

負パラメータを含むナップサック多面体の体積に関する考察

安藤 映^{1,a)} 来嶋 秀治^{2,b)}

概要： n 次元のナップサック多面体の体積を求める問題は体積の計算が $\#P$ -困難でありながら、ナップサック多面体の切片を決める制約式 $a_1x_1 + \dots + a_nx_n \leq b$ のパラメータ a_1, \dots, a_n がすべて正であって、制約式が定数個ならば決定性の FPTAS (Fully Polynomial Time Approximation Scheme) を持つことが知られている。本稿では更に複雑な多面体の体積に対する近似計算のため、このナップサック多面体を定義する制約式が負のパラメータを持つ場合について、畳み込み積分の階段近似に基づいた近似アルゴリズムが FPTAS となる場合について考察する。定数個制約式で負のパラメーターが場合に提案アルゴリズムで近似比 $1 + \varepsilon$ を実現する場合、パラメータ絶対値の最大値 a_{\max} および、多面体が含まれる領域の厚さ、次元数 n および $1/\varepsilon$ の多項式で計算を完了できる。

キーワード： $\#P$ -困難，近似アルゴリズム，FPTAS，一様分布

1. はじめに

本稿では、次の n 次元多面体 K_m の体積を求める問題について考える。

$$K_m \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \mathbf{x} \in [0, 1]^n \mid \bigwedge_{i=1, \dots, m} \sum_{j=1, \dots, n} a_{ij} x_j \leq b_i \right\}$$

ただし、 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ であり、 a_{ij} ($i = 1, \dots, m$), ($j = 1, \dots, n$) および b_i ($i = 1, \dots, m$) は正とは限らない整数、 $m \geq 2$ は n に依らない定数であるとする。なお、 $m \geq 2$ とするのは負のパラメータを含む場合であっても制約式が一つだけならば座標変換によってすべて正のパラメータの場合に変換できるためである。この多面体 K_m は i 行 j 列の要素を a_{ij} とする $m \times n$ 行列 A および $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^m$ を用いて

$$K_m = \{ \mathbf{x} \in [0, 1]^n \mid A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \}$$

と書き直すことができる。 n 次元の多面体体積を計算する問題は $\#P$ -困難である [8]。また、より一般的な n 次元の凸体がメンバーシップオラクルのような形で与えられる場合、近似比 1.999^n すら決定性の多項式時間アルゴリズムでは実現できないことが知られている [4], [10], [18]。メン

バーシップオラクルとは、 n 次元の座標が与えられた時に、その点が対象の凸体に含まれるか否かを答えるオラクルである。この不可能性の結果のため、従来の研究では乱択化アルゴリズムによって一般の凸体の体積を近似する方法がよく調べられている。[6], [7], [9], [19]

一方で、 $\#P$ -困難な問題に対して決定性の多項式時間アルゴリズムで近似計算を行うことは理論的なチャレンジである。最近の研究ではいくつかのテクニックが提案されている [1], [2], [3], [5], [11], [12], [13], [14], [15], [16], [17], [20], [21]。

本稿では、ナップサック多面体を拡張した複数制約式ナップサック多面体について、その中でも特に負のパラメータを持つような場合について近似アルゴリズムが FPTAS となる場合について考察する。本稿で提案するアルゴリズムは基本的に安藤と来嶋 [1], [2] のものと同様に、多変数に拡張した近似畳み込み積分を用いる。本稿の要点は、解析を工夫することによって負の係数に対応することであり、本稿を通じて次の定理を示す。

定理 1 K_m の体積を計算する問題に対して、 m および K_m の厚さ β と A の成分の絶対値最大値 a_{\max} の比 a_{\max}/β が定数ならば FPTAS が存在する。

K_m の厚さ β については後で定義を行う。提案するアルゴリズムで近似比 $1 + \varepsilon$ の近似値を得るのにかかる実行時間は $O\left(n \left(\frac{2mn^3 a_{\max}}{\beta \varepsilon}\right)^m\right)$ である。

