

Gregory パッチ, および C^2 Gregory パッチの部分領域の境界箱とそのレイトレーシングへの応用

三浦 憲二郎[†] 王 國 金^{††}

C^2 Gregory パッチは, 曲率が連続となる曲面を生成する目的で Miura らによって開発された自由曲面表現式である. Gregory パッチの部分領域が Gregory パッチで表せないのと同様, C^2 Gregory パッチの部分領域も C^2 Gregory パッチにならず, 分割法によってパッチと直線やパッチと平面, パッチ同士の交点, 交線等を算出することができない. そこで本研究では, それらのパッチの部分領域に対する境界箱を提案し, それを用いてパッチと直線との交点を算出する新しいアルゴリズム Gregory クリッピングを開発した. その応用例として C^2 Gregory パッチに対してレイトレーシングを行い本研究で提案した境界箱の有効性を示した.

Bounding Volumes of the Subregions of Gregory and C^2 Gregory Patches and Their Application to Ray Tracing

KENJIRO TAKAI MIURA[†] and KUO-KING WANG^{††}

C^2 Gregory patch is a kind of free-form surface patch developed by Miura and Wang in order to generate surfaces with the continuity of curvature, i. e., G^2 continuity. Since neither the subregion of a Gregory nor C^2 Gregory patch can be generally expressed by its formulation, the subdivision method can not be applied to either Gregory or C^2 Gregory patch without modifications for calculating patch/line, patch/panle, or patch/patch intersections. Therefore, we have proposed certain bounding volumes of the subregions of Gregory and C^2 Gregory patches and have developed a new method called Gregory clipping by use of it to calculate patch/line intersections. We have applied it for ray tracing C^2 Gregory patches.

1. はじめに

CAGD (Computer-Aided Geometric Design) においてモデリングや表示のための重要な幾何計算には, 二つの物体が交わるか, また, 交わる場合にはそれらの交点を計算すること, 物体と平面との交線, 物体と直線との交点を算出すること等がある. これらの幾何計算や前処理としてのラフチェックに対して, 物体や自由曲面パッチを包含する境界箱 (Bounding box) が有効であることが知られている¹⁾.

Bézier パッチは凸閉包性という性質を持っており²⁾ そのパッチの部分領域であるサブパッチも Bézier

パッチとして表現することができるので, それらの制御点からサブパッチに対する境界箱を生成することができる. しかしながら, Gregory パッチ³⁾, C^2 Gregory パッチ³⁾といった Bézier パッチの内側の制御点が2点の内挿によって表現されるパッチは, そのサブパッチがそれらのパッチで表せないためにサブパッチの境界箱を簡単に算出することができない. そのため, 例えばパッチ分割や Nishita らによって提案された Bézier クリッピング⁴⁾によりパッチと直線との交点を算出することができない. そこで, Takamura ら⁵⁾は Gregory パッチを双7次有理 Bézier パッチに変換してから分割法によって交点を算出した. ただし, 双7次パッチの制御点と重みを蓄えるのに多大なメモリーを必要とするとともに, パッチの分割は次数の立方に比例するので処理に時間がかかってしまう. 特に, C^2 Gregory パッチを有理 Bézier パッチに変換すると双13次と大変次数が高くなってしまい⁶⁾, それを分割するのは得策でない.

そこで, 本研究では Gregory パッチ, C^2 Gregory

[†] 会津大学コンピュータ理工学部コンピュータソフトウェア学科

Department of Computer Software, School of Computer Science and Engineering, The University of Aizu

^{††} コーネル大学工学部機械工学科

The Sibley School of Mechanical and Aerospace Engineering, Cornell University

パッチのサブパッチに対する境界箱を提案し、その境界箱はパラメータの定義域が1点に収束する時、その境界箱も1点に収束することを示す。また、その境界箱を用いてパッチと直線との交点を算出するアルゴリズム Gregory クリッピングを開発し、それをレイトレーシングに応用したので報告する。

2. Gregory パッチ, および C² Gregory パッチの境界箱

Gregory パッチは次式によって定義される。

$$S(u, w) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 B_{3,i}(u) B_{3,j}(w) P_{ij}(u, w)$$

ここで、 P_{ij} は $i, j=1, 2$ を除いて定数であり、

$$P_{ij}(u, w) = \frac{uP_{ij0} + wP_{ij1}}{u+w} \quad \text{for } (i=1, j=1)$$

$$= \frac{(1-u)P_{ij0} + wP_{ij1}}{(1-u)+w} \quad \text{for } (i=2, j=1)$$

$$= \frac{uP_{ij0} + (1-w)P_{ij1}}{u+(1-w)} \quad \text{for } (i=1, j=2)$$

$$= \frac{(1-u)P_{ij0} + (1-w)P_{ij1}}{(1-u)+(1-w)} \quad \text{for } (i=2, j=2).$$

$$B_{n,i}(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i$$

一方、C² Gregory パッチは次式によって定義され (図1参照)、

$$S(u, w) = \sum_{i=0}^5 \sum_{j=0}^5 B_{5,i}(u) B_{5,j}(w) P_{ij}(u, w) \quad (1)$$

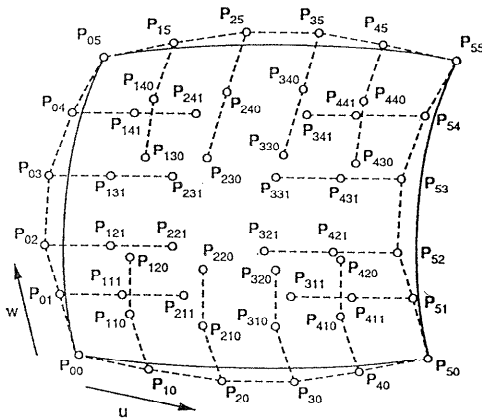


図1 C² Gregory パッチ
Fig. 1 A C² Gregory patch.

P_{ij} は $i, j=1, \dots, 4$ を除いて定数であり、

$$P_{ij}(u, w) = \frac{u^2 P_{ij0} + w^2 P_{ij1}}{u^2 + w^2} \quad \text{for } (i=1, 2, j=1, 2)$$

$$= \frac{(1-u)^2 P_{ij0} + w^2 P_{ij1}}{(1-u)^2 + w^2} \quad \text{for } (i=3, 4, j=1, 2)$$

$$= \frac{u^2 P_{ij0} + (1-w)^2 P_{ij1}}{u^2 + (1-w)^2} \quad \text{for } (i=1, 2, j=3, 4)$$

$$= \frac{(1-u)^2 P_{ij0} + (1-w)^2 P_{ij1}}{(1-u)^2 + (1-w)^2} \quad \text{for } (i=3, 4, j=3, 4).$$

