relative errors in numerical experiments of problem 2.

$$y' = 2y/(1+x) \quad y(0) = 1 \quad (\text{理論解 } y = (x+1)^2)$$

h	error	Shanks	C & V 7	Mesh97	Nollis97	Area97
0.5	first-step	0.910259d-05	0.256947d-04	0.145414d-06	0.110362d-06	0.192054d-06
	last-step	0.996724d-05	0.282554d-04	0.162068d-06	0.115650d-06	0.205561d-06
	maximum	0.996724d-05	0.282554d-04	0.162068d-06	0.115667d-06	0.205561d-06
0.1	first-step	0.148804d-09	0.469473d-09	0.364683d-11	0.815188d-12	0.144409d-11
	last-step	0.311262d-09	0.984863d-09	0.771094d-11	0.236395d-11	0.294780d-11
	maximum	0.311262d-09	0.984863d-09	0.771094d-11	0.236395d-11	0.294780d-11

表 5 【問題 3】の数値実験における相対誤差
Table 5 Relative errors in numerical experiments of problem 3.

$$y' = 2\sqrt{(y-1)}/x \quad y(1) = 5 \quad (\text{理論解 } y = (\log_e(x)+2)^2+1)$$

h	error	Shanks	C & V 7	Mesh97	Nollis97	Area97
0.5	first-step	0.866299d-08	0.466596d-07	0.796019d-09	0.180675d-07	0.339322d-07
	last-step	0.438070d-08	0.236312d-07	0.384692d-09	0.102816d-07	0.151691d-07
	maximum	0.866299d-08	0.466596d-07	0.796019d-09	0.198904d-07	0.339322d-07
0.1	first-step	0.155896d-12	0.554089d-12	0.380419d-13	0.556108d-14	0.507974d-12
	last-step	0.177754d-12	0.691454d-12	0.323328d-13	0.190809d-13	0.405306d-12
	maximum	0.277238d-12	0.106344d-11	0.541782d-13	0.439967d-13	0.692323d-12

表 6 【問題 4】の数値実験における相対誤差
Table 6 Relative errors in numerical experiments of problem 4.

$$y' = 1 - y^2 \quad y(0) = 0 \quad (\text{理論解 } y = \tanh(x))$$

h	error	Shanks	C & V 7	Mesh97	Nollis97	Area97
0.5	first-step	0.292156d-05	0.714073d-05	0.367560d-06	0.159465d-04	0.172329d-05
	last-step	0.138778d-16	0.000000d+00	0.000000d+00	0.471845d-15	0.000000d+00
	maximum	0.727933d-05	0.123511d-04	0.180390d-05	0.935624d-04	0.172329d-05
0.1	first-step	0.654143d-11	0.814957d-11	0.325056d-12	0.104217d-11	0.405285d-11
	last-step	0.277556d-16	0.333067d-15	0.138778d-16	0.971445d-16	0.000000d+00
	maximum	0.450093d-10	0.198797d-09	0.496362d-11	0.191195d-09	0.919920d-11

表 7 【問題 5】の数値実験における相対誤差
Table 7 Relative errors in numerical experiments of problem 5.

$$y' = -y^2 - (2x-1)y - (1-x+x^2) \quad y(0) = 1/2 \quad (\text{理論解 } y = -x+1/(1+e^{-x}))$$

h	error	Shanks	C & V 7	Mesh97	Nollis97	Area97
0.5	first-step	0.103463d-07	0.154480d-07	0.683362d-09	0.140747d-07	0.635048d-08
	last-step	0.362522d-15	0.108757d-15	0.362522d-16	0.278235d-13	0.145009d-15
	maximum	0.200274d-07	0.300700d-07	0.282136d-08	0.184639d-06	0.638298d-08
0.1	first-step	0.148581d-14	0.181236d-14	0.653104d-16	0.275937d-14	0.930674d-15
	last-step	0.197372d-15	0.128292d-14	0.986860d-16	0.319002d-13	0.986860d-16
	maximum	0.144292d-11	0.130431d-11	0.655997d-13	0.171312d-11	0.340540d-12

表 8 【問題 6】の数値実験における相対誤差

Table 8 Relative errors in numerical experiments of problem 6.

