ショートノート

代用電荷法におけるスキームの「不変性」について

室 田 一 雄†

2次元の Laplace 方程式 $\Delta u=0$ の Dirichlet 問題に対する代用電荷法においては，$u^{(N)}(\boldsymbol{x})=-\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{N}Q_j\log\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}_j\|$ の形の近似式（ここで $\boldsymbol{y}_j\in\boldsymbol{R}^2$ $(j=1,\cdots,N)$ は電荷点の座標）を用いるのが普通であるが，これは座標のスケーリングや境界条件の原点移動に対して不変でない．そこで，$u^{(N)}(\boldsymbol{x})=Q_0-\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{N}Q_j\log\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}_j\|$ の形の近似式を考え，その係数 Q_j $(j=0,1,\cdots,N)$ を $\sum_{j=1}^{N}Q_j=0$ という制約下で定めることを提案する．これにより，物理的に自然で，かつ，数学的にもよい性質をもった近似方式が得られる．

On "Invariance" of Schemes in the Fundamental Solution Method

Kazuo Murota†

In the context of the method of fundamental solutions (or the charge simulation method) it is proposed to use finite-dimensional approximations which remain invariant with respect to trivial affine transformations in the problem description. For a Dirichlet problem of the two-dimensional Laplace equation $\Delta u=0$, the proposed approximation scheme is: $u^{(N)}(\boldsymbol{x})=Q_0-\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{N}Q_j\log\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}_j\|$, with coefficients Q_j $(j=0,1,\cdots,N)$ subject to the constraint $\sum_{j=1}^{N}Q_j=0$, where $\boldsymbol{y}_j\in\boldsymbol{R}^2$ $(j=1,\cdots,N)$ are the coordinates of the charge points. Such invariant forms lead to mathematically nice and physically natural approximation schemes.

1. 不変な近似式

2次元領域 $\Omega\subset\boldsymbol{R}^2$ における Laplace 方程式 $\Delta u=0$ の Dirichlet 問題

$$\Delta u(\boldsymbol{x})=0\ (\boldsymbol{x}\in\Omega),\quad u(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x})\ (\boldsymbol{x}\in\partial\Omega) \tag{1.1}$$

を考える．代用電荷法（村島[3]，岡本・桂田[4]を参照）においては，電荷点 $\boldsymbol{y}_j\in\boldsymbol{R}^2-\bar{\Omega}$ $(j=1,\cdots,N)$ を適当に選んで，

$$u^{(N)}(\boldsymbol{x})=-\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{N}Q_j\log\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}_j\| \tag{1.2}$$

の形の近似式を設定し，未定係数 Q_j $(j=1,\cdots,N)$ を選点法や最小2乗法で定めるのが普通である．例えば，選点法においては，N個の拘束点 $\boldsymbol{x}_k\in\partial\Omega$ $(k=1,\cdots,N)$ を適当に選んで，拘束条件

$$u^{(N)}(\boldsymbol{x}_k)=-\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{N}Q_j\log\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{y}_j\|=f(\boldsymbol{x}_k)\quad(k=1,\cdots,N) \tag{1.3}$$

を Q_j $(j=1,\cdots,N)$ に関する1次方程式系と見て解くことになる．

しかし，こうして定められる近似解 $u^{(N)}$ は，座標のスケール変換

$$\boldsymbol{x}\to\alpha\boldsymbol{x},\quad \boldsymbol{y}_j\to\alpha\boldsymbol{y}_j \tag{1.4}$$

や境界条件の原点移動

$$f(\boldsymbol{x})\to f(\boldsymbol{x})+c\qquad(c\text{ は定数}) \tag{1.5}$$

に対して「不変」でない．すなわち，変換(1.4)，(1.5)のそれぞれに伴って期待される自然な形の不変性☆，すなわち

$$u^{(N)}(\boldsymbol{x})\to u^{(N)}(\alpha\boldsymbol{x}),\quad u^{(N)}(\boldsymbol{x})\to u^{(N)}(\boldsymbol{x})+c \tag{1.6}$$

の形の性質，をもっていない．物理現象の記述が

† 京都大学数理解析研究所
Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University

☆ 本論文での「不変性」は幾何学におけるような意味の不変性を指し，共変性と呼んでもよい．

(1.4)や(1.5)のような自明な座標変換に本質的に依存するはずはないので，このような「不変」でない近似解に物理的な解釈を与えることは難しいと言わざるを得ない．また，Laplace 方程式そのものは上記のような不変性を有しているのであるから，それを保った形の近似解の方が数学的にも良い性質をもっていると期待される．

そこで，

$$u^{(N)}(\boldsymbol{x})=Q_0-\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{N}Q_j\log\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}_j\| \tag{1.7}$$

