

## ホモジニアスなリアルタイム通信システムの 上限付き平均応答時間とトラヒック

海老原 義彦<sup>†</sup> 張 興 周<sup>†</sup>

ホモジニアスなリアルタイム通信システム環境で、階層型プロトコル構成の多対多通信システムにおける通信システムの最大容量を解析的に求めた。すなわち、リアルタイム通信処理を満たす平均応答時間の上限値が与えられたときの最大トラヒック量と上限平均応答時間の関係性をプロトコル階層4まで求めている。さらに、各ノード間で流入トラヒックにアンバランスがあった場合、上限平均応答時間に与える影響についても述べている。

### Constrained Mean Response Time and Traffic in Real-time Communication Systems with a Homogeneous Environment

YOSHIHIKO EBIHARA<sup>†</sup> and XING ZHOU ZHANG<sup>†</sup>

The maximum traffic capacity of multi-points communication has been studied in the condition of a homogeneous environment of real-time communication systems with hierarchical protocol structure. When the upper limit of a mean response time is given, the relationship between the maximum input traffic and a constrained mean response time of the corresponding protocol layers has derived up to layer 4 in the proposed model. Furthermore, the effects of imbalanced input traffic on a constrained mean response time are also investigated.

#### 1. ま え が き

音声や画像などのマルチメディアを扱うリアルタイム通信環境では、エンド・トゥ・エンドの応答時間の評価が重要となる<sup>1)</sup>。特に、通信システムに流入するトラヒックが極端に増加すると、応答時間が劣化し、リアルタイム通信処理が困難になる場合がある<sup>2)</sup>。このような場合、一つの方法として、リアルタイム通信処理が行えるように、流入トラヒック量を抑えて、応答時間の上限を保証してやる必要がある。ここでは、応答時間の上限値を上限平均応答時間と呼ぶ。

リアルタイム通信処理の環境で、通信システムに流入するトラヒックを制限し、上限平均応答時間以下に満たすには、どの程度まで流入トラヒックを許したらよいか重要なシステムパラメータの一つとなる。すなわち、物理的通信システムの最大容量でなく、平均応答時間を上限値以下に保つという制約条件がある場合の通信システムの最大容量を求める問題となる。

ここでは、同機種からなるホモジニアスな通信ノードからなり、階層型プロトコル構成の多対多通信システムを対象とする。先の論文<sup>3)</sup>で得られた平均応答時間をもとに、平均応答時間の上限値が与えられた時の通信システムの最大容量を求めた。また、最大トラヒック量と平均応答時間の関係をプロトコル階層4まで解析的に求めた。

以下、2章では、通信システムのモデル化と諸定義を述べる。3章では、最大通信システム容量について算出する。4章で、得られた結果について考察・評価する。

#### 2. 通信システムのモデル化と諸定義

対象とする通信システムは  $M$  個の同機種ホストからなるホモジニアスなシステム構成とする。また、通信システムは  $L$  階層のモジュール構成からなり、メッセージの待ち行列はモジュールごとに行けるものとする (図1参照)。

先の論文では、 $M/M/1$  待ち行列をもとに、階層型プロトコルをもつ通信システムにおける多対多通信の平均応答時間を求めた。その解析結果を式(1)に示す。さらに、 $M=2$  や  $M=3$  の場合の実システムの測

<sup>†</sup> 筑波大学 電子・情報工学系  
University of Tsukuba, Information Sciences and  
Electronics

定値<sup>3),4)</sup>との比較により、近似的ではあるが、解析結果の平均応答時間が合うことを示した。ここでは、一般の  $M$  に対して式(1)が成り立つものと仮定して、議論を進める。

式(1)に使用されているパラメータについて説明する。

$T$ : 1個のトランザクションが通信システムを往復する系全体の平均通過時間を平均応答時間とする。

$T_{ij}$ : ノード  $i$  からノード  $j$  をアクセスするトランザクションの平均応答時間。

$\lambda_{ij}$ : ノード  $i$  からノード  $j$  をアクセスするトランザクションの平均到着率 (図2参照)。

$n_k$ : 1回のトランザクションに対して、第  $k$  階層モジュールで生成される送受信制御メッセージ数。

$t_r$ : ノードの第  $r$  階層モジュールの平均メッセージ処理時間。

算出方法の詳細は先の論文に譲ることとする。結論として、 $T$  は次式となる。

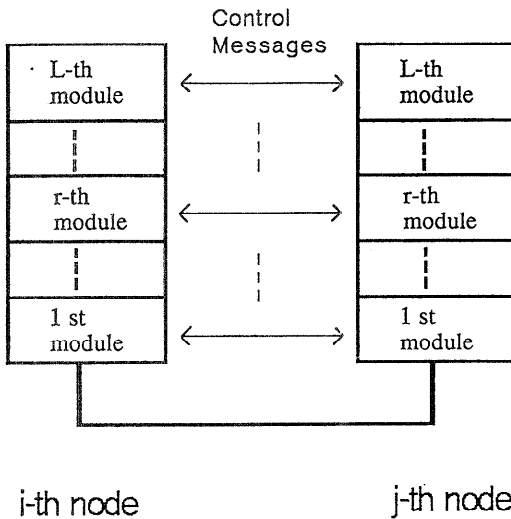


図1 通信システム構成  
Fig. 1 Structure of a communication system.

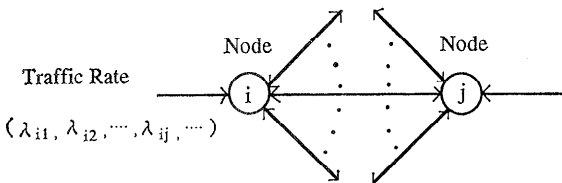


図2 通信システムの基本構成  
Fig. 2 Basic model of a communication system.

$$T = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \lambda_{ij} T_{ij} / \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \lambda_{ij} \quad (1)$$

ただし、 $T_{ij}$  は次式で表される。

$$T_{ij} = 2 \sum_{r=1}^L \sum_{k=1}^L n_{ktr} \cdot \left[ \frac{1}{1 - \sum_{k=r}^L n_{ktr} \left( \sum_{j=1}^M \lambda_{ji} + \sum_{j=1}^M \lambda_{ij} \right)} + \frac{1}{1 - \sum_{k=r}^L n_{ktr} \left( \sum_{i=1}^M \lambda_{ji} + \sum_{i=1}^M \lambda_{ij} \right)} \right] \quad (2)$$