これらのパッチのパラメータ (u, w) の定義域は $\{(u, w) | 0 \leq u, w \leq 1\}$ である。定義域を $\{(u, w) | a \leq u \leq b, c \leq w \leq d\} = \{[a, b], [c, d]\}$ ($0 \leq a, b, c, d \leq 1$) に制限することによって、部分領域 (サブパッチ) を定めることができる。この部分領域の4辺の境界線はパラメータ u , または w が一定となるアイソパラメトリックラインとなっている。この章では、まず、Gregory パッチと C² Gregory パッチの部分領域に対してそれを内包する境界箱を提案する。次に、定義域が1点に収束する時その境界箱はパッチ上の1点に収束することを証明する。

ここでは、以後のための準備として良く知られた補題 1, 2, 3 と定理 1 を述べる⁷⁾。

補題 1 (凸閉包性): Bernstein 基底関数

$$B_{n,i}(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i$$

は区間 $[0, 1]$ において非負でありそれらの総和

$$\sum_{i=0}^n B_{n,i}(t)$$

は常に1である。ここで、 $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, n は正整数。

補題 2: $B_{n,i}(t) = B_{n,n-i}(1-t)$ 。

補題 3: $B_n(t) = B_n[0, 1](t) = \{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ を区間 $[0, 1]$ で定義された n 次の Bézier 曲線

$$B_n(t) = \sum_{i=0}^n B_{n,i}(t) P_i$$

とする。そのとき、

$$\{P_0, P_1, \dots, P_n\} = (1-t) \{P_0, P_1, \dots, P_{n-1}\} + t \{P_1, P_2, \dots, P_n\}.$$

次の定理を用いた Bézier 曲線の分割法は de Casteljau アルゴリズムとして知られている⁸⁾。

定理 1: 補題 3 と同様に $B_n(t) = B_n[0, 1](t) = \{P_0,$

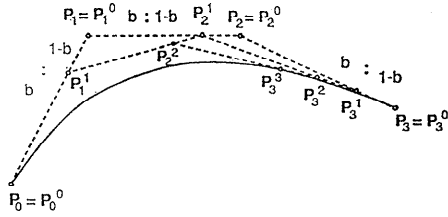


図 2 3次 Bézier 曲線の分割
Fig. 2 Subdivision of cubic Bézier curve.

P_1, \dots, P_n を Bézier 曲線とする。図 2 に示すようにパラメータ値 b ($0 \leq b \leq 1$) において次式で表せる 2 つの Bézier 曲線に分割される。

$$B_n[0, b](t) = B_n^0[0, 1](t^0) = \{P_0^0, P_1^1, \dots, P_n^n\} \quad (2)$$

$$B_n[b, 1](t) = B_n^1[0, 1](t^1) = \{P_n^n, P_{n-1}^{n-1}, \dots, P_0^0\} \quad (3)$$

ただし、

$$P_i^k = \begin{cases} (1-b)P_{i-1}^{k-1} + bP_i^{k-1} & k=1, \dots, n \\ P_i & k=0. \end{cases}$$

Bézier 曲線に対して定理 1 を 2 度適用することにより制限された区間 $[a, b]$ ($0 \leq a \leq b \leq 1$) で定義される曲線

$$B_n[a, b](t) = B_n^0\left[\frac{a}{b}, 1\right](t^0) = B_n^{01}[0, 1](t^{01})$$

を得る。ここで、 $t^{01} = (bt^0 - a)/(b - a) = (t - a)/(b - a)$ 。

定理 2 (境界箱の収束) の証明の準備として以下の補題 4, 5, 6 を述べるとともにそれらを証明する。

補題 4 : 補題 3 と同様に $B_n[0, b](t) = B_n^0[0, 1](t^0) = \{P_0^0, P_1^1, \dots, P_n^n\}$ を Bézier 曲線とする。 P_i^i を以下のように定義する。

$$P_i^i = \sum_{j=0}^n W_{ij} P_j$$

ここで、 W_{ij} は P_i^i への制御点 P_j の重みとする。そのとき、重み W_{j0} ($i=0, \dots, n$) は b が 0 に収束する時 1 に収束する。

証明: 定理 1 より、重み W_{i0} は次式で与えられる。

$$W_{i0} = \frac{(1-b)^i}{1} W_{i-10} \quad i=1, \dots, n$$

$$W_{00} = 1 \quad i=0.$$

したがって、

$$W_{i0} = (1-b)^i.$$

上式からわかるように b が 0 に収束する時 W_{i0} ($i=0, \dots, n$) は 1 に収束する。

補題 5 : 制御点の名前を付け替え $B_n[0, b](t) = B_n^0[0, 1](t^0) = \{P_0, P_1, \dots, P_n\}$, $B_n[a, b](t) = B_n^0[a/b, 1](t^0) = \{P_n^n, P_{n-1}^{n-1}, \dots, P_0^0\}$ とする。このとき、 a が

b に収束すると、制御点 P_n^i ($i=0, \dots, n$) は点 $P_n^n = B_n^0(1) = B_n(b)$ に収束する。

証明: 定理 1 より P_n^i ($i=0, \dots, n$) は

$$P_i^k = \begin{cases} \left(1 - \frac{a}{b}\right) P_{i-1}^{k-1} + \frac{a}{b} P_i^{k-1} & k=1, \dots, n \\ P_i & k=0. \end{cases}$$

$i=1, \dots, n$ に対して、

$$\begin{aligned} & |P_n^i - P_n^{i-1}| \\ &= \left| \left(1 - \frac{a}{b}\right) P_{n-1}^{i-1} + \frac{a}{b} P_n^{i-1} - P_n^{i-1} \right| \\ &= \left(1 - \frac{a}{b}\right) |P_{n-1}^{i-1} - P_n^{i-1}| \end{aligned}$$

であり、 $i=2, \dots, n$ に対して

$$\begin{aligned} & |P_{n-1}^{i-1} - P_n^{i-1}| \\ &\leq \left(1 - \frac{a}{b}\right) |P_{n-2}^{i-2} - P_{n-1}^{i-2}| \\ &\quad + \frac{a}{b} |P_{n-1}^{i-2} - P_n^{i-2}| \\ &\leq \max |P_i - P_{i+1}|. \end{aligned}$$

したがって、

$$|P_n^i - P_n^0| \leq \left(1 - \frac{a}{b}\right)^i nM$$

ただし、 $M = \max |P_i - P_{i+1}|$ 。もし $(1 - a/b) < \epsilon/nM$, すなわち、 $b - a < b\epsilon/nM$, そのとき $i=1, \dots, n$ に対して

$$|P_n^i - P_n^0| < \epsilon.$$

補題 6 : 補題 5 と同様に $B_n[a, b](t)$ を定義する。分割された Bézier 曲線の定義域 $[a, b]$ がある 1 点 $p \in [a, b]$ に収束する時、曲線のすべての制御点は $B_n(p)$ に収束する。

証明: $[a', b'] \subset [a, b]$, $p \in [a', b']$ とする。補題 5 より $[a', b']$ に対応する Bézier 曲線の制御点は $B_n(b')$ に収束する。一方、 $[0, 1]$ において $B_n(t)$ は連続なので $b' \rightarrow p$ の時 $B_n(b') \rightarrow B_n(p)$ 。したがって制御点は $B_n(p)$ に収束する。