の形の近似式を設定し，係数 Q_j $(j=0,1,\cdots,N)$ を

$$\sum_{j=1}^{N}Q_j=0 \tag{1.8}$$

という制約下で定めることを提案する．例えば，選点法においては，N個の拘束点 $\boldsymbol{x}_k\in\partial\Omega$ $(k=1,\cdots,N)$ における拘束条件

$$\begin{aligned}u^{(N)}(\boldsymbol{x}_k)&=Q_0-\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{N}Q_j\log\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{y}_j\|\\&=f(\boldsymbol{x}_k)\quad(k=1,\cdots,N)\end{aligned} \tag{1.9}$$

と制約条件(1.8)を合わせたものを Q_j $(j=0,1,\cdots,N)$ に関する１次方程式系と見て解く．

こうして定められる近似解 $u^{(N)}$ は上記の自明な変換(1.4)，(1.5)に対して「不変」である．実際，(1.4)に対しては，制約条件(1.8)によって

$$\begin{aligned}&Q_0-\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{N}Q_j\log\|\alpha(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}_j)\|\\&=u^{(N)}(\boldsymbol{x})-\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{N}Q_j\log|\alpha|\\&=u^{(N)}(\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

が成り立つので $Q_j\to Q_j$ $(j=0,1,\cdots,N)$ となり，(1.5)に対しては $Q_0\to Q_0+c$，$Q_j\to Q_j$ $(j=1,\cdots,N)$ となるので，不変性(1.6)を有している．なお，座標軸の回転と並進に対しては，通常の表式(1.2)も提案する表式(1.7)も不変である．

通常の表式(1.2)に対する方程式系(1.3)の係数行列（N次行列）をG，不変な表式(1.7)に対する方程式系(1.8)，(1.9)の係数行列（$N+1$ 次行列）を $\tilde{G}$ とすると，

$$\tilde{G}=\begin{bmatrix}0 & \mathbf{1}^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{1} & G\end{bmatrix} \tag{1.10}$$

の関係がある．ここで，$\mathbf{1}$ はすべての要素が１である N 次元縦ベクトルを表す．

最小２乗法的に係数 Q_j $(j=0,1,\cdots,N)$ を定める場合には，条件(1.8)を満たすN次元部分空間（$\subset\boldsymbol{R}^{N+1}$）上で残差の最小化を計る．

以上のように不変な表式(1.7)に基づいて構成された近似解は，物理的に自然なだけでなく，数学的にもよい性質をもっている．その一つとして，（通常の状況では）表式(1.7)の基底関数 $\{1\}\cup\{\log\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}_j\|\,|\,j=1,2,\cdots\}$ の１次結合の全体が $\partial\Omega$ 上の２乗可積分関数全体において稠密であるのに対し，これから定数関数を除くと稠密でなくなるという事実がある（より正確な記述は文献4)を参照されたい）．章を改めて，円板内の問題について二つの表式(1.2)と(1.7)のより具体的な数学的性質を比較してみる．

注１：天野[1]は，代用電荷法を応用した外部等角写像（単連結有界領域の外部を単位円の外部に写す等角写像）の計算法を提案しており，そこには(1.10)と同じ形の係数行列が登場する．しかし，これは，通常の表式(1.2)を仮定し，$z\to\infty$ での等角写像の振舞いから一種の境界条件として(1.8)を導き，また，領域の容量とよばれる特徴量として，Q_0 にあたる未知数（展開係数ではない）を導入した結果であり，本論文の論点とは異なっている．制約式(1.8)は村島［文献3)，p. 55］にも見られるが，その根拠は不変性とは別のものである．□

注２：本論文ではLaplace方程式を対象に代用電荷法の不変性を論じたが，このような視点は代用電荷法一般に通じるものである．例えば，村島［文献3)，11章］においては，２次元の重調和方程式 $\Delta^2u=0$ に対して

$$\begin{aligned}u^{(N)}(\boldsymbol{x})=&-\frac{1}{8\pi}\sum_{j=1}^{N}Q_j\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}_j\|^2(\log\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}_j\|-1)\\&-\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{N}M_j\log\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_j\|\end{aligned} \tag{1.11}$$

（Q_j, M_j $(j=1,\cdots,N)$ は未定係数）の形が用いられているが，これは不変性をもっていない．これに関しては機会を改めて考察したい．□

2. 円板内部領域の問題

不変な近似式(1.7)が物理的に自然で，かつ，数学的にもよい性質をもつことを示す例として，２次元円板内部領域

$$\Omega=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^2\,|\,\|\boldsymbol{x}\|<\rho\}$$

における Dirichlet 問題を考える．この問題に対する（通常の）代用電荷法の挙動については，桂田・岡本[2]による詳細な数学的解析があるので，ここでもその枠組みに沿った取扱いをする．

電荷点を

$$\boldsymbol{y}_j=\left(R\cos\frac{2\pi(j-1)}{N},\ R\sin\frac{2\pi(j-1)}{N}\right)$$
$$(j=1,\cdots,N)\quad(R>\rho)$$