$$y' = -x^2 y^2/3 \quad y(2)=1 \quad (\text{理論解 } y=9/(x^3+1))$$

h	error	Shanks	C & V 7	Mesh97	Nollis97	Area97
0.5	first-step	0.730746d-03	0.973803d-02	0.518935d-05	0.379909d-03	0.120288d-05
	last-step	0.141126d-06	0.159597d-05	0.505756d-09	0.500062d-07	0.363899d-09
	maximum	0.730746d-03	0.973803d-02	0.518935d-05	0.379909d-03	0.120288d-05
0.1	first-step	0.302093d-09	0.199011d-08	0.703885d-11	0.210685d-10	0.224033d-11
	last-step	0.141500d-10	0.850802d-10	0.192999d-12	0.964787d-13	0.513324d-12
	maximum	0.746034d-09	0.464833d-08	0.138149d-10	0.277065d-10	0.149829d-10

表 9 【問題 7】の数値実験における相対誤差

Table 9 Relative errors in numerical experiments of problem 7.

$$y' = -y/x \quad y(1)=1 \quad (\text{理論解 } y=1/x)$$

h	error	Shanks	C & V 7	Mesh97	Nollis97	Area97
0.5	first-step	0.000000d+00	0.000000d+00	0.208167d-16	0.378593d-12	0.208167d-16
	last-step	0.176942d-15	0.442354d-16	0.221177d-16	0.123311d-11	0.000000d+00
	maximum	0.212287d-15	0.520417d-16	0.832667d-16	0.123311d-11	0.520417d-11
0.1	first-step	0.000000d+00	0.000000d+00	0.000000d+00	0.279970d-13	0.000000d+00
	last-step	0.152656d-15	0.954098d-16	0.954098d-16	0.192461d-12	0.954098d-16
	maximum	0.166533d-15	0.212330d-15	0.212330d-15	0.192461d-12	0.212330d-15

表 10 【問題 8】の数値実験における相対誤差

Table 10 Relative errors in numerical experiments of problem 8.

$$y' = -y \sin(2x) \quad y(0) = -0.4 \quad (\text{理論解 } y = (\sin(2x) - 2\cos(2x))/5)$$

h	error	Shanks	C & V 7	Mesh97	Nollis97	Area97
0.5	first-step	0.323209d-06	0.231165d-04	0.181701d-05	0.461073d-06	0.352259d-05
	last-step	0.209509d-07	0.396209d-05	0.666731d-07	0.712455d-08	0.984882d-06
	maximum	0.142864d-05	0.287331d-04	0.734407d-05	0.154021d-05	0.352259d-05
0.1	first-step	0.214730d-12	0.432544d-11	0.621106d-12	0.661208d-13	0.914680d-12
	last-step	0.182483d-10	0.339774d-09	0.560229d-10	0.552094d-11	0.655375d-10
	maximum	0.807638d-10	0.147845d-08	0.250438d-09	0.298704d-10	0.279382d-09

表 11 【問題 9】の数値実験における相対誤差

Table 11 Relative errors in numerical experiments of problem 9.

$$y' = \sqrt{y-y/x} \quad y(1)=16/9 \quad (\text{理論解 } y=(x/3+1/\sqrt{x})^2)$$

h	error	Shanks	C & V 7	Mesh97	Nollis97	Area97
0.5	first-step	0.284851d-06	0.379361d-06	0.173282d-06	0.253119d-04	0.401852d-06
	last-step	0.400537d-08	0.500007d-08	0.233347d-08	0.340388d-06	0.560777d-08
	maximum	0.284851d-06	0.379361d-06	0.173282d-06	0.253119d-04	0.401852d-06
0.1	first-step	0.406390d-11	0.999843d-12	0.161414d-12	0.224929d-10	0.333161d-11
	last-step	0.855467d-12	0.167481d-12	0.326585d-13	0.419261d-11	0.712114d-12
	maximum	0.667653d-11	0.144973d-11	0.256367d-12	0.338236d-10	0.550459d-15

表 12 【問題 10】の数値実験における相対誤差

Table 12 Relative errors in numerical experiments of problem 10.

$$y' = (x+1)^{(5/2)} + 2y/(x+1) \quad y(0)=2/3 \quad (\text{理論解 } y=2(x+1)^{(7/2)}/3)$$

h	error	Shanks	C & V 7	Mesh97	Nollis97	Area97
0.5	first-step	0.241538d-04	0.871763d-04	0.335287d-06	0.225107d-07	0.146175d-06
	last-step	0.145118d-06	0.527130d-06	0.205708d-08	0.785048d-10	0.818684d-09
	maximum	0.241538d-04	0.871763d-04	0.335287d-06	0.225107d-07	0.146175d-06
0.1	first-step	0.596473d-09	0.234615d-08	0.112442d-10	0.429768d-11	0.473413d-12
	last-step	0.476267d-10	0.187903d-09	0.909626d-12	0.530451d-12	0.304599d-13
	maximum	0.881041d-09	0.347020d-08	0.167047d-10	0.669807d-11	0.636343d-12

表 13 安定性検証のための数値実験結果
Table 13 Numerical experiments to test the stability.