2.1 境界箱

ここでは C^2 Gregory パッチを例として境界箱を定義する。Gregory パッチに対してもほぼ同様に境界箱を定義することができる。

C^2 Gregory パッチを表す (1) 式を次式のように変形できる。

$$\begin{aligned} S(u, w) &= \sum_{i=0}^5 \sum_{j=0}^5 B_{5,i}(u) B_{5,j}(w) P_{i,j}(u, w) \\ &= \sum_{i=0}^5 \sum_{j=0}^5 B_{5,i}(u) B_{5,j}(w) \{(1 - f_i(u, w)) \end{aligned}$$

$$\times \mathbf{P}_{i,j_0} + f_{i,j}(u, w) \mathbf{P}_{i,j_1} \quad (4)$$

ここで、

$$\begin{aligned} f_{ij}(u, w) &= \frac{w^2}{u^2 + w^2} && \text{for } (i=1, 2, j=1, 2) \\ &= \frac{w^2}{(1-u)^2 + w^2} && \text{for } (i=3, 4, j=1, 2) \\ &= \frac{(1-w)^2}{u^2 + (1-w)^2} && \text{for } (i=1, 2, j=3, 4) \\ &= \frac{(1-w)^2}{(1-u)^2 + (1-w)^2} && \text{for } (i=3, 4, j=3, 4). \end{aligned}$$

C² Gregory パッチは Bézier パッチと同様に凸閉包性を持つ、すなわち、パッチ上の任意の点は制御点で張られる凸閉包に含まれる。Bézier パッチの場合、アインパラメトリックラインで囲まれた部分領域は Bézier パッチで表現できるので、部分領域の境界箱としては凸閉包性を利用してサブパッチの制御点の凸閉包そのもの、あるいはそれらすべての制御点の各座標値の最小、最大、 $x_{\min}, x_{\max}, y_{\min}, y_{\max}, z_{\min}, z_{\max}$ によって囲まれる直方体を用いることができる。しかしながら、C² Gregory パッチの場合にはアインパラメトリックラインは一般に有理曲線になってしまい、それらによって囲まれた部分領域はもはや C² Gregory パッチでは表現できない。そこで、定義域を限定することによって(4)式中の関数 $f_{ij}(u, w)$ の値域が制限されることを考慮して以下のように内部の制御点 $\mathbf{P}_{i,j}$ ($i=1, \dots, 4, j=1, \dots, 4$) に対する境界箱を定義する。

定理1より定義域 $\{[a, b], [c, d]\}$ に対応する C² Gregory パッチの部分領域は以下のように表せる(図3参照)。

$$\begin{aligned} \mathbf{S}'(u, w) &= \sum_{i=0}^5 \sum_{j=0}^5 B_{5,i}(u) B_{5,j}(w) \mathbf{P}_{i,j}'(u, w) \\ & \quad a \leq u \leq b, c \leq w \leq d \quad (5) \end{aligned}$$

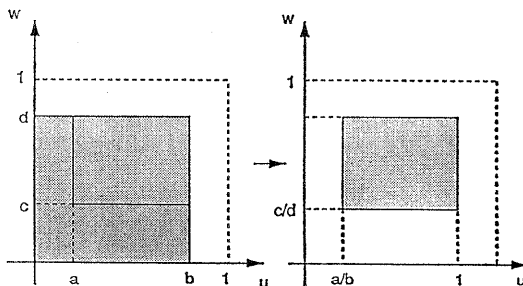


図3 パッチの分割
Fig. 3 Subdivision of patch.

ここで、

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{i,j}'(u, w) &= \sum_{k=0}^5 \sum_{l=0}^5 W_{kl}{}^{i,j} \mathbf{P}_{kl}(u, w) \\ &= \sum_{k=0}^5 \sum_{l=0}^5 W_{kl}{}^{i,j} \{(1-f_{kl}(u, w)) \mathbf{P}_{kl_0} \\ & \quad + f_{kl}(u, w) \mathbf{P}_{kl_1}\}. \quad (6) \end{aligned}$$

$\mathbf{S}'(u, w)$ は Bézier パッチの形式で表されているが、その制御点は定数ではなく関数 $f_{kl}(u, w)$ の値に依存する。分割法からわかるように $W_{kl}{}^{i,j}$ の総和は

$$\sum_{k=0}^5 \sum_{l=0}^5 W_{kl}{}^{i,j} = 1 \quad \text{for } (i=0, \dots, 5, j=0, \dots, 5). \quad (7)$$

制限された定義域における関数 $f_{kl}(u, w)$ ($k, l=0, \dots, 5$) の最大値、最小値を f_{kl}^{\max} と f_{kl}^{\min} とする。これらの値は次に示すように簡単に求めることができる。例えば、 f_{11} の u, w に関する偏微分は

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{11}}{\partial u} &= -\frac{2uw^2}{(u^2 + w^2)^2} \leq 0 \\ \frac{\partial f_{11}}{\partial w} &= \frac{2u^2w}{(u^2 + w^2)^2} \geq 0. \end{aligned}$$

であり、 $f_{11}^{\max} = f_{11}(a, d), f_{11}^{\min} = f_{11}(b, c)$ で与えられる。図4に示すように他の f_{kl} の最大値、最小値も簡単に求められる。

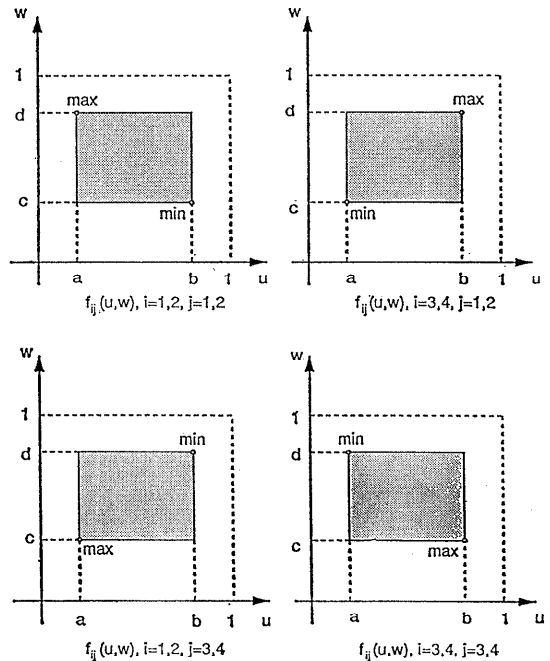


図4 関数 $f_{ij}(u, w)$ の最大値、最小値
Fig. 4 Max, min of function $f_{ij}(u, w)$.

f_{ki}^{\max} と f_{ki}^{\min} を用いると(6)式は次式に変形される。

$$P_{ij}'(u, w) = \sum_{k=0}^5 \sum_{l=0}^5 W_{kl}{}^{ij} \{ (1-g_{kl}(u, w))P_{kl}^{\min} + g_{kl}(u, w)P_{kl}^{\max} \} \quad (8)$$