本稿の構成は以下の通りである。まず、第 2 節で問題の定義について述べる。次に第 3 節で提案手法について述べる。第 4 節でアルゴリズムの近似比と実行時間の解析アイ

¹ 崇城大学
Sojo University, 4-22-1, Ikeda, Nishi-Ku, Kumamoto, Kumamoto, 860-0082, Japan

² 九州大学
Kyushu University

a) ando-ei@cis.sojo-u.ac.jp

b) kijima@inf.kyushu-u.ac.jp

ディアについて述べる．そして第5節でまとめと今後の課題について述べる．

2. 問題の定義

$\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ を $[0, 1]^n$ に一様に分布した確率変数とする．すると、事象 $[\bigwedge_{i=1, \dots, m} \mathbf{a}_i^\top \mathbf{X} \leq b_i]$ と事象 $[\mathbf{X} \in K_m(\mathbf{b})]$ が同値であることは明らかである．すなわち、

$$\begin{aligned} \Pr \left[\bigwedge_{i=1, \dots, m} \mathbf{a}_i^\top \mathbf{X} \leq b_i \right] \\ = \Pr [\mathbf{X} \in K_m(\mathbf{b})] = \frac{\text{Vol}(K_m(\mathbf{b}))}{\text{Vol}([0, 1]^n)} = \text{Vol}(K_m(\mathbf{b})) \end{aligned}$$

ただし、 $\mathbf{a}_i = (a_{i,1}, \dots, a_{i,n})$ である． $f(x)$ 、 $F(x)$ をそれぞれ $[0, 1]$ 上の一様分布の密度関数と分布関数とする．

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ x & 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & x \geq 1. \end{cases}$$

ここで、 $\Psi_0: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ を帰納的に定義する．

$$\Psi_0(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{when } \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

次に、 $j = 1, 2, \dots, n$ について漸化式を用いて $\Psi_j: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ を定義する．行列 A の列ベクトルを A_1, \dots, A_n 、 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ とすると、

$$\Psi_j(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{j-1}(\mathbf{x} - sA_j)f(s)ds$$

である．また、 A の1列目から j 列目を取り出した部分行列 $A_{[j]} = (A_1 \dots A_j)$ および、 \mathbf{X} の1, ..., j 番目の要素を取り出した部分ベクトル $\mathbf{X}_{[j]} = (X_1, \dots, X_j)$ を定義する．すると次のことが言える．

命題1 $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ と $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ について、

$$\Psi_j(\mathbf{x}) = \Pr [A_{[j]} \mathbf{X}_{[j]} \leq \mathbf{x}]$$

3. 提案手法について

安藤と来嶋 [2] のアルゴリズムと同様に、次のアルゴリズムで K_m の体積を近似計算することを考える．

提案手法は $\Psi_j(\mathbf{x})$ を $j = 1, \dots, n$ のそれぞれの場合について m 次元の階段近似を行う．この際、近似を行う範囲は $r_{ij} = \sum_{k=1}^j |a_{ik}|$ 、 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$ として、 $-r_{ij} \leq x_i \leq r_{ij}$ ($i = 1, \dots, m$) である．まず $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^m$ の場合 $G_0(\mathbf{x}) = 1$ 、そうでない場合は $G_0(\mathbf{x}) = 0$ とする．次に、簡単のため中間的なシンボルとして $\bar{G}_j(\mathbf{x})$ を考える．

$$\bar{G}_j(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{j-1}(\mathbf{x} - sA_j)f(s)ds,$$

そして、 $G_j(\mathbf{x})$ は $\bar{G}_j(\mathbf{x})$ を m 次元の階段近似したものとする．つまり、 $G_j(\mathbf{x}) = \bar{G}_j(\mathbf{z})$ 、また $\mathbf{z}^\top = (z_1, \dots, z_m)$ 、である．ここで階段の段数を各次元 M とする．そして

$$w_j = \left\lceil \frac{Mx_i}{2r_{ij}} \right\rceil \frac{2r_{ij}}{M}$$

とすると、 $i = 1, \dots, m$ について

$$z_i = \max\{-r_{ij}, \min\{w_j, r_{ij}\}\}$$

である．ここではすべての値を記憶するため、一つの j について、 $G_j(\mathbf{x})$ を格納するのに $O(M^m)$ のスペースを用いる．最後に、 $G_n(\mathbf{b})$ を出力して提案手法は終了する．なお、 M は提案アルゴリズムのパラメータであり、近似保証 $1 + \varepsilon$ を得るために十分な M について後で議論を行う．