また、 $M \geq 2$ ,  $\lambda_{ii} = 0$  とする。

### 3. 最大通信システム容量

通信システム全体の平均応答時間の上限値  $t$  が与えられたとき、この条件を満たす入力トラヒックの関係を求める。具体的には、通信システムに流入するトラヒック量をトラヒック率で表し、総トラヒック率が最大になる条件を求める。

まず、式(2)の  $n_{ktr}$  を次式の  $a_r$  で置き換える。

$$\sum_{k=r}^L n_{ktr} = a_r \quad (3)$$

$a_r$  は第  $r$  層の取り扱う総メッセージを処理するモジュール処理時間である。まとめると次のようになる。

$$T_{ij} = 2 \sum_{r=1}^L \left[ \frac{a_r}{1 - a_r \left( \sum_{j=1}^M \lambda_{ji} + \sum_{j=1}^M \lambda_{ij} \right)} + \frac{a_r}{1 - a_r \left( \sum_{i=1}^M \lambda_{ji} + \sum_{i=1}^M \lambda_{ij} \right)} \right] \quad (4)$$

これを(1)式に代入して、整理すると次式になる。

$$T = 2 \sum_{r=1}^L \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \left[ \frac{a_r \lambda_{ij}}{1 - a_r \left( \sum_{j=1}^M \lambda_{ji} + \sum_{j=1}^M \lambda_{ij} \right)} + \frac{a_r \lambda_{ij}}{1 - a_r \left( \sum_{i=1}^M \lambda_{ji} + \sum_{i=1}^M \lambda_{ij} \right)} \right] \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \lambda_{ij} \quad (5)$$

[ ]内の分母に  $\left( \sum_{j=1}^M \lambda_{ji} + \sum_{j=1}^M \lambda_{ij} \right)$  を共有する項同士をまとめると、(5)式は次式となる。

$$T = 2 \sum_{r=1}^L \sum_{i=1}^M \left[ \frac{a_r \left( \sum_{j=1}^M \lambda_{ji} + \sum_{j=1}^M \lambda_{ij} \right)}{1 - a_r \left( \sum_{j=1}^M \lambda_{ji} + \sum_{j=1}^M \lambda_{ij} \right)} \right] \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \lambda_{ij} \quad (6)$$

$\lambda_i$  をノード  $i$  の流入・流出するトラヒックとすると、以下のそれぞれは、

$$\left(\sum_{j=1}^M \lambda_{ji} + \sum_{j=1}^M \lambda_{ij}\right) = \lambda_i, \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \lambda_{ij} = 2 \sum_{i=1}^M \lambda_i$$

となるので、式(1)は次のように表せる。

$$T = 1 \left/ \sum_{i=1}^M \lambda_i \cdot \sum_{r=1}^L \sum_{i=1}^M a_r \lambda_i / (1 - a_r \lambda_i) \right. \quad (8)$$

ただし、 $a_{\max} = \max(a_1, a_2, \dots, a_L)$  とすると、式(8)が成立する  $\lambda_i$  の範囲は、 $0 < \lambda_i < 1/a_{\max}$  である。

$$(9)$$

次に Lagrange の方法により、平均応答時間が上限値  $t (T \leq t)$  を満たす条件のもとで、流入トラヒック量、

$$\bar{\lambda} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \lambda_{ij} = 2 \sum_{i=1}^M \lambda_i \quad (10)$$

が最大となる  $\bar{\lambda}$  と  $t$  の関係式を求める。 $\bar{\lambda}$  は  $\lambda_i$  に対して、単調増加関数である。

ここで、

$$t = T,$$

$$F = 2 \sum_{i=1}^M \lambda_i + \rho \left\{ t - \left( 1 / \sum_{i=1}^M \lambda_i \right) \cdot \sum_{r=1}^L \sum_{i=1}^M a_r \lambda_i / (1 - a_r \lambda_i) \right\} \quad (11)$$

とおく。ただし、 $\rho$  は未定係数である。 $\rho$  および  $\lambda_i$  に関して偏微分をする ( $\delta F / \delta \lambda_i$  の計算は付録参照)。

$\delta F / \delta \rho = 0$  より、

$$t = 1 / \sum_{i=1}^M \lambda_i \cdot \sum_{r=1}^L \sum_{i=1}^M a_r \lambda_i / (1 - a_r \lambda_i) \quad (12)$$

$$\delta F / \delta \lambda_i = 2 + \rho t - \left( \rho / \sum_{i=1}^M \lambda_i \right) \cdot \sum_{r=1}^L a_r / (1 - a_r \lambda_i)^2$$

$\delta F / \delta \lambda_i = 0$  より、

$$\sum_{r=1}^L a_r / (1 - a_r \lambda_i)^2 = (2 + \rho t) \left( \sum_{i=1}^M \lambda_i \right) / \rho \quad (13)$$

上式に  $i \neq j$  なる  $j$  を選び、 $\lambda_i$  の代わりに  $\lambda_j$  を代入する。代入した式で(13)式を割る。

$$\left\{ \sum_{r=1}^L a_r / (1 - a_r \lambda_i)^2 \right\} / \left\{ \sum_{r=1}^L a_r / (1 - a_r \lambda_j)^2 \right\} = 1 \quad (14)$$