ここで、

$$P_{kl}^{\min} = (1-f_{kl}^{\min})P_{kl0} + f_{kl}^{\min}P_{kl1}$$

$$P_{kl}^{\max} = (1-f_{kl}^{\max})P_{kl0} + f_{kl}^{\max}P_{kl1}$$

さらに、(8)式は

$$\begin{aligned} P_{ij}'(u, w) &= \sum_{k=0}^5 \sum_{l=0}^5 W_{kl}{}^{ij} P_{kl}^{\min} \\ &+ \sum_{k=0}^5 \sum_{l=0}^5 W_{kl}{}^{ij} g_{kl}(u, w) (P_{kl}^{\max} - P_{kl}^{\min}) \\ &= P_{ij}'^{\min} + \sum_{k=0}^5 \sum_{l=0}^5 W_{kl}{}^{ij} s_{kl} (P_{kl}^{\max} - P_{kl}^{\min}) \end{aligned}$$

ただし、

$$P_{ij}'^{\min} = \sum_{k=0}^5 \sum_{l=0}^5 W_{kl}{}^{ij} P_{kl}^{\min}$$

$$0 \leq s_{kl} \leq 1 \quad \text{for } (i=0, \dots, 5, j=0, \dots, 5).$$

となる。すなわち、図5に示すように制御点 P_{ij}' は $P_{ij}'^{\min}$ と $P_{ij}'^{\min} + W_{kl}{}^{ij} (P_{kl}^{\max} - P_{kl}^{\min})$ の凸閉包に含まれる。(5)式は Bézier パッチの形式なので部分領域の任意の点は $P_{ij}'^{\min}$ と $P_{ij}'^{\min} + W_{kl}{}^{ij} (P_{kl}^{\max} - P_{kl}^{\min})$ ($i, j, k, l=0, \dots, 5$) によって張られる凸閉包の中に存在する。これらの点を用いて部分領域の境界箱を生成することができる。Gregory パッチの内部の制御点は2点の線型結合により定義され、上述した方法と同様に Gregory パッチに対しても境界箱を定めることができる。

$W_{kl}{}^{ij}$ ($i, j, k, l=0, \dots, 5$) を計算せずに de Casteljau アルゴリズムによって P_{ij}' の境界箱を求めることができる。まず、2つの制御点 P_{kl}^+ と P_{kl}^- ($k, l=0, \dots, 5$) を次のように生成する。

For k and l ($k=0, \dots, 5, l=0, \dots, 5$),

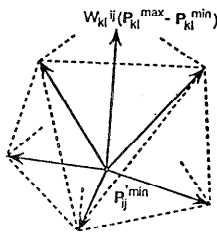


図5 P_{ij}' の凸閉包
Fig. 5 Convex hull of P_{ij}' .

if $(P_{kl}^{\max} - P_{kl}^{\min})_x \geq 0$
 then $(P_{kl}^+)_x = (P_{kl}^{\max} - P_{kl}^{\min})_x, (P_{kl}^-)_x = 0$
 else $(P_{kl}^+)_x = 0, (P_{kl}^-)_x = (P_{kl}^{\max} - P_{kl}^{\min})_x$
 if $(P_{kl}^{\max} - P_{kl}^{\min})_y \geq 0$
 then $(P_{kl}^+)_y = (P_{kl}^{\max} - P_{kl}^{\min})_y, (P_{kl}^-)_y = 0$
 else $(P_{kl}^+)_y = 0, (P_{kl}^-)_y = (P_{kl}^{\max} - P_{kl}^{\min})_y$
 if $(P_{kl}^{\max} - P_{kl}^{\min})_z \geq 0$
 then $(P_{kl}^+)_z = (P_{kl}^{\max} - P_{kl}^{\min})_z, (P_{kl}^-)_z = 0$
 else $(P_{kl}^+)_z = 0, (P_{kl}^-)_z = (P_{kl}^{\max} - P_{kl}^{\min})_z$

ここで、 $(V)_x, (V)_y, (V)_z$ はベクトル V の x, y, z の各座標を意味している。次に、 P_{kl}^+ と P_{kl}^- をもとのパッチの制御点であると見なし、de Casteljau アルゴリズムを用いて部分領域の (i, j) における制御点 P_{ij}^+ と P_{ij}^- ($i, j=0, \dots, 5$) を算出する。そのとき、
 $(P_{ij}'^{\min} + P_{ij}^-)_x \leq (P_{ij}'^{\min})_x \leq (P_{ij}'^{\min} + P_{ij}^+)_x$
 $(P_{ij}'^{\min} + P_{ij}^-)_y \leq (P_{ij}'^{\min})_y \leq (P_{ij}'^{\min} + P_{ij}^+)_y$
 $(P_{ij}'^{\min} + P_{ij}^-)_z \leq (P_{ij}'^{\min})_z \leq (P_{ij}'^{\min} + P_{ij}^+)_z$.

図6参照。このように P_{ij}' の境界箱を求めることによって高速に部分領域の境界箱を求めることができる。

2.2 境界箱の収束

この節では、 C^2 Gregory パッチの部分領域の定義域 $[a, b], [c, d]$ が1点に収束するとき、前節で説明した境界箱も元のパッチ上の1点に収束することを証明する。Gregory パッチの境界箱の収束も同様に証明される。

定理2 (境界箱の収束) : P_{ij}' ($i, j=0, \dots, 5$) を(8)式で表された部分領域 $S'(u, w)$ の制御点とする。このとき、定義域 $[a, b], [c, d]$ が1点 $(p, q) \in \{[a, b], [c, d]\}$ に収束すると P_{ij}' ($i, j=0, \dots, 5$) は $S(p, q)$ に収束する。

証明: まず、部分領域の制御点が1点に収束することを次の2つの場合に分けて証明する。

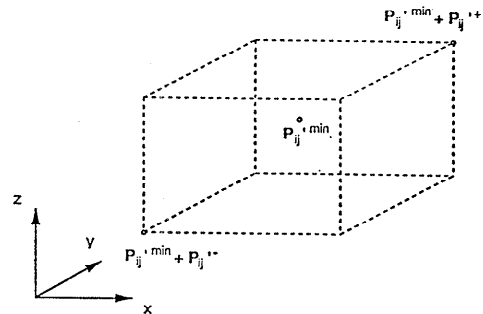


図6 P_{ij}' の境界箱
Fig. 6 Bounding volume of P_{ij}' .