以下が提案手法の擬似コードである．

Algorithm1

入力: $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{Z}^n, \mathbf{b} \in \mathbb{Z}^m$.

1. $G_0(\mathbf{x}) := 0$ for $\mathbf{x} \notin \mathbb{R}_{\geq 0}^m$,
 $G_0(\mathbf{x}) := 1$ for $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^m$ とする;
2. For $j = 1, \dots, n$
3. For each $\mathbf{x} \in \{0, \dots, M\}^m$
4. $i = 1, \dots, m$ について $z_i := \frac{2r_{ij}x_i}{M} - r_{ij}$ とする;
5. $G_j(\mathbf{z})$ を計算する．ただし $\mathbf{z}^\top = (z_1, \dots, z_m)$;
6. $G_n(\mathbf{b})$ を出力する．

4. 実行時間解析 (定理1の証明)

最初に、提案アルゴリズムの実行時間は次の観測の通りである．

観測1 提案手法は $O(nM^m)$ 時間で完了する．

以下では、近似比 $1 + \varepsilon$ を実現するのに十分な M の規模について議論を行う．最初に次の補題を示す．

補題1 $\Psi_j(\mathbf{b})$ ($j = 1, \dots, n$) は、 \mathbf{b} のどの成分 b_i ($i = 1, \dots, m$) に関しても単調非減少である．

証明 $\mathbf{b} \leq \mathbf{b}'$ とすると $\Psi_j(\mathbf{b})$ の定義より、

$$\begin{aligned} \Psi_j(\mathbf{b}) &= \text{Vol}(\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^j | A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}) \\ &\leq \text{Vol}(\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^j | A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}'\}) = \Psi_j(\mathbf{b}'). \end{aligned}$$

□

また、次の補題が証明できる．

補題2

$$\Psi_j(\mathbf{b}) \leq G_j(\mathbf{b}) \leq \Psi_j(\mathbf{b} + \mathbf{h}),$$

ただし $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_m) \in \mathbb{R}^m$ で $h_i = \sum_{j=1}^n 2r_{ij}/M$ である．

このため、 $1 \leq G_n(\mathbf{b})/\Psi_n \mathbf{b} \leq \Psi_n(\mathbf{b} + \mathbf{h})/\Psi_n(\mathbf{b})$ であるので、以下では近似比の上界である $\Psi_n(\mathbf{b} + \mathbf{h})/\Psi_n(\mathbf{b})$ を評価する。

以後の解析が [2] の解析と異なる部分である。一つの $1 \leq i^* \leq m$ について $b'_{i^*} = b_{i^*} + h_{i^*}$ ($h_{i^*} \geq 0$) で b_{i^*} を置き換えてできる b'_{i^*} を考える。このとき

$$K'_{i^*} \stackrel{\text{def}}{=} \{ \mathbf{x} \in [0, 1]^n \mid A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}'_{i^*} \}$$

とする。この K'_{i^*} の体積と K_m の体積の比を評価するために、 i^* 番目の制約式でできる K_m の断面を底面とする錐 C を (制約式ごとに) 考える。この時、錐 C のもう一つの頂点 $\mathbf{v} \in K_m$ は $\mathbf{a}_{i^*}^\top \mathbf{v}$ を最小化する点とする。ここで $b_{\min} = \min_{\mathbf{v} \in K_m} \{ \mathbf{a}_{i^*}^\top \mathbf{v} \}$ とし、表記の簡単のために δ_{i^*} を次のように定義する。

$$\delta_{i^*} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{b_{i^*} + h_{i^*} - b_{\min}}{b_{i^*} - b_{\min}} - 1$$