すべての  $i, j$  に対して、

$$\lambda_i = \lambda_j \quad (15)$$

が成り立つ。ここで、 $\lambda_i = \lambda_j = \lambda$  とおくと、式(8)は次式となる。

$$T = \sum_{r=1}^L a_r / (1 - a_r \lambda) \quad (16)$$

次に与えられた  $t$  に対して、式(16)を満たす  $\lambda$  を求める。 $x = \lambda$  とおく。

$$t = \sum_{r=1}^L a_r / (1 - a_r x) \quad (17)$$

ただし、式(9)の条件から  $0 < x < 1/a_{\max}$ 、また、

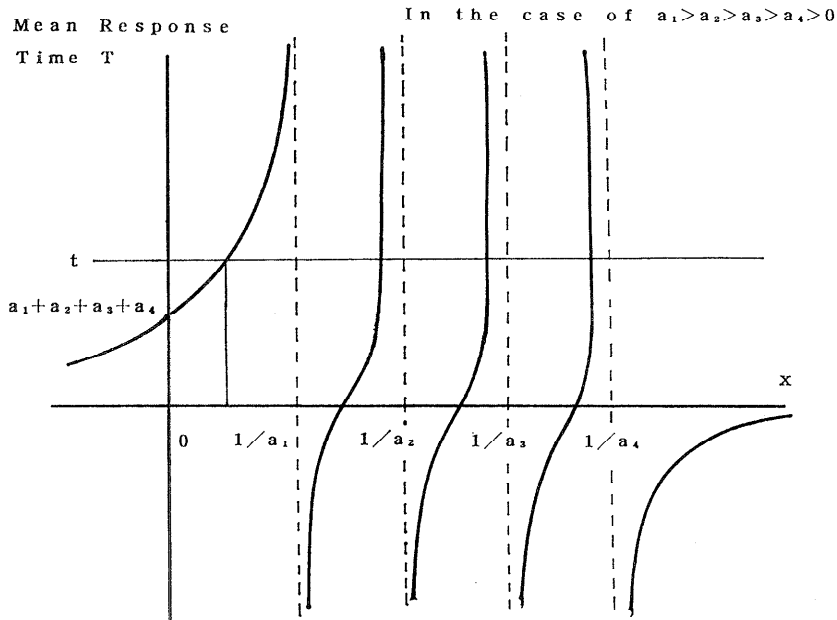


図3 4次方程式の概略グラフ  
Fig. 3 Graph of a biquadratic equation.

$$x > 0 \text{ より, } t > \sum_{r=1}^L a_r \quad (18)$$

次に, (17)式から  $t$  が与えられたときの  $x$  を求める. 図 3 は  $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$  で  $L=4$  の場合の式 (17) のグラフを示している. 与えられた  $t$  に対して, グラフから四つの正の実数根を持つことがわかる. また,  $a_1, a_2, a_3, a_4$  の大小関係を入れ替えても同様なことが言える. このことから求める根の算出過程では, 以下の前提のもとに議論を進める.

前提①グラフより  $x$  の  $L$  ( $L=1\sim 4$ ) 次方程式 (17) は与えられた  $t$  に対して,  $L$  個の正の実数根を持つ.

したがって, 式 (17) の成立する  $x$  の範囲は,  $0 < x < 1/a_{\max}$  であるので,  $L$  個の正の実数根のうち, 最小の根を求めればよい.

まず,  $L=1$  の場合, 式 (17) を満たす  $x$  は次の 1 次式の解である. ただし,  $a_r t \neq 0$ .

$$a_1 t x - (t - a_1) = 0 \quad (19)$$

ゆえに,

$$x = 1/a_1 - 1/t \quad (20)$$

$L=2$  の場合,

$$a_1 a_2 t x^2 + (2a_1 a_2 - a_1 t - a_2 t) x + t - a_1 - a_2 = 0 \quad (21)$$

ここで,

$$a = (2a_1 a_2 - a_1 t - a_2 t) / a_1 a_2 t,$$

$$b = (t - a_1 - a_2) / a_1 a_2 t$$

とおくと, 次のように変形できる. ただし,  $a_1 a_2 t \neq 0$ .

$$x^2 + ax + b = 0 \quad (22)$$

小さいほうの求める解として, 次のような  $x$  が得られる.

$$x = \{-a - (a^2 - 4b)^{1/2}\} / 2 \quad (23)$$

$L=3$  の場合,

$$a_1 a_2 a_3 t x^3 + \{3a_1 a_2 a_3 - (a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1) t\} x^2 + \{(a_1 + a_2 + a_3) t - 2(a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1)\} x + (a_1 + a_2 + a_3) - t = 0 \quad (24)$$

ここで,

$$a = \left\{ 6 \prod_{r=1}^3 a_r - \left( \sum_{r=1}^3 a_r \right)^2 + t \sum_{r=1}^3 a_r^2 \right\} / 2t \prod_{r=1}^3 a_r,$$

$$b = \left\{ t \sum_{r=1}^3 a_r - \left( \sum_{r=1}^3 a_r \right)^2 + \sum_{r=1}^3 a_r^2 \right\} / t \prod_{r=1}^3 a_r,$$

$$c = \left( \sum_{r=1}^3 a_r - t \right) / t \prod_{r=1}^3 a_r, \text{ ただし, } t \prod_{i=1}^3 a_r \neq 0$$

とおき, 書き直すと次式になる.

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \quad (25)$$

Cardano の方法により,  $\delta = x + a/3$  とおくと, 式

(25) は次の  $\delta$  の方程式に書き換えられる.

$$\delta^3 - 3p\delta - q = 0 \quad (26)$$

ただし,  $p, q$  は,

$$p = a^2/9 - b/3,$$

$$q = -2a^3/27 + ab/3 - c$$

である. いま  $\omega$  を 1 の原始 3 乗根とすれば,

$$(y - y_1 - y_2)(y - \omega y_1 - \omega^2 y_2)(y - \omega^2 y_1 - \omega y_2) = y^3 - 3y_1 y_2 y - (y_1^3 + y_2^3)$$

が成り立つ. ここで,

$$y_1 y_2 = p, y_1^3 + y_2^3 = q \quad (27)$$

とおくと, 上式は式 (26) になる. 式 (26) の 3 根  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  とすると, 式 (27) から  $y_1, y_2$  を一組求めれば,  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  は,

$$\delta_1 = y_1 + y_2, \delta_2 = \omega y_1 + \omega^2 y_2, \delta_3 = \omega^2 y_1 + \omega y_2 \quad (28)$$

となる. これから  $a/3$  を引いて式 (25) の 3 根が求まる. 式 (27) から  $y_1, y_2$  を求めるには,  $y_1^3, y_2^3$  を 2 根とする  $\tau$  の 2 次方程式

$$\tau^2 - q\tau + p^3 = 0 \quad (29)$$

の根を求めればよい. その 2 根をあらためて  $\alpha, \beta$  とする. 付録 2 から判別式  $D_2 = q^2 - 4p^3 < 0$  であるので,

$$\alpha = \{q + \iota(-q^2 + 4p^3)^{1/2}\} / 2,$$

$$\beta = \{q - \iota(-q^2 + 4p^3)^{1/2}\} / 2$$

と表せる. ただし,  $\iota$  は虚数である. さらに変形して,

$$\alpha = A(\cos \theta + \iota \sin \theta),$$

$$\beta = A(\cos \theta - \iota \sin \theta) \quad (30)$$

とおける. ただし,  $A \cos \theta = q/2, A \sin \theta = (-q^2 + 4p^3)^{1/2}/2$ .

また,  $\cos \theta^2 + \sin \theta^2 = 1$  より,  $A = p^{3/2}$ , ただし,  $D_2 = q^2 - 4p^3 < 0$  より,  $0 \leq q^2 < 4p^3$  であるので,  $p > 0$  である.