公式	error	h = 0.02	h = 0.03	h = 0.04	h = 0.05	h = 0.06	h = 0.07
Shanks $\alpha = 4.473$	first-step	0.376556d-04	0.730003d-03	0.511547d-02	0.183381d-01	*****	*****
	last-step	0.156029d-06	0.419066d-05	0.285852d-04	0.171916d+04	*****	*****
	maximum	0.376556d-04	0.730003d-03	0.511547d-02	0.171916d+04	*****	*****
C & V 7 $\alpha = 2.667$	first-step	0.998018d-03	0.284338d-01	0.312714d+00	*****	*****	*****
	last-step	0.325847d-05	0.837984d+07	0.790290d+28	*****	*****	*****
	maximum	0.998018d-03	0.837984d+07	0.790290d+28	*****	*****	*****
Mesh97 $\alpha = 4.614$	first-step	0.279845d-05	0.154329d-03	0.253841d-02	0.218913d-01	*****	*****
	last-step	0.577495d-07	0.255198d-05	0.325944d-04	0.599938d+05	*****	*****
	maximum	0.279845d-05	0.154329d-03	0.253841d-02	0.599938d+05	*****	*****
Nolls97 $\alpha = 4.913$	first-step	0.107343d-05	0.695341d-04	0.128603d-02	0.120102d-01	*****	*****
	last-step	0.218056d-07	0.114499d-05	0.179241d-04	0.348173d+00	*****	*****
	maximum	0.107343d-05	0.695341d-04	0.128603d-02	0.348173d+00	*****	*****
Area97 $\alpha = 7.177$	first-step	0.550697d-05	0.864315d-04	0.488613d-03	0.149822d-02	0.321681d-02	0.800267d-02
	last-step	0.167786d-07	0.612461d-06	0.742583d-05	0.456876d-04	0.173883d-03	0.280969d-03
	maximum	0.550697d-05	0.864315d-04	0.488613d-03	0.149822d-02	0.321681d-02	0.800267d-02

式に比べて著しく打ち切り精度がよいことがわかる。またこの公式は、既知公式に比べて安定性の面でもすぐれていることがわかる。一方、Mesh 97 は表 1 から知られるように、丸め誤差特性が既知公式より若干劣っている。しかし、一般に常微分方程式の数値解は倍精度計算で求められることが多く、この程度の丸め誤差特性の劣化は特に問題とすに当たらないと思われる。したがって、Mesh 97 はいろいろな角度から眺めて既知公式に優っており、既知公式の代りに用いて有利であろう。

(3) Nolls 97 は、Mesh 97 を打ち切り誤差の観点から一層最適化したもので、打ち切り精度判定基準は Mesh 97 に比べて著しく小さくなっている。また、安定性の面でも Mesh 97 よりすぐれているが、残念なことに丸め誤差特性が著しく不良である。多分その理由によるものと思われるが、Nolls 97 は他の解法に比べて概して刻み幅の小さいところで十分な精度が出ていない。したがって、実用上は問題がある。紙面の関係で詳述を避けるが、Cooper と Verner による 11 段数 8 次法 C & V 8 と Nolls 97 の計算精度を比較するために行われた 4 例題に関する実験では、相対誤差が 10^{-10} より大きい場合には、表 1 から予想されるように両公式の計算精度に差は認められなかった。このことは 9 段数で実質的に 8 次の精度が得られることを示唆していて興味深い。

(4) 表 3 から表 13 に至る数値実験結果は、Area 97 の表 1 に示す特性値に誤りがないことを裏付けている。すなわち、Area 97 は安定性が最良であるばかりでなく、打ち切り精度においても既知公式に優

ている。したがって一般に弱 stiff 問題の処理に有効であるばかりでなく、non-stiff 問題に対しても既知公式の代りに用いて有利である。この方法の問題点は、係数 c_6 が負であることである。もし積分の下端が定義域の左端である場合には、最初のステップの計算は他の手段によらなければならない。