なお、[2] のようにすべての制約式のパラメータが正の場合、 $b_{\min} = 0$ である。ここで δ_{i^*} を用いて次の補題が証明できる。

補題 3 $0 \leq \delta_{i^*} \leq \frac{1}{2^n}$ とすると

$$\frac{\text{Vol}(K'_{i^*})}{\text{Vol}(K_m)} \leq 1 + n\delta_{i^*}$$

である。

証明 まず、次のように i^* 番目の制約式でできる K_m の断面 H_m を次のように定義する。

$$H_{i^*} \stackrel{\text{def}}{=} \{ \mathbf{x} \in K_m \mid \mathbf{a}_{i^*}^\top \mathbf{x} = b_{i^*} \}$$

さて、先に定義した点 \mathbf{v} と H_{i^*} の間に含まれる点でできる錐を考えて、その錐を底面方向に t 倍に拡大したものを $C(t)$ とする。つまり

$$C(t) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \exists \mathbf{y} \in H_{i^*}, \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ s.t.} \\ 0 \leq \lambda \leq t, \lambda(\mathbf{y} - \mathbf{v}) = \mathbf{x} - \mathbf{v} \}$$

である。なお、 $C(1)$ はちょうど \mathbf{v} と H_{i^*} の間にある点でできる錐である。すると凸性より、 $K'_{i^*} \setminus K_m \subset C(1 + \delta_{i^*})$ であるので ($K'_{i^*} \setminus K_m$ と $C(1 + \delta_{i^*})$ の関係を図 1 に示す)、次のようにして補題を証明できる。

$$\begin{aligned} \frac{\text{Vol}(K_m)}{\text{Vol}(K'_{i^*})} &\geq \frac{\text{Vol}(K_m)}{\text{Vol}(K_m) + \text{Vol}(C(1 + \delta_{i^*}) \setminus C(1))} \\ &\geq \frac{\text{Vol}(C(1))}{\text{Vol}(C(1)) + \text{Vol}(C(1 + \delta_{i^*}) \setminus C(1))} \\ &= \frac{\text{Vol}(C(1))}{\text{Vol}(C(1 + \delta_{i^*}))} \\ &= \frac{1}{(1 + \delta_{i^*})^n} \geq (1 - \delta_{i^*})^n \geq 1 - n\delta_{i^*} \end{aligned}$$

ここで $0 \leq \delta_{i^*} \leq \frac{1}{2^n}$ の仮定を用いて

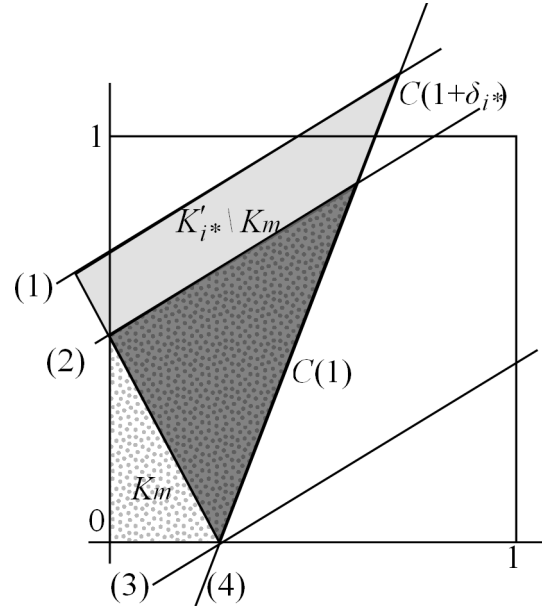


図 1 $K'_{i^*} \setminus K_m$ と $C(1 + \delta_{i^*})$ の関係 図中 (1) は超平面 $\mathbf{a}_{i^*}^\top \mathbf{x} = b_{i^*} + h_{i^*}$, (2) は超平面 $\mathbf{a}_{i^*}^\top \mathbf{x} = b_{i^*}$, (3) は超平面 $\mathbf{a}_{i^*}^\top \mathbf{x} = b_{\min}$, (4) は別の制約式による超平面である。

$$\frac{\text{Vol}(K'_{i^*})}{\text{Vol}(K_m)} \leq \frac{1}{1 - n\delta_{i^*}} \leq 1 + n\delta_{i^*}$$