場合1) $(p, q) \neq (0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)$

まず、定義域が1点に収束すれば P_{ij}' が $P_{ij}'^{\min}$ に収束することを証明する。

$$\begin{aligned} & |P_{ij}' - P_{ij}'^{\min}| \\ &= \left| \sum_{k=0}^5 \sum_{l=0}^5 W_{kl}{}^{ij} g_{kl}(u, w) (P_{kl}{}^{\max} - P_{kl}{}^{\min}) \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^5 \sum_{l=0}^5 W_{kl}{}^{ij} |P_{kl}{}^{\max} - P_{kl}{}^{\min}| \\ &\leq \left(\sum_{k=0}^5 \sum_{l=0}^5 W_{kl}{}^{ij} \right) \max |P_{kl}{}^{\max} - P_{kl}{}^{\min}| \end{aligned}$$

(7)式より、

$$|P_{ij}' - P_{ij}'^{\min}| \leq \max |P_{kl}{}^{\max} - P_{kl}{}^{\min}|.$$

すべての $f_{kl}(u, w)$ は $a' \neq 0$, かつ $b' \neq 1$, かつ $c' \neq 0$, かつ $d' \neq 1$ ならば $\{a', b'\}, \{c', d'\} \subset \{[a, b], [c, d]\}$ において連続であるので、定義域が1点に収束すると $\max |P_{kl}{}^{\max} - P_{kl}{}^{\min}| \rightarrow 0$. したがって、 $|P_{ij}' - P_{ij}'^{\min}| \rightarrow 0$.

補題6と部分領域 $S'(u, w)$ は Bézier 曲線のテンソル積であることから P_{ij}' は $S(p, q)$ に収束する。

場合2) $(p, q) = (0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)$

ここでは $(p, q) = (0, 0)$ の場合、 $P_{ij}' (i, j = 0, \dots, 5)$ は P_{00} に収束することを証明する。他の場合も同様に4隅の制御点に収束することを証明できる。

$$\begin{aligned} & |P_{ij}'(u, w) - P_{00}| \\ &\leq \left| \sum_{k=1}^5 \sum_{l=1}^5 W_{kl}{}^{ij} P_{kl}(u, w) + \sum_{k=1}^5 W_{k0}{}^{ij} P_{kl}(u, w) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l=1}^5 W_{0l}{}^{ij} P_{kl}(u, w) + |(W_{00}{}^{ij} - 1)P_{00} \right| \end{aligned}$$

部分領域に補題4を適用し $b \rightarrow 0$, かつ $d \rightarrow 0$ の時、 $W_{00}{}^{ij} \rightarrow 1$. (6)式より $W_{00}{}^{ij}$ を除いた重み $W_{kl}{}^{ij}$ は0に収束する。 $|P_{kl}(u, w)| (k, l = 0, \dots, 5)$ は有限なので $P_{ij}' \rightarrow P_{00} = S(0, 0)$.

定数域が (p, q) に収束すると部分領域のすべての制御点が $S(p, q)$ に収束するので、それらの制御点から生成される境界箱も1点 $S(u, w)$ に収束する。

3. 直線とパッチとの交点計算

レイトレーシングはシーンのなかにある物体へ視点から仮想的な光線を作り、それらを追跡することによって画像を生成する。レイトレーシングシステムの主な処理は物体と光線との交点、すなわち物体と直線との交点を算出することである。光線とパッチとの交点の算出法は、パッチの分割による方法、代数学的手法によるもの、数値計算の技法を用いるものの3つに分類できる⁴⁾。

Toth⁹⁾ や、Joy Bhetanabhotla¹⁰⁾ は数値計算による方法を開発した。Tothの手法はNewton法を用いどの種類のパッチに対しても適用することができる。JoyとBhetanabhotlaは擬Newton法を使い光線とパッチとの距離を最小化することによって交点を求める。これらの手法は一般的でありGregoryパッチやC² Gregoryパッチの表現式の特徴を利用することができない。

双3次パッチに対する代数学的な解法はKajiya¹¹⁾によって開発され、交点計算は18次方程式の根を求める問題に帰着される。このアルゴリズムをC² Gregoryパッチに適用すると50次以上の方程式をとかねばならず問題がより困難になってしまう。

Whitted¹²⁾ や Woodward¹³⁾, Nishitaら⁴⁾はパッチ分割による方法を提案している。これらのアルゴリズムはBézierパッチの凸閉包性を利用し、パッチを再帰的に分割し部分パッチの凸閉包を用いて交点を算出する。特に、Nishitaらの提案したBézierクリッピング法⁴⁾では、パッチの2つのパラメータに対し交互に独立に交点の存在する範囲を効率よく調べ、その存在しない範囲を切り落とし与えられた精度の交点を算出する。しかしながら、第1章で述べたように分割法をGregoryパッチ、C² Gregoryパッチに適用しようとする際、これらのパッチの部分領域は一般にそれらのパッチで表現できないということが問題になり、これらの手法をそのまま適用することは可能でない。

そこで、第2章で説明した境界箱を用いて、Bézierクリッピング⁴⁾の手法に基づくパッチ分割によるGregoryパッチ、C² Gregoryパッチと直線との新しい交点算出法Gregoryクリッピングをこの章で述べる。そのアルゴリズムは

- 1) パッチを投影面に射影する。
- 2) パッチの部分領域の境界箱を用いてBézierクリッピングと同様の処理を行う。

次節においてこれらの詳細について説明する。

3.1 投影面への射影

次式により定義される2平面の交線として光線を定義する。

$$a_s x + b_s y + c_s z + e_s = 0, \quad s = 0, 1 \quad (9)$$

ここで $a_s^2 + b_s^2 + c_s^2 = 1$ とする。(5)式を上式に代入することによりパッチと平面 s との交線が次式により与えられる。

$$d^s(u, w) = \sum_{i=0}^5 \sum_{j=0}^5 B_{s,i}(u) B_{s,j}(w) d_{ij}{}^s(u, w)$$

ここで、

$$d_{ij}^{l's}(u, w)$$

$$= a_s \hat{x}_{ij}^{l's}(u, w) + b_s \hat{y}_{ij}^{l's}(u, w) + c_s \hat{z}_{ij}^{l's}(u, w) + e_s.$$

$d_{ij}^{l's}$ は $P_{ij}^{l'}$ と平面 s との距離である。クリッピングのためには $d_{ij}^{l's}$ の上限値と下限値とが必要となる。そこでこれらの境界値を算出するために平面からの距離を計算するように修正を加えて境界箱を用いる。2.1 節では de Casteljau アルゴリズムを用いて x と y , z 座標の境界値を計算したが、それと同様にここでは 2 次元の制御点 $d_{kl}^{+}(d_{kl}^{+0}, d_{kl}^{+1})$ と $d_{kl}^{-}(d_{kl}^{-0}, d_{kl}^{-1})$ ($k, l=0, \dots, 5$) を後述の手順で生成した後 $d_{ij}^{l's}$ の境界値を得る。

d_{kl}^{+} と d_{kl}^{-} は次のように求める。

Let $\mathbf{n}_0=(a_0, b_0, c_0)$, $\mathbf{n}_1=(a_1, b_1, c_1)$.