よって,  $y_1, y_2$  は,

$$y_1 = \alpha^{1/3} = p^{1/2} \{\cos(\theta/3) + \iota \sin(\theta/3)\},$$

$$y_2 = p/y_1 = \beta^{1/3} = p^{1/2} \{\cos(\theta/3) - \iota \sin(\theta/3)\} \quad (31)$$

となる.  $y_1, y_2$  を式 (28) に代入して, 計算すると,

$$\delta_1 = y_1 + y_2 = 2p^{1/2} \cos(\theta/3),$$

$$\delta_2 = \omega y_1 + \omega^2 y_2 = 2p^{1/2} \cos\{(\theta + 2\pi)/3\},$$

$$\delta_3 = \omega^2 y_1 + \omega y_2 = 2p^{1/2} \cos\{(\theta + 4\pi)/3\} \quad (32)$$

になる. ここで,  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  を次のように定める.

$$\sigma_1 = \cos(\theta/3),$$

$$\sigma_2 = \cos\{(\theta + 2\pi)/3\},$$

$$\sigma_3 = \cos\{(\theta + 4\pi)/3\}$$

付録 3 より,  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  間の大小関係は  $\sigma_1 > \sigma_3 > \sigma_2$  である. この関係から,  $\delta_1 > \delta_3 > \delta_2$  が導かれる.

ゆえに, 求める最も小さい解として, 次のような  $x$

が得られる.

$$x = 2p^{1/2} \cos \{(\theta + 2\pi)/3\} - a/3 \tag{33}$$

$L=4$  の場合

$$\begin{aligned} & a_1 a_2 a_3 a_4 t x^4 + \{4 a_1 a_2 a_3 a_4 - (a_1 a_2 a_3 + a_1 a_2 a_4 \\ & + a_1 a_3 a_4 + a_2 a_3 a_4) t\} x^3 + \{(a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_1 a_4 \\ & + a_2 a_3 + a_2 a_4 + a_3 a_4) t - 3(a_1 a_2 a_3 + a_1 a_2 a_4 \\ & + a_1 a_3 a_4 + a_2 a_3 a_4)\} x^2 + \{2(a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_1 a_4 \\ & + a_2 a_3 + a_2 a_4 + a_3 a_4) - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) t\} x \\ & + t - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = 0 \end{aligned} \tag{34}$$

ここで,  $e, f, g$  と  $h$  を次のようにすると,

$$\begin{aligned} e &= 4/t - \left\{ \left( \sum_{r=1}^4 a_r \right)^3 + 2 \sum_{r=1}^4 a_r^3 \right. \\ & \quad \left. - 3 \sum_{r=1}^4 a_r \sum_{r=1}^4 a_r^2 \right\} / 6 \prod_{r=1}^4 a_r, \\ f &= \left\{ \left( \sum_{r=1}^4 a_r \right)^2 - \sum_{r=1}^4 a_r^2 \right\} / 2 \prod_{r=1}^4 a_r \\ & \quad - \left\{ \left( \sum_{r=1}^4 a_r \right)^3 + 2 \sum_{r=1}^4 a_r^3 - 3 \sum_{r=1}^4 a_r \sum_{r=1}^4 a_r^2 \right\} / \\ & \quad 2t \prod_{r=1}^4 a_r, \\ g &= \left\{ \left( \sum_{r=1}^4 a_r \right)^2 - \sum_{r=1}^4 a_r^2 \right\} / t \prod_{r=1}^4 a_r \\ & \quad - \sum_{r=1}^4 a_r / \prod_{r=1}^4 a_r, \\ h &= 1 / \prod_{r=1}^4 a_r - \sum_{r=1}^4 a_r / t \prod_{r=1}^4 a_r, \text{ ただし,} \\ & \quad t \prod_{r=1}^4 a_r \neq 0 \end{aligned}$$

次式に書き換えられる.

$$x^4 + ex^3 + fx^2 + gx + h = 0 \tag{35}$$

いま,

$$y = x + e/4$$

とおくと, 次の  $y$  の方程式に書き改められる.

$$y^4 - sy^2 - vy - u = 0 \tag{36}$$

ここに,

$$s = 3e^2/8 - f, \quad v = -e^3/8 + ef/2 - g,$$

$$u = 3e^4/256 - e^2f/16 + eg/4 - h$$

ここで,  $2y = \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3$  とおき, 式(36)の補助方程式(37)を求める (付録4参照). このとき,  $\zeta_1^2, \zeta_2^2, \zeta_3^2$  は次の3次方程式の根となる.

$$z^3 - 2sz^2 + (s^2 + 4u)z - v^2 = 0 \tag{37}$$

いま,  $y_1, y_2, y_3, y_4$  を式(36)の根とすると,  $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$  との間に, 文献5または付録5より次の関係が成り立つ.

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= y_1 + y_2, \\ \zeta_2 &= y_1 + y_3, \\ \zeta_3 &= y_1 + y_4 \end{aligned} \tag{38}$$

前提①から式(35)は四つの実数根をもつので,  $y = x + e/4$  の関係から,  $y_1, y_2, y_3, y_4$  も実数となる. したがって,  $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$  も実数となる.

$$a = -2s, \quad b = s^2 + u, \quad e = -v^2$$

とおくと, 式(37)は次式のように書き改められる.

$$z^3 + az^2 + bz + c = 0 \tag{39}$$

この式の根をあらためて  $z_1, z_2, z_3$  とする. かつ, 次の関係にあるものとする.

$$z_1 = \zeta_1^2, \quad z_2 = \zeta_2^2, \quad z_3 = \zeta_3^2 \tag{40}$$

このとき,  $z_1, z_2, z_3$  は,

$$z_1 \geq 0, \quad z_2 \geq 0, \quad z_3 \geq 0 \tag{41}$$

となる.  $\delta = z + a/3$  とおくと, 式(34)は次式となる.

$$\delta^3 - 3p\delta - q = 0 \tag{42}$$

ただし,

$$\begin{aligned} p &= a^2/9 - b/3, \\ q &= -2a^3/27 + ab/3 - c \end{aligned} \tag{43}$$

式(42)の根を  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  とすると, 式(42)の判別式  $D_3$  は  $D_3 > 0$  ( $q^2 - 4p^3 < 0$ ) (付録6参照) であるので,  $L=3$  の場合で求めた同様の方法で, 次式が得られる<sup>6)</sup>.