7. おわりに

この研究においてわれわれは、先に導出した 9 段数 7 次法の次数条件式の 4 自由度をもつ一解系を利用し、打ち切り誤差、丸め誤差、安定性の 3 つの観点から考慮しながら特色のある 2, 3 の公式を導いた。このうち 2 公式は性能的に既知公式を凌駕しており、十分存在理由のあるものである。著者たちは、やはり同じ解系を利用し、誤差伝播特性のすぐれた別の公式を導出しているが、それについてはここでは触れない。このような研究は 9 段数 7 次法の次数条件式の解系ごとに可能であって、研究の 1 つのひな型を示すものである。

この研究で残された課題は、実質 8 次の精度をもつ 9 段数法の開発である。また、その成果を実用に結びつけるための好ましい高次の埋め込み型公式の導出や、可変次数の埋め込み型公式の開発であろう。

最後にレフェリーから、丸め誤差の基準として係数の絶対値の総和が用いられるが、浮動小数点演算の性質から考えると、係数の大きさのばらつき

$$(\text{絶対値最大の係数}) / (\text{絶対値最小の係数})$$

が、より重要であるとの貴重なアドバイスをいただいたことを付記する。

謝辞 有益な助言をいただいた中央大学田口東教授
ならびにレフェリーの皆様様に深謝する。

参 考 文 献

- 1) Shanks, E. B.: Solutions of Differential Equations by Evaluations of Functions, *Math. Comp.*, Vol. 20, No. 93, pp. 21-38 (1966).
- 2) Cooper, G. J. and Verner, J. H.: Some Explicit Runge-Kutta Methods of High Order, *SIAM J. Num. Anal.*, Vol. 9, No. 3, pp. 389-405 (1972).
- 3) Butcher, J. C.: *The Numerical Analysis of Ordinary Differential Equations*, John Wiley & Sons (1987).
- 4) 田中正次, 笠原栄二, 村松 茂, 山下 茂: 9 段数 7 次陽的 Runge-Kutta 法の次数条件式の解について, *情報処理学会論文誌*, Vol. 33, No. 12, pp. 1506-1511 (1992).
- 5) Hull, T. E. and Johnston, R. L.: Optimum Runge-Kutta Methods, *Math. Comp.*, Vol. 18, pp. 306-310 (1964).
- 6) 田中正次: Runge-Kutta 法の打ち切り誤差に関する研究, 東京大学に提出した博士論文 (1972).
- 7) 田辺国土: 非線形最小自乗法のアルゴリズム, *応用統計学*, Vol. 9, No. 3, pp. 119-140 (1981).
- 8) 田中正次, 山下 茂, 山下忠志, 三村和正: 高次陽的 Runge-Kutta 法の解の安定性について, *京都大学数理解析研究所講究録*, No. 551, pp. 87-115 (1985).

付 録

9 段数 7 次法および 11 段数 8 次法の既知公式

(I) 9 段数 7 次法の既知公式

(i) Shanks の公式¹⁾

$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$						
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$					
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{3}{8}$				
$\frac{1}{6}$	$\frac{23}{216}$	0	$\frac{7}{72}$	$\frac{-1}{27}$			
$\frac{8}{9}$	$\frac{-4136}{729}$	0	$\frac{-4528}{243}$	$\frac{5264}{729}$	$\frac{1456}{81}$		
$\frac{1}{9}$	$\frac{8087}{11664}$	0	$\frac{484}{243}$	$\frac{-518}{729}$	$\frac{-658}{351}$	$\frac{7}{624}$	
$\frac{5}{6}$	$\frac{-1217}{2160}$	0	$\frac{-145}{72}$	$\frac{8342}{6615}$	$\frac{361}{195}$	$\frac{3033}{50960}$	
1	$\frac{259}{2768}$	0	$\frac{-84}{173}$	$\frac{-14}{173}$	$\frac{6210}{2249}$	$\frac{-99873}{251888}$	
	$\frac{173}{3360}$	0	0	$\frac{1846}{5145}$	$\frac{27}{91}$	$\frac{-19683}{713440}$	
				$\frac{-19683}{713440}$	$\frac{-19683}{713440}$	$\frac{27}{91}$	
						$\frac{173}{3360}$	