For k and l ($k=0, \dots, 5$, $l=0, \dots, 5$),

if $(\mathbf{P}_{kl}^{\max} - \mathbf{P}_{kl}^{\min}) \cdot \mathbf{n}_0 \geq 0$
 then $d_{kl}^{+0} = (\mathbf{P}_{kl}^{\max} - \mathbf{P}_{kl}^{\min}) \cdot \mathbf{n}_0$, $d_{kl}^{-0} = 0$
 else $d_{kl}^{+0} = 0$, $d_{kl}^{-0} = (\mathbf{P}_{kl}^{\max} - \mathbf{P}_{kl}^{\min}) \cdot \mathbf{n}_0$
 if $(\mathbf{P}_{kl}^{\max} - \mathbf{P}_{kl}^{\min}) \cdot \mathbf{n}_1 \geq 0$
 then $d_{kl}^{+1} = (\mathbf{P}_{kl}^{\max} - \mathbf{P}_{kl}^{\min}) \cdot \mathbf{n}_1$, $d_{kl}^{-1} = 0$
 else $d_{kl}^{+1} = 0$, $d_{kl}^{-1} = (\mathbf{P}_{kl}^{\max} - \mathbf{P}_{kl}^{\min}) \cdot \mathbf{n}_1$.

次に各々の制御点に対して de Casteljau アルゴリズムを適用し、部分領域の制御点 $d_{ij}^{l'+}(d_{ij}^{l'+0}, d_{ij}^{l'+1})$ と $d_{ij}^{l'-}(d_{ij}^{l'-0}, d_{ij}^{l'-1})$ ($i, j=0, \dots, 5$) を計算する。

図 7 に示すように、

$$d_{ij}^{l'0} + d_{ij}^{l'-0} \leq d_{ij}^{l'} \leq d_{ij}^{l'0} + d_{ij}^{l'+0}$$

$$d_{ij}^{l'1} + d_{ij}^{l'-1} \leq d_{ij}^{l'} \leq d_{ij}^{l'1} + d_{ij}^{l'+1}$$

ここで、

$$\mathbf{d}_{ij}^{l'} = (d_{ij}^{l'0}, d_{ij}^{l'1})$$

$$= \left(\sum_{k=0}^5 \sum_{l=0}^5 W_{kl}^{ij} \mathbf{P}_{kl}^{\min} \cdot \mathbf{n}_0 + e_0, \sum_{k=0}^5 \sum_{l=0}^5 W_{kl}^{ij} \mathbf{P}_{kl}^{\min} \cdot \mathbf{n}_1 + e_1 \right).$$

射影されたパッチは次式で与えられる。

$$\mathbf{d}^l(u, w) = (d^0(u, w), d^1(u, w))$$

$$= \sum_{i=0}^5 \sum_{j=0}^5 B_{5,i}(u) B_{5,j}(w) \mathbf{d}_{ij}^{l'}. \quad (10)$$

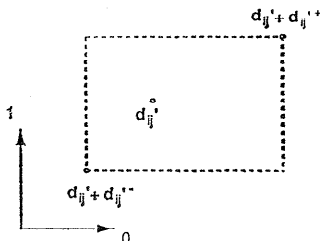


図 7 $d_{ij}^{l'}$ の境界値
 Fig. 7 Bounding values of $d_{ij}^{l'}$.

図 8 においては光線は座標系の原点に射影され、平面 0 は y 軸に、平面 1 は x 軸に射影される。ここまですべてのパッチと光線との交点計算問題は $d^l(u, w)=0$ を満たすパラメータ (u, w) を求めることに帰着した。

3.2 Gregory クリッピング

C^2 Gregory パッチに対して Bézier クリッピングを適用することによって $d^l(u, w)=0$ のすべての解を求める。図 9 において、 L_u を原点を通りベクトル v_0+v_1 に平行な直線とする。 $d^l(u, w)$ が Bézier パッチとすると、Bézier クリッピングは d^l が 0 とならないパラメータの範囲を算出する技法である。 L_u が次式で与えられるとする。

$$ax + by = 0$$

ただし、 $a^2 + b^2 = 1$, $b \geq 0$, $b = 0$ の時、 $a > 0$ とする。

制御点 $d_{ij}^{l'}$ から L_u への距離は

$$D_{ij} = ad_{ij}^{l'0} + bd_{ij}^{l'1}$$

で与えられる。Bézier クリッピングの場合には、 $d_{ij}^{l's}$ ($s=0, 1$) によって計算できるが、Gregory クリッピングの場合にはそれらは一意に決定されない。しかしながら、それらの値の範囲はわかっており D_{ij} の下限値と上限値を計算することができる。 D_{ij} は D_{ij}^-

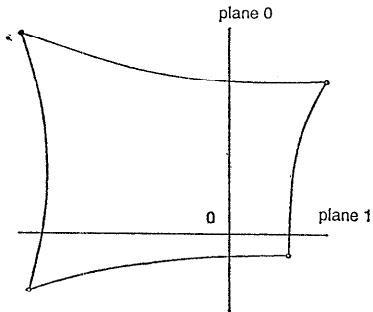


図 8 パッチ $S'(u, w)$ の投影
 Fig. 8 Projection of patch $S'(u, w)$.

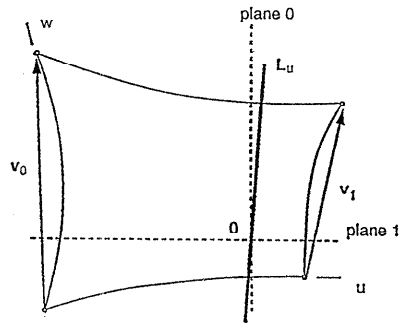


図 9 直線 L_u
 Fig. 9 Line L_u .

$\leq D_{ij} \leq D_{ij}^+$ で限定される。ただし、

1) $a \geq 0$

$$D_{ij}^- = a(d_{ij}'^0 + d_{ij}'^{-0}) + b(d_{ij}'^0 + d_{ij}'^{-0})$$

$$D_{ij}^+ = a(d_{ij}'^0 + d_{ij}'^{+0}) + b(d_{ij}'^0 + d_{ij}'^{+0})$$

2) $a < 0$

$$D_{ij}^- = a(d_{ij}'^0 + d_{ij}'^{-0}) + b(d_{ij}'^0 + d_{ij}'^{+0})$$

$$D_{ij}^+ = a(d_{ij}'^0 + d_{ij}'^{+0}) + b(d_{ij}'^0 + d_{ij}'^{-0})$$

図 10 を参照せよ。直線 L_u から任意の点 $d'(u, w)$ への距離 $D(u, w)$ は

$$D(u, w) = \sum_{i=0}^5 \sum_{j=0}^5 B_{5,i}(u) B_{5,j}(w) D_{ij}(u, w)$$

$u_{ij} = i/5, w_{ij} = j/5$ ($i, j = 0, \dots, 5$) を双 5 次 Bézier パッチの制御点とし $D_{ij}(u, w) = (u_{ij}, w_{ij}, D_{ij}(u, w))$ とする。パッチ上の点の座標は、

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(u, w) &= \sum_{i=0}^5 \sum_{j=0}^5 B_{5,i}(u) B_{5,j}(w) \mathbf{D}_{ij}(u, w) \\ &= (u, w, D(u, w)). \end{aligned}$$