$$\begin{aligned} \delta_1 &= 2p^{1/2} \cos(\theta/3), \\ \delta_2 &= 2p^{1/2} \cos \{(\theta + 2\pi)/3\}, \\ \delta_3 &= 2p^{1/2} \cos \{(\theta + 4\pi)/3\} \end{aligned} \tag{44}$$

ただし,  $\theta = \cos^{-1}(q/2p^{3/2}), q^2 - 4p^3 < 0$  より  $0 \leq q^2 < 4p^3$  であるので,  $p > 0$  である. ゆえに, 式(31)の3根は次式となる.

$$\begin{aligned} z_1 &= \zeta_1^2 = 2p^{1/2} \cos(\theta/3) - a/3, \\ z_2 &= \zeta_2^2 = 2p^{1/2} \cos \{(\theta + 2\pi)/3\} - a/3, \\ z_3 &= \zeta_3^2 = 2p^{1/2} \cos \{(\theta + 4\pi)/3\} - a/3 \end{aligned} \tag{45}$$

ここで,  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  を次のように定める.

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \cos(\theta/3), \\ \sigma_2 &= \cos \{(\theta + 2\pi)/3\}, \\ \sigma_3 &= \cos \{(\theta + 4\pi)/3\} \end{aligned}$$

付録3より,  $\sigma_1, \sigma_3, \sigma_2$  の大小関係は  $\sigma_1 > \sigma_3 > \sigma_2$  となる. また, 式(41)と式(45)の関係から,  $z_1 > z_3 > z_2 \geq 0$  である. さらに, 式(40)から,  $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$  は次式で表される.

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \pm z_1^{1/2}, \\ \zeta_2 &= \pm z_2^{1/2}, \\ \zeta_3 &= \pm z_3^{1/2} \end{aligned} \tag{46}$$

式(46)の平方根の符号は  $\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 = v$  によって定まる.

以下,  $\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 > 0$  と  $\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \leq 0$  の二つの場合分けをして ( $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ ) の組み合わせを求める.

$\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 > 0$  の場合は, これを満たす組み合わせは次の四つである.

$$(z_1^{1/2}, z_2^{1/2}, z_3^{1/2}),$$

$$\begin{aligned} &(z_1^{1/2}, -z_2^{1/2}, -z_3^{1/2}), \\ &(-z_1^{1/2}, z_2^{1/2}, -z_3^{1/2}), \\ &(-z_1^{1/2}, -z_2^{1/2}, z_3^{1/2}) \end{aligned} \quad (47)$$

ところで、 $y$  は、

$$2y = \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3$$

であるので、式(47)を代入すると、次の  $y_1, y_2, y_3, y_4$  の4根が得られる。すなわち、

$$\begin{aligned} y_1 &= (z_1^{1/2} + z_2^{1/2} + z_3^{1/2})/2, \\ y_2 &= (z_1^{1/2} - z_2^{1/2} - z_3^{1/2})/2, \\ y_3 &= (-z_1^{1/2} + z_2^{1/2} - z_3^{1/2})/2, \\ y_4 &= (-z_1^{1/2} - z_2^{1/2} + z_3^{1/2})/2 \end{aligned} \quad (48)$$

これら4根のうち、 $y_1$ は明らかに他より大きい。残りの3根間の大小関係を比較する。それぞれの差をとると、

$$\begin{aligned} y_3 - y_4 &= z_1^{1/2} - z_3^{1/2}, \\ y_3 - y_2 &= z_2^{1/2} - z_1^{1/2} \end{aligned}$$

となる。 $z_1 > z_3 > z_2 \geq 0$  の関係から、四つの根のうち、最小の根  $y$  は  $y_3$  となる。したがって、

$$y = (-z_1^{1/2} + z_2^{1/2} - z_3^{1/2})/2$$

である。 $y = x + e/4$  から、求める  $x$  は次式となる。

$$x = (-z_1^{1/2} + z_2^{1/2} - z_3^{1/2})/2 - e/4 \quad (49)$$

$\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \leq 0$  の場合は、これを満たす組み合わせは次の四つである。

$$\begin{aligned} &(-z_1^{1/2}, -z_2^{1/2}, -z_3^{1/2}), \\ &(-z_1^{1/2}, z_2^{1/2}, z_3^{1/2}), \\ &(z_1^{1/2}, -z_2^{1/2}, z_3^{1/2}), \\ &(z_1^{1/2}, z_2^{1/2}, -z_3^{1/2}) \end{aligned} \quad (50)$$

$y$  は、

$$2y = \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3$$

であるので、式(50)を代入すると、次の  $y_1, y_2, y_3, y_4$  の4根が得られる。すなわち、

$$\begin{aligned} y_1 &= (-z_1^{1/2} - z_2^{1/2} - z_3^{1/2})/2, \\ y_2 &= (-z_1^{1/2} + z_2^{1/2} + z_3^{1/2})/2, \\ y_3 &= (z_1^{1/2} - z_2^{1/2} + z_3^{1/2})/2, \\ y_4 &= (z_1^{1/2} + z_2^{1/2} - z_3^{1/2})/2 \end{aligned} \quad (51)$$

$z_1 > z_3 > z_2 \geq 0$  の関係から、四つの根のうち、最小の根  $y$  は  $y_1$  となる。したがって、

$$y = (-z_1^{1/2} - z_2^{1/2} - z_3^{1/2})/2$$

である。 $y = x + e/4$  から、求まる  $x$  は次式となる。

$$x = (-z_1^{1/2} - z_2^{1/2} - z_3^{1/2})/2 - e/4 \quad (52)$$

#### 4. 制限付き応答時間の数値例

プロトコル階層数  $L$ 、各層のモジュール処理時間  $a_i$  と平均応答時間の上限  $t$  が与えられたときの流入トラヒック  $\lambda$  との関係式を示した。応答時間と流入トラヒックの関係を示す数値例として、プロトコル階層数3と4の場合について示す。図4はプロトコル階層数3の場合で、式(33)より算出したグラフである。図5はプロトコル階層数4の場合を示した。なお、グラフに示した各  $(a_1, a_2, a_3, a_4)$  の値を使って算出した  $v (= \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3)$  の値は正なので、式(49)を使用している。グラフの一般的傾向として、平均応答時間の上限値の増加に伴い、流入トラヒック  $\lambda$  は飽和してゆく。飽和状態では、少しの流入トラヒックの増減で大きく応答時間が変化することを意味する。

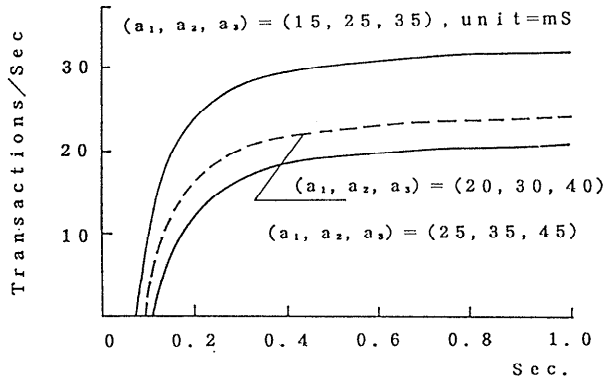


図4  $L=3$  の上限付き平均応答時間と入力トラヒック  
Fig. 4 Constrained mean response time and traffic in the case of  $L=3$ .