に配置し，選点法を用い，拘束点を

$$\boldsymbol{x}_k=\left(\rho\cos\frac{2\pi(k-1)}{N},\ \rho\sin\frac{2\pi(k-1)}{N}\right)$$
$$(k=1,\cdots,N)$$

とする．また，f は $\partial\Omega$ 上で実解析的と仮定する．

この問題に対する（通常の表式(1.2)に基づく）代用電荷法に関して次のことが知られている．

定理 2.1[2)]　近似式(1.2)を用いるとき，

$$R^N-\rho^N\neq 1 \tag{2.1}$$

ならば，そしてそのときに限り，係数行列Gは正則である．□

定理 2.2[2)]　近似式(1.2)を用いるとき，

$$R\neq 1 \tag{2.2}$$

ならば誤差 $\sup_{\boldsymbol{x}\in\Omega}|u^{(N)}(\boldsymbol{x})-u(\boldsymbol{x})|$ は十分大きいNに対して指数関数的に減少する．□

上の定理にある条件(2.1)や(2.2)は，座標のスケール変換に対して「不変」でないので物理的解釈ができない．一方，数学的には条件(2.2)を取り除くことはできないという例が知られている[2)]．

桂田・岡本[2)]に倣って，提案する方式を解析してみると，上記の2定理における「但し書」(2.1)，(2.2)が不要であることが分かる．N次行列 $W=(W_{kj}\,|\,k,j=1,\cdots,N)$ を

$$W_{kj}=\frac{1}{\sqrt{N}}\exp\left(\frac{2\pi\mathrm{i}(k-1)(j-1)}{N}\right)$$

と定義し，

$$\tilde{W}=\begin{bmatrix}1 & \mathbf{0}^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{0} & W\end{bmatrix}$$

とおくと，Gが巡回行列なので

$$\tilde{W}^{-1}\tilde{G}\tilde{W}=\begin{bmatrix}0 & \sqrt{N} & \mathbf{0}^{\mathrm{T}}\\ \sqrt{N} & \varphi_0 & O\\ \mathbf{0} & O & \Phi\end{bmatrix} \tag{2.3}$$

の形になる．ただし，$\Phi=\mathrm{diag}[\varphi_1,\cdots,\varphi_{N-1}]$ で

$$\varphi_0=-\frac{1}{2\pi}\log|\rho^N-R^N|,$$

$$\varphi_p=\frac{N}{4\pi}\sum_{\substack{m\equiv p\\ m\in\boldsymbol{Z}}}\frac{1}{|m|}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{|m|}>0\quad(1\leq p\leq N-1)$$

である（$m\equiv p$ は $\mathrm{mod}\,N$ で考える）．これより，

$$\det\tilde{G}=-N\prod_{p=1}^{N-1}\varphi_p<0$$

となるので，定理2.1に対応して次の定理が導かれる．

定理 2.3　近似式(1.7)を用いるときの係数行列$\tilde{G}$は正則である．□

さらに，(2.3) を用いて $u^{(N)}(\boldsymbol{x})$ を陽に求めることができ（詳細は長くなるので機会を改めて報告する），定理 2.2 に対応して次の定理が導かれる．

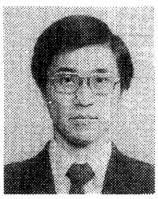
定理 2.4　近似式(1.7)を用いるとき，誤差は十分大きいNに対して指数関数的に減少する．□

謝辞　京都大学数理解析研究所の岡本久氏には本研究に関して多くのことを教えて頂いた．ここに謝意を表したい．

参考文献

1) 天野　要：代用電荷法に基づく外部等角写像の数値計算法，情報処理学会論文誌，Vol. 29, No. 1, pp. 62-72 (1988).
2) Katsurada, M. and Okamoto, H.: A Mathematical Study of the Charge Simulation Method I, *J. Fac. Sci., Univ. Tokyo*, Sec. IA, Vol. 35, No. 3, pp. 507-518 (1988).
3) 村島定行：代用電荷法とその応用―境界値問題の半解析的近似解法，森北出版 (1983).
4) 岡本　久，桂田祐史：ポテンシャル問題の高速解法，応用数理，Vol. 2, No. 3, pp. 212-230 (1992).

（平成4年11月 4 日受付）
（平成5年 1 月18日採録）



室田　一雄（正会員）

1980 年東京大学大学院工学系研究科修士課程修了．同年東京大学計数工学科助手．1983 年筑波大学社会工学系講師，1986 年東京大学計数工学科助教授．1992 年京都大学数理解析研究所助教授，現在に至る．工学博士．数値計算法，組合せ論の応用などの研究に従事．著書：Systems Analysis by Graphs and Matroid—Structural Solvability and Controllability, Springer, 1987. 応用数理学会，SIAM, Mathematical Programming Society, 計測自動制御学会，土木学会，日本OR学会の会員．