である。図 11 は平面図を示し図 12 は w 軸方向からパッチを見た側面図を示す。射影された制御点の凸閉包は $D(u, w)$ パッチの射影を包含している。この凸閉包と u 軸との交点 u_{\min} と u_{\max} が解の存在範囲を限定している。凸閉包は、まず i ($i = 0, \dots, 5$) に対し

て、 D_{ij}^- ($j = 0, \dots, 5$) の最小値、および D_{ij}^+ ($j = 0, \dots, 5$) の最大値を選び、次にそれらの最小値と最大値を別々に追跡することによって決定できる。1 回のクリッピングによって $u < u_{\min}$ と $u > u_{\max}$ の領域が除かれ図 13 に示す 2 次元の部分領域だけが残る。同様に w に対してもクリッピング処理を行うことができる。 u と w に対して交互にクリッピングを行うことにより与えられた許容誤差以内の解を算出できる。Nishita ら⁴⁾が指摘しているように解が複数個存在する場合、パッチをクリッピングとは別に分割しなければ

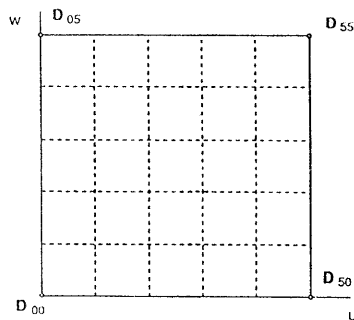


図 11 パッチ $D(u, w)$ の平面図
Fig. 11 Top view of patch $D(u, w)$.

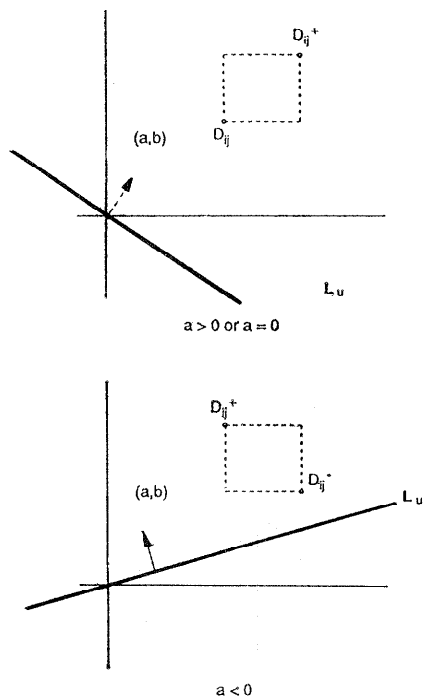


図 10 D_{ij} の境界値
Fig. 10 Bounding values of D_{ij} .

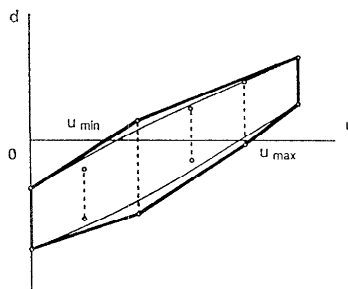


図 12 パッチ $D(u, w)$ の側面図
Fig. 12 Side view of patch $D(u, w)$.

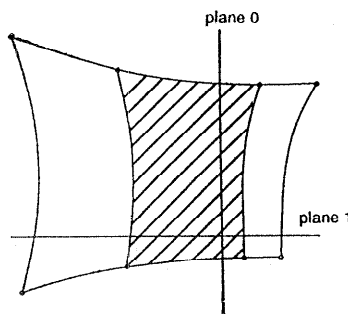


図 13 u に対するクリッピング
Fig. 13 Clipping in u .

ばクリッピングは収束しない。ここでは Nishita らが用いた経験値 20% を採用し、1 回のクリッピングによりパラメータの範囲の減少率が 20% 以下の場合にはパッチを 2 分割しそれらにクリッピングを施す。

3.3 レイ・トレーシング

ラフチェックとして u 方向のスキャン・ラインの各々についてパッチの $d'(u, w)$ と交差するか調べ、交差しないパッチは棄却する。チェックは d' のすべての制御点 (d_{ij}^- と d_{ij}^+ , $i, j=0, \dots, 5$) が平面の片側にあるか、すなわち、すべての i, j に対して $d_{ij}^- > 0$ か、または $d_{ij}^+ < 0$ であるか調べればよい。 u 方向についてチェックした後 w 方向に対しても同様の処理を行い、それらのチェックを通過したパッチに対してクリッピングを実行する。

図 14 と図 15 を生成するのに次式で与えられる比較的簡単なシェーディングモデル¹⁴⁾を用いた。

$$I_\lambda = I_{a\lambda} k_a O_{d\lambda} + \sum_{i=1}^m f_{att, i} I_{p\lambda, i} \{k_d O_{d\lambda} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{L}_i) + k_s O_{s\lambda} (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{v})^n\} \quad (11)$$

このモデルは周囲光と拡散反射光、鏡面反射光成分から構成される。ここで、 \mathbf{n} は面の法線、 \mathbf{L}_i は点光源 i への方向ベクトル、 \mathbf{r}_i は反射光 i の方向ベクトル、 \mathbf{v} は視点への方向ベクトルを表す。これらのベクトルはすべて正規化されている。 I_a は環境光の強さ、 I_p は光源の強さ、 k_a は周囲光反射係数、 k_d は拡散反射係数、 k_s は鏡面反射係数、 O_d は拡散反射色係数、 O_s は鏡面反射色係数、 f_{att} は減衰因子、 n は鏡面反射指数を表している。(11)式によって輝度 (I_{red} , I_{green} , I_{blue}) を計算する。これらの例では視点からの第 1 の

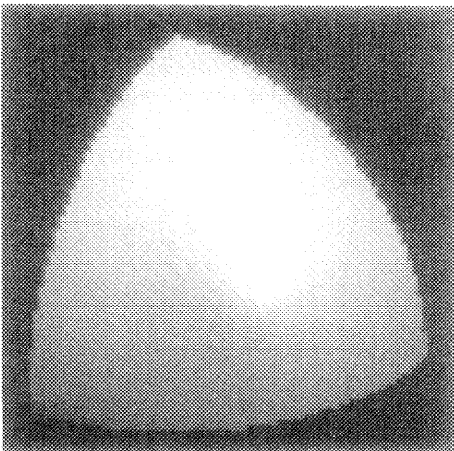


図 14 シェーディング例 (1)
Fig. 14 Shading example (1).