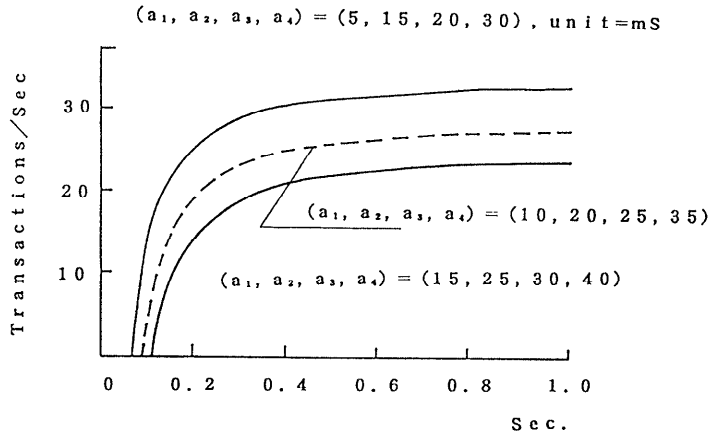


図5  $L=4$  の上限付き平均応答時間と入力トラヒック  
Fig. 5 Constrained mean response time and traffic in the case of  $L=4$ .

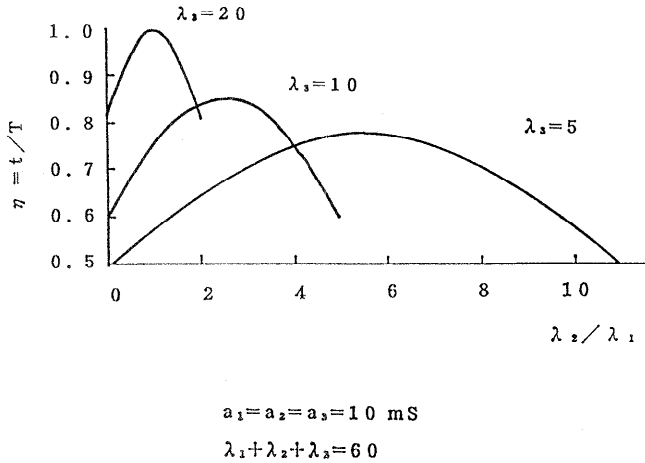


図 6 上限付き平均応答時間に与える不平衡入力トラヒックの影響  
Fig. 6 Effects of imbalanced input traffic on a constrained mean response time.

次に、各ノード間の入力トラヒックのアンバランスが平均応答時間に与える影響について検討する。図 6 は、三つのノードが存在した場合、ノード 3 の入力トラヒック  $\lambda_3$  を固定し、流入トラヒックを一定値 (60 トランザクション/秒) に保ちながら、 $\lambda_2$  と  $\lambda_1$  を変化させた場合を示している。なお、縦軸は  $t/T$  である。各曲線は入力トラヒックのアンバランスが生じるほど、平均応答時間の劣化の度合いが大きいのことを示している。

5. ま と め

プロトコル階層数  $L$ 、各層のモジュール処理時間  $a_r$  と平均応答時間の上限  $t$  が与えられたときの最大流入トラヒックを解析的に求めた。解析結果をもとに、平均応答時間と流入トラヒックの関係および入力トラヒックのアンバランスが平均応答時間に与える影響について述べた。一般に通信システムにおいて相手のトラヒック状況を正確に把握し、システム全体の流入トラヒックを制御するのは困難である。しかし、式 (15) はノード単位で独立にトラヒックを制御できることを示しており、この条件式を越えない範囲で入力を制御すれば、リアルタイム処理環境を保てることを示している。

参 考 文 献

1) Shneiderman, B.: Response Time and Display Rate in Human Performance with Computers, *Computing Surveys*, Vol. 16, No. 3, pp. 265-

285 (1984).

2) Gruber, J.G.: Delay Related Issues in Integrated Voice and Data Networks, *IEEE Trans. of Comm*, Vol. COM-29, No. 6, pp. 786-800 (1981).  
3) 海老原義彦, 中村奉夫, 東 充宏: 高速 LAN 通信システムの平均応答時間の近似評価, 情報処理学会論文誌, Vol. 30, No. 11, pp. 1522-1525 (1989).  
4) 海老原義彦, 中村奉夫: LAN 通信システムのポイント・トゥ・ポイント平均応答時間の近似解析, 情報処理学会論文誌, Vol. 30, No. 11, pp. 1504-1511 (1989).  
5) 藤原松三郎: 代数学第 1 巻, 内田老鶴園新社, pp. 480-481 (1974).  
6) 岩波数学辞典第 2 版, 日本数学会編, 岩波書店, p. 889 (1976).

付 録 1

式 (10) を  $\lambda_i$  に関して偏微分すると,

$$\delta F / \delta \lambda_i = 2 - \rho / \left( \sum_{i=1}^M \lambda_i \right)^2 \cdot \left[ \delta \left\{ \sum_{r=1}^L \sum_{i=1}^M a_r \lambda_i / (1 - a_r \lambda_i) \right\} / \delta \lambda_i \cdot \sum_{i=1}^M \lambda_i - \delta \left( \sum_{i=1}^M \lambda_i \right) \right]$$

ここで、第 1 項のうちの偏微分は次のように展開される。

$$\delta \left\{ \sum_{r=1}^L \sum_{i=1}^M a_r \lambda_i / (1 - a_r \lambda_i) \right\} / \delta \lambda_i = \sum_{r=1}^L a_r / (1 - a_r \lambda_i)^2$$