(ii) Cooper と Verner の誘導法を用いて Butcher が導いた公式 (C & V 7)²⁾

注) ここで下記の係数マトリクスにおいて $(a+b\sqrt{21})/c$ は $(a, b)/c$ とあらわす。

$\frac{7,1}{42}$	$\frac{7,1}{42}$				
$\frac{7,1}{21}$	0	$\frac{7,1}{21}$			
$\frac{7,1}{14}$	$\frac{7,1}{56}$	0	$\frac{21,3}{56}$		
$\frac{1}{2}$	$\frac{8,-1}{16}$	0	$\frac{-21,6}{16}$	$\frac{21,-5}{16}$	

$\frac{7, -1}{14}$	$\frac{-1687, 374}{196}$	0	$\frac{969, -210}{28}$	$\frac{-381, 83}{14}$	$\frac{84, -20}{49}$				
$\frac{1}{2}$	$\frac{583, -131}{128}$	0	$\frac{-2373, 501}{128}$	$\frac{4221, -914}{288}$	$\frac{-9, 4}{18}$	$\frac{189, 35}{576}$			
$\frac{7, 1}{14}$	$\frac{-623, 169}{392}$	0	$\frac{435, -81}{56}$	$\frac{-1437, 307}{252}$	$\frac{-2028, -1468}{7497}$	$\frac{-21, -4}{126}$	$\frac{384, 80}{833}$		
1	$\frac{579, -131}{24}$	0	$\frac{-791, 167}{8}$	$\frac{8099, -1765}{108}$	$\frac{-1976, 784}{459}$	$\frac{70, 7}{54}$	$\frac{160, -80}{153}$	$\frac{49, -7}{18}$	
	$\frac{1}{20}$	0	0	0	0	$\frac{49}{180}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{49}{180}$	$\frac{1}{20}$

(II) 11 段数 8 次法の既知公式

Cooper と Verner によって得られた公式 (C & V 8)²⁾

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$								
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$							
$\frac{7, 1}{14}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{-7, -3}{98}$	$\frac{21, 5}{49}$						
$\frac{7, 1}{14}$	$\frac{11, 1}{84}$	0	$\frac{18, 4}{63}$	$\frac{21, -1}{252}$					
$\frac{1}{2}$	$\frac{5, 1}{48}$	0	$\frac{9, 1}{36}$	$\frac{-231, 14}{360}$	$\frac{63, -7}{80}$				
$\frac{7, -1}{14}$	$\frac{10, -1}{42}$	0	$\frac{-432, 92}{315}$	$\frac{633, -145}{90}$	$\frac{-504, 115}{70}$	$\frac{63, -13}{35}$			
$\frac{7, -1}{14}$	$\frac{1}{14}$	0	0	0	$\frac{14, -3}{126}$	$\frac{13, -3}{63}$	$\frac{1}{9}$		
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{32}$	0	0	0	$\frac{91, -21}{576}$	$\frac{11}{72}$	$\frac{-385, -75}{1152}$	$\frac{63, 13}{128}$	
$\frac{7, 1}{14}$	$\frac{1}{14}$	0	0	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{-733, -147}{2205}$	$\frac{515, 111}{504}$	$\frac{-51, -11}{56}$	$\frac{132, 28}{245}$
1	0	0	0	0	$\frac{-42, 7}{18}$	$\frac{-18, 28}{45}$	$\frac{-273, -53}{72}$	$\frac{301, 53}{72}$	$\frac{28, -28}{45}$
	$\frac{1}{20}$	0	0	0	0	0	0	$\frac{49}{180}$	$\frac{16}{45}$
								$\frac{49}{180}$	$\frac{1}{20}$

(I) (ii) の注はここでも有効である。

(平成 4 年 6 月 10 日受付)
(平成 4 年 9 月 10 日採録)

田中 正次 (正会員)

昭和 2 年生。昭和 32 年東北大学理学部数学科卒業。昭和 36 年同大学大学院理学研究科修士課程修了。同年富士電機(株)研究部に入社。昭和 37 年同社を退職し、山梨大学講師となる。ついで同大学計算機科学科教授、電子情報工学科教授を経て、現在は日本大学工学部教授。専門は数値解析、主として常微分方程式の数値解法とその応用に関する研究に携わる。日本数学会、日本応用数学会各会員。



村松 茂 (正会員)

昭和 39 年生。昭和 62 年山梨大学工学部計算機科学科卒業。平成元年同大学院修士課程修了後、富士ゼロックス(株)入社。総合図面管理システムの開発に従事、現在に至る。



山下 茂

昭和 18 年生。昭和 37 年山梨工業高等学校デザイン科卒業。現在は文部技官として山梨大学工学部電子情報工学科に勤務。