□

以上より、次の補題が示せる。

補題 4 $\delta = \max_{i=1, \dots, m} \{ \delta_i \}$ とすると、 $0 \leq \delta \leq \frac{1}{2^n}$ ならば

$$\frac{\Psi_n(\mathbf{b} + \mathbf{h})}{\Psi_n(\mathbf{b})} \leq 1 + mn\delta$$

である。

証明 補題 3 を次元一つずつについて適用する。 $i = 1, \dots, m$ について $\mathbf{h}^{(i)} = (h_1, \dots, h_i, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m$, ($\mathbf{h}^{(0)} = \mathbf{0}$) とすると、

$$\begin{aligned} \frac{\Psi_n(\mathbf{b} + \mathbf{h})}{\Psi_n(\mathbf{b})} - 1 &= \sum_{i=1}^m \left(\frac{\Psi_n(\mathbf{b} + \mathbf{h}^{(i)})}{\Psi_n(\mathbf{b} + \mathbf{h}^{(i-1)})} - 1 \right) \\ &\leq mn\delta \end{aligned}$$

である。

□

残る議論は近似比を $1 + \varepsilon$ 以下に抑えるように M を決めることである。次の補題を示す。

補題 5 $M \geq \frac{2mn^3 a_{\max}}{\varepsilon(b_{i^*} - b_{\min})}$ であれば $G_n(\mathbf{b})/\Psi_n(\mathbf{b}) \leq 1 + \varepsilon$ である。ただし、 a_{\max} は A の成分の絶対値のうち最大のものであり、 i^* 番目の制約式が δ_{i^*} 最大であるとする。

証明 補題 4 より

$$\frac{G_n(\mathbf{b})}{\Psi_n(\mathbf{b})} \leq 1 + mn\delta \leq 1 + \varepsilon$$

になる M を求める。つまり、 δ_{i^*} の定義より、

$$\delta_{i^*} = \frac{b_{i^*} + h_{i^*} - b_{\min}}{b_{i^*} - b_{\min}} - 1 \leq \frac{\varepsilon}{mn}$$

であればよい。(補題4の仮定 $\delta_{i^*} \leq 1/(2n)$ は $m \geq 2$ で常に成り立つ。) ここで, $h_{i^*} \leq \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^k 2|a_{i\ell}|/M \leq 2n^2 a_{\max}/M$ より

$$M \geq \frac{2mn^3 a_{\max}}{\varepsilon(b_{i^*} - b_{\min})}$$

を得る. □

以上により, K_m の厚さを $\beta \stackrel{\text{def}}{=} b_{i^*} - b_{\min}$ と定義すると提案アルゴリズムの実行時間 $O\left(n \left(\frac{2mn^3 a_{\max}}{\beta \varepsilon}\right)^m\right)$ を得る. m と a_{\max}/β が定数であればこの式は n と $1/\varepsilon$ の多項式であるため, 定理1が示された.

5. まとめと今後の課題

本稿では複数制約式を持つナップサック多面体のうち, 必ずしも正とは限らないパラメータを持つ制約式を含む場合について, その体積を近似計算する手法について考察を行った. 今回の解析では制約式の係数の絶対値の最大値 a_{\max} および, 厚さ $\beta = b_{i^*} - b_{\min}$ の値の比がアルゴリズムの実行時間に影響する. a_{\max} が大きいと畳み込み積分を近似する空間が大きくなるために, 長い計算時間を必要とする. また, β が小さい場合とは, 対象のナップサック多面体が薄い領域内に収まっている場合であるので, 階段近似によって厚みが増えると近似比が大きくなる.

今後の課題として, a_{\max}/β が定数である場合に制約式が n の多項式に比例する程度に多く含まれる場合について, 同様の近似アルゴリズムが設計可能かどうか調べたい.