ゆえに,

$$\delta F / \delta \lambda_i = 2 - \rho / \left( \sum_{i=1}^M \lambda_i \right) \cdot \sum_{r=1}^L a_r / (1 - a_r \lambda_i)^2 + \rho / \left( \sum_{i=1}^M \lambda_i \right)^2 \cdot \sum_{r=1}^L \sum_{i=1}^M a_r \lambda_i / (1 - a_r \lambda_i)$$

また、 $\delta F / \delta \rho = 0$  より得た式 (11) を上式に代入すると,

$$\delta F / \delta \lambda_i = 2 - \rho / \left( \sum_{i=1}^M \lambda_i \right) \cdot \sum_{r=1}^L a_r / (1 - a_r \lambda_i)^2 + \rho t / \left( \sum_{i=1}^M \lambda_i \right)$$

$\delta F / \delta \lambda_i = 0$  より,

$$\sum_{r=1}^L a_r / (1 - a_r \lambda_i)^2 = \left( \rho t + \sum_{i=1}^M \lambda_i \right) / \rho$$

同様に,  $j \neq i$  なる  $j$  に対しても次の式が得られる.

$$\sum_{r=1}^L a_r / (1 - a_r \lambda_j)^2 = \left( \rho t + \sum_{j=1}^M \lambda_j \right) / \rho$$

お互いの差をとると,

$$\begin{aligned} & \sum_{r=1}^L a_r / (1 - a_r \lambda_i)^2 - \sum_{r=1}^L a_r / (1 - a_r \lambda_j)^2 \\ &= \sum_{r=1}^L a_r \{ 1 / (1 - a_r \lambda_i)^2 - 1 / (1 - a_r \lambda_j)^2 \} \\ &= (\lambda_j - \lambda_i) \sum_{i=1}^L a_r^2 \{ a_r (\lambda_j + \lambda_i) - 2 \} / \\ & \quad (1 - a_r \lambda_i)^2 (1 - a_r \lambda_j)^2 = 0 \end{aligned}$$

$a_r \lambda_j < 1, a_r \lambda_i < 1$  であるので,  $a_r (\lambda_j + \lambda_i) < 2$  である. ゆえに, すべての  $i$  に対して,

$$\lambda_i = \lambda_j$$

が成り立つ.  $\lambda_i = \lambda_j = \lambda$  とおくと, (11)式は次式となる.

$$t = \sum_{r=1}^L a_r / (1 - a_r \lambda)$$

### 付 録 2

$x$  の 3 次方程式 (25) の根を  $x_1, x_2, x_3$  とする. 前提 ①より, 3 根は正の実数としているので,  $\delta = x + a/3$  から導かれる式 (26),

$$\delta^3 - 3p\delta - q = 0$$

の 3 根  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  も  $\delta = x + a/3$  の関係から実数をとる. ゆえに, 方程式 (26) の判別式  $D_3$  は  $D_3 > 0$  となる.  $D_3$  は次式で表される.

$$D_3 = (\delta_1 - \delta_2)^2 (\delta_1 - \delta_3)^2 (\delta_2 - \delta_3)^2$$

$D_3$  を基本対称式の和で表すと,

$$\begin{aligned} & (\delta_1 - \delta_2)^2 (\delta_1 - \delta_3)^2 (\delta_2 - \delta_3)^2 \\ &= A \delta_1^2 \delta_2^2 \delta_3^2 + B (\delta_1 \delta_2 + \delta_1 \delta_3 + \delta_2 \delta_3)^3 \end{aligned}$$

となる. 左右等しくなるように係数  $A, B$  を求めると,  $A = -27, B = -4$  となる. また, 根と係数の関係から, 次式が成り立つ.

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 0,$$

$$\delta_1 \delta_2 + \delta_1 \delta_3 + \delta_2 \delta_3 = -3p,$$

$$\delta_1 \delta_2 \delta_3 = q$$

この関係式を上式  $D_3$  に代入する. まとめると,

$$D_3 = -27(q^2 - 4p^3)$$

ところで, 式 (29) の判別式  $D_2$  は, その 2 根を  $\alpha, \beta$  とすると, 次式となる.

$$D_2 = (\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$$

式 (29) の根と係数の関係から  $\alpha + \beta = q, \alpha\beta = p^3$  であるので, これを代入する.  $D_2$  は,

$$D_2 = q^2 - 4p^3$$

となる. したがって,  $D_3 = -27D_2$ . また,  $D_3 > 0$  により,  $D_2 < 0$  となる. ゆえに,  $q^2 - 4p^3 < 0$ .

### 付 録 3

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  間の大小関係を求める. 式 (30) または式 (45) より,  $\cos \theta = q / (2p^{3/2})$  である. また, 付録 2 より  $0 \leq q^2 < 4p^3$  であるので,  $p > 0$ , かつ,  $0 \leq q^2 / (4p^3) < 1$  である. よって,  $\cos \theta$  の範囲は  $-1 < \cos \theta < 1$  である.  $\theta$  の範囲は  $0 < \theta < \pi$  を考察すれば充分である. まず  $q \geq 0$  のとき  $q < 0$  のときの 2 つの場合に分けて考える.

$q \geq 0$  のときは  $0 \leq \cos \theta < 1$  であるので,  $\theta$  の範囲は  $0 < \theta \leq \pi/2$  となる. この場合,  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  の範囲は次に示したようになる.

$$3^{1/2}/2 \leq \sigma_1 = \cos(\theta/3) < 1,$$

$$-3^{1/2}/2 \leq \sigma_2 = \cos\{(\theta + 2\pi)/3\} < -1/2,$$

$$-1/2 < \sigma_3 = \cos\{(\theta + 4\pi)/3\} \leq 0$$

したがって,  $\sigma_1 > \sigma_3 > \sigma_2$  である.

次に,  $q < 0$  のときは  $-1 < \cos \theta < 0$  であるので,  $\theta$  の範囲は  $\pi/2 < \theta < \pi$  となる. この場合,  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  の範囲は次に示したようになる.

$$1/2 < \sigma_1 = \cos(\theta/3) < 3^{1/2}/2,$$

$$-1 < \sigma_2 = \cos\{(\theta + 2\pi)/3\} < -3^{1/2}/2,$$

$$0 < \sigma_3 = \cos\{(\theta + 4\pi)/3\} < 1/2$$

したがって,  $\sigma_1 > \sigma_3 > \sigma_2$  である.

ゆえに, いずれの場合も,  $\sigma_1 > \sigma_3 > \sigma_2$  となる.