光線だけをトレースし、陰、反射、屈折は考慮していない。

3.4 処理時間の比較

ここでは、Newton-Raphson 法と Gregory クリッピングとを C^2 Gregory パッチに適用し処理時間を比較する。Newton-Raphson 法は光線が z 軸と平行になるように座標軸を回転させれば以下のように定式化できる¹⁵⁾。パッチ式と光線を表す直線式は、

$$\mathbf{S}(u, w) = \begin{cases} S_x(u, w) \\ S_y(u, w) \\ S_z(u, w) \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \\ z = z(t) \end{cases} \quad (13)$$

交点を定義する式は次のように表される。

$$\begin{cases} f(u, w) = S_x(u, w) - x_0 = 0 \\ g(u, w) = S_y(u, w) - y_0 = 0 \end{cases} \quad (14)$$

以下の連立方程式を反復して解くことによって上式を満たすパッチのパラメータ u, w を求める。

$$\begin{bmatrix} \partial f(u_i, w_i) / \partial u & \partial f(u_i, w_i) / \partial w \\ \partial g(u_i, w_i) / \partial u & \partial g(u_i, w_i) / \partial w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u_i \\ \delta w_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f(u_i, w_i) \\ -g(u_i, w_i) \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{cases} u_{i+1} = u_i + \delta u_i \\ w_{i+1} = w_i + \delta w_i \end{cases}$$

2つの方法を1枚の C^2 Gregory パッチ (1辺の長さは約1) に適用した結果を表1に示す。Gregory クリッピングは各パラメータ値の最大値と最小値の差が 0.001 以下になったら収束したと見なす。Newton-Raphson 法ではパラメータの初期値を $(u, w) = (0.5, 0.5)$ とし、(15)式を解くことによって得られたパラ



図 15 シェーディング例 (2)
Fig. 15 Shading example (2).

表 1 処理時間の比較
Table 1 Comparison of processing time.

| | Seconds(S) | Iteration(I) | S/I*100 |
|------------------|------------|--------------|---------|
| Gregory clipping | 66.7 | 3370 | 1.98 |
| Newton Method | 31.9 | 2589 | 1.23 |

メータから算出される点と (x_0, y_0) との距離が 0.001 以下になった時収束とする。交点計算はパッチ上の 1000 点に対して行った。表 1 中、Iteration は Gregory クリッピングの場合総クリッピング数を示し、Newton-Raphson 法では (15) 式の総反復数を示す。S/I は処理時間 (S) を繰り返し数 (I) で割った値でありクリッピング、または Newton-Raphson 法の反復計算 1 回の処理に要する時間をほぼ示している。この実験では SUN SPARC STATION 2 を用いた。表から分かるように 1 回のクリッピングの処理時間は、Newton-Raphson 法の反復計算 1 回の時間の約 1.7 倍の時間がかかっている。ただし、Newton-Raphson 法の初期値の算出、計算の安定度を考えれば Gregory クリッピングは十分有効と言える。

4. おわりに

Gregory パッチ、および C² Gregory パッチは Bézier パッチの接続問題 (パッチを接平面連続、あるいは曲率連続に接続する問題) を解決する目的で開発された自由曲面表現式である。Gregory パッチの部分領域が Gregory パッチで表せないのと同様、C² Gregory パッチの部分領域は C² Gregory パッチにならず、分割法によってパッチと直線、パッチと平面、パッチ同士の交点、交線を算出することができない。そこで本研究では、Gregory パッチ、C² Gregory パッチの部分領域に対する新しい境界箱を提案し、パラメータの定義域が 1 点に収束する時、その定義域に対応するパッチの部分領域を囲む境界箱も 1 点に収束することを示した。また、その境界箱の原理をパッチの 2 次元平面への投影してできる図形に応用し、パッチと直線との交点を算出するアルゴリズム Gregory クリッピングを開発した。その応用例として C² Gregory パッチに対してレイトレーシングを行いその有効性を示した。

参 考 文 献

- 1) 中前栄八郎, 西田友是: 3次元コンピュータグラフィックス, 昭晃堂, 東京 (1986).
- 2) 鳥谷浩志, 千代倉弘明: 3次元 CAD の基礎と応用, 共立出版, 東京 (1991).
- 3) Miura, K. Takai and Wang, K.K.: C² Gregory Patch, *EUROGRAPHICS '91*, pp. 482-492, Vienna, Austria (1991).
- 4) Nishita, T., Sederberg, T.W. and Kakimoto, M.: Ray Tracing Trimmed Rational Surface Patches, *Computer Graphics (SIGGRAPH '90 Proc.)*, Vol. 24, pp. 337-345 (1990).
- 5) Takamura, T., Ohta, M., Toriya, H. and Chi-yokura, H.: A Method to Convert a Gregory Patch and a Rational Boundary Gregory Patch to a Rational Bézier Patch and Its Applications, *CG International '90*, pp. 543-562 (1990).
- 6) Miura, K. Takai: C² Gregory Patch and Its Applications in Computer-Aided Geometric Design, Ph.D dissertation, Cornell University, Ithaca, New York (1991).
- 7) Lane, J. and Riesenfeld, R.: A Theoretical Development for the Computer Generation and Display of Piecewise Polynomial Surfaces, *IEEE Trans. PAMI*, Vol. 2, pp. 35-46 (1980).
- 8) Farin, G.: *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design*, 2nd ed., Academic Press, Boston (1990).
- 9) Toth, D.: On Ray Tracing Parametric Surfaces, *Computer Graphics (SIGGRAPH '85 Proc.)*, Vol. 19, pp. 171-179 (1985).
- 10) Joy, K. and Bhetanabhotla, M.: Ray Tracing Parametric Patches Using Numerical Techniques and Ray Coherence, *Computer Graphics (SIGGRAPH '82 Proc.)*, Vol. 20, pp. 279-285 (1986).
- 11) Kajiya, J.: Ray Tracing Parametric Patches, *Computer Graphics (SIGGRAPH '82 Proc.)*, Vol. 16, pp. 245-254 (1982).
- 12) Whitted, T.: An Improved Illumination Model for Shaded Display, *CACM*, Vol. 23, pp. 96-102 (June, 1980).
- 13) Woodward, C.: Ray Tracing Parametric Surfaces by Subdivision in Viewing Plane, in Strasser, W. and Seidel, H.-P. (ed.), *Theory and Practice of Geometric Modeling*, pp. 273-290, Springer-Verlag (1989).
- 14) Foley, J. and Van Dam, A.: *Fundamentals of Interactive Computer Graphics*, Addison-Wesley (1982).
- 15) 千代倉弘明: ソリッドモデリング, 工業調査会, 東京 (1985).

(平成 4 年 2 月 24 日受付)

(平成 4 年 12 月 10 日採録)

**三浦憲二郎（正会員）**

昭和34年1月2日生。昭和57年東京大学工学部精密機械工学科卒業。昭和59年同大学院修士課程修了。同年、キャノン株式会社に入社。機械系CAD/CAMシステムの開発に従事。平成3年コーネル大学機械工学科博士課程修了。平成5年会津大学コンピュータ理工学部コンピュータソフトウェア学科助教授。曲面の設計、CAD/CAM、ロボティックス、要素自動分割等に興味を持つ。Ph. D. ACM, ASME 各会員。

**王 國 金**

大正12年10月8日生。昭和22年国立中央大学機械工学科卒業。昭和37年ウイスコンシン大学機械工学科修士課程修了。昭和43年同大学博士課程修了。昭和52年コーネル大学機械工学・航空宇宙工学科教授。射出成形、CAD/CAMに興味を持つ。平成3年米国工学アカデミー会員。Ph. D. ASME, CIRP 各会員。