謝辞 本研究は文部科学省 科学研究費補助金 新学術領域研究「多面的アプローチの統合による計算限界の解明」(No. 24106008, 24106005) の助成を受けたものです.

参考文献

[1] E. Ando and S. Kijima, An FPTAS for The Volume Computation of 0-1 Knapsack Polytopes Based on Approximate Convolution Integral, *Proc. of ISAAC 2014*, pp.376–386, 2014.

[2] 安藤映, 来嶋秀治, 複数制約式をもつ 0–1 ナップサック多面体の体積に対する FPTAS, 第 152 回アルゴリズム研究会発表, 6, 2015 年 3 月 3 日.

[3] A. Bandyopadhyay and D. Gamarnik, Counting without sampling: asymptotics of the log-partition function for certain statistical physics models, *Random Structures and Algorithms*, 33, 452–479, 2008.

[4] I. Bárány, Z. Füredi, computing the volume is difficult, *Discrete Computational Geometry*, 2, 319–326, 1987.

[5] M. Bayati, D. Gamarnik, D. Katz, C. Nair, P. Tetali, Simple deterministic approximation algorithms for counting matchings, *Proc. of STOC 2007*, 122–127, 2007.

[6] B. Cousins and S. Vempala, Bypassing KLS: Gaussian Cooling and an $O^*(n^3)$ Volume Algorithm, *Proceedings of STOC 2015*, 539–548, 2015.

[7] M. Dyer, Approximate counting by dynamic programming, *Proc. of STOC 2003*, 693–699, 2003.

[8] M. Dyer and A. Frieze, On the complexity of computing the volume of a polyhedron, *SIAM Journal on Computing*, 17(5), 967–974, 1988.

[9] M. Dyer, A. Frieze, R. Kannan, A random polynomial-time algorithm for approximating the volume of convex bodies, *Journal of the Association for Computing Machinery*, 38(1), 1–17, 1991.

[10] G. Elekes, A geometric inequality and the complexity of computing volume, *Discrete Computational Geometry*, 1, 289–292, 1986.

[11] D. Gamarnik, D. Katz, Correlation decay and deterministic FPTAS for counting list-colorings of a graph, *Proc. of SODA 2007*, 1245–1254, 2007.

[12] P. Gopalan, A. Klivans, and R. Meka, Polynomial-time approximation schemes for knapsack and related counting problems using branching programs, arXiv:1008.3187v1, 2010.

[13] P. Gopalan, A. Klivans, R. Meka, D. Štefankovič, S. Vempala, E. Vigoda, An FPTAS for #knapsack and related counting problems, *Proc. of FOCS 2011*, 817–826, 2011.

[14] L. Li, P. Lu, Y. Yin, Approximate counting via correlation decay in spin systems, *Proc. of SODA 2012*, 922–940, 2012.

[15] L. Li, P. Lu, Y. Yin, Correlation decay up to uniqueness in spin systems, *Proc. of SODA 2013*, 67–84, 2013.

[16] J. Li, T. Shi, A fully polynomial-time approximation scheme for approximating a sum of random variables, *Operations Research Letters*, 42, 197–202, 2014.

[17] C. Lin, J. Liu, P. Lu, A simple FPTAS for counting edge covers, *Proc. of SODA 2014*, 341–348, 2014.

[18] L. Lovász, *An Algorithmic Theory of Numbers, Graphs and Convexity*, SIAM Society for industrial and applied mathematics, Philadelphia, 1986.

[19] L. Lovász, S. Vempala, Simulated annealing in convex bodies and an $O^*(n^4)$ volume algorithm, *Journal of Computer and System Sciences*, 72, 392–417, 2006.

[20] D. Štefankovič, S. Vempala, E. Vigoda, A deterministic polynomial-time approximation scheme for counting knapsack solutions, *SIAM Journal on Computing*, 41(2), 356–366, 2012.

[21] D. Weitz, Counting independent sets up to the tree threshold, *Proc. STOC 2006*, 140–149, 2006.