### 付 録 4

4 次方程式 (36) の補助方程式 (37) を導出する.  $2y = \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3$  とし, さらに, 次のようにおく.

$$\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2 = A, \quad \zeta_1^2 \zeta_2^2 + \zeta_2^2 \zeta_3^2 + \zeta_1^2 \zeta_3^2 = B,$$

$$\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 = C$$

このとき,

$$4y^2 = A + 2(\zeta_1 \zeta_2 + \zeta_2 \zeta_3 + \zeta_1 \zeta_3),$$

$$16y^4 = A^2 + 4A(\zeta_1 \zeta_2 + \zeta_2 \zeta_3 + \zeta_1 \zeta_3)$$

$$+ 4B + 8C(\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3)$$

となる. これを式 (36) に代入すれば,

$$(A^2 - 4sA + 4B - 16u) + 8(C - v)(\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3)$$

$$+ (4A - 8s)(\zeta_1 \zeta_2 + \zeta_2 \zeta_3 + \zeta_1 \zeta_3) = 0$$

ゆえに,  $A = 2s, C = v$  となるように  $A, C$  を定めれば,  $A^2 - 4sA + 4B - 16u = 0$  となり,  $B$  を求めると,  $B = s^2 + 4u$  となる.

したがって,  $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$  は次の  $z$  の 3 次方程式の根である.



$$z^3 - Az^2 + Bz - C^2 = z^3 - 2sz^2 + (s^2 + 4u)^2z - v^2 = 0$$

## 付録 5

$\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$  と  $y_1, y_2, y_3, y_4$  に次の関係が成り立つことを示す。

$$\zeta_1 = y_1 + y_2,$$

$$\zeta_2 = y_1 + y_3,$$

$$\zeta_3 = y_1 + y_4$$

付録 4 から  $\zeta_1\zeta_2\zeta_3 = v$  である。  $\zeta_1\zeta_2\zeta_3$  に上式を代入すると、

$$\begin{aligned} \zeta_1\zeta_2\zeta_3 &= (y_1 + y_2)(y_1 + y_3)(y_1 + y_4) \\ &= y_1^2(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) + (y_1y_2y_3 \\ &\quad + y_1y_2y_4 + y_1y_3y_4 + y_2y_3y_4) \end{aligned}$$

式(36)の方程式の根と係数の関係から

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0,$$

$$y_1y_2y_3 + y_1y_2y_4 + y_1y_3y_4 + y_2y_3y_4 = v$$

この関係から、

$$\zeta_1\zeta_2\zeta_3 = v$$

となる。ゆえに、関係式は成立する。

## 付録 6

式(36)より、

$$y^4 - sy^2 - vy - u = 0$$

この  $y$  の 4 次方程式の根を、  $y_1, y_2, y_3, y_4$  とする。また、その判別式を  $D_4$  で表す。

$$D_4 = \prod_{i < j} (y_i - y_j)^2$$

式(36)の根と係数の関係から、

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0$$

である。また、式(38)より、

$$\zeta_1 = y_1 + y_2,$$

$$\zeta_2 = y_1 + y_3,$$

$$\zeta_3 = y_1 + y_4$$

である。この二つの関係式から次式が得られる。

$$y_1 = (\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3)/2,$$

$$y_2 = (\zeta_1 - \zeta_2 - \zeta_3)/2,$$

$$y_3 = (-\zeta_1 + \zeta_2 - \zeta_3)/2,$$

$$y_4 = (-\zeta_1 - \zeta_2 + \zeta_3)/2$$

これら  $y_1, y_2, y_3, y_4$  を  $D_4$  の右辺に代入して、整理すると、

$$D_4 = (\zeta_1^2 - \zeta_2^2)(\zeta_1^2 - \zeta_3^2)(\zeta_2^2 - \zeta_3^2)^2$$

さらに、次の関係式が成り立つ。

$$z_1 = \zeta_1^2, \quad z_2 = \zeta_2^2, \quad z_3 = \zeta_3^2$$

$\zeta_1^2, \zeta_2^2, \zeta_3^2$  にそれぞれ  $z_1, z_2, z_3$  を代入して、まとめると、

$$D_4 = (z_1 - z_2)^2(z_1 - z_3)^2(z_2 - z_3)^2$$

$\delta = z + a/3$  の関係から、  $z_1 = \delta_1 - a/3, z_2 = \delta_2 - a/3, z_3 = \delta_3 - a/3$  が導かれる。これらを代入すると、

$$D_4 = (\delta_1 - \delta_2)^2(\delta_1 - \delta_3)^2(\delta_2 - \delta_3)^2 = D_3$$

ただし、  $D_3$  は式(42)の判別式である。

上式は  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  の対称式であるので基本対称式の多項式で表される。計算結果は、

$$\begin{aligned} &(\delta_1 - \delta_2)^2(\delta_1 - \delta_2)^2(\delta_2 - \delta_3)^2 \\ &= -27\delta_1^2\delta_2^2\delta_3^2 - 4(\delta_1\delta_2 + \delta_1\delta_3 + \delta_2\delta_3)^3 \end{aligned}$$

式(42)の根と係数の関係から、

$$D_3 = -27(q^2 - 4p^3)$$

となる。前提①より式(35)の 4 根は実数としているので、  $y = x + e/4$  の関係から導かれる式(36)の 4 根  $y_1, y_2, y_3, y_4$  も実数となる。したがって、方程式(36)の判別式  $D_4$  は  $D_4 > 0$  となり、これから  $D_3 > 0$  となる。ゆえに、  $D_3 > 0$  から  $(q^2 - 4p^3) < 0$  が得られる。

(平成 4 年 9 月 11 日受付)

(平成 5 年 6 月 17 日採録)



海老原義彦 (正会員)

昭和 22 年生。昭和 45 年東北大学工学部電子工学科卒業。昭和 50 年同大学院博士課程単位取得退学。同年同大学応用情報学センター助手。昭和 51 年筑波大学電子・情報

工学系講師。昭和 60 年同助教、現在同教授。主たる研究分野は、計算機網のネットワーク・アーキテクチャ、デジタル通信システムの性能評価および知的通信システムの研究など。工学博士。電子情報通信学会会員。



張 興周

昭和 23 年生。昭和 51 年ハルビン工業大学電気工程系卒業。昭和 55 年同大学同系修士課程修了。工学修士。昭和 55 年ハルビン船舶工程学院講師。現在、筑波大学電子・情報工学系客員研究員。主たる研究分野は計算機網ネットワークアーキテクチャ、デジタル通信、光ファイバ通信システムおよびシステム性能評価など。