

ブロックべき乗法を用いた線形予測行列の低ランク近似法

村上 純^{*†} 田所 嘉昭[†]

入力信号系列がいくつかの正弦波と付加的な白色雑音により構成されている場合に、雑音成分を低減する処理は、デジタル信号処理の主要な目的の一つである。その手法の一つに、対象とする系のテプリッツ形線形予測モデルを構成して、より低いランクのテプリッツ形近似行列を計算する手法がある。近似行列が求まれば、雑音成分を低減した信号が再現される。具体的な計算方法は、特異値分解 (SVD) を利用した Wilkes の方法が一般的に用いられている。しかし、この方法は、SVD を何度も計算するので、かなり計算時間がかかる。そこで我々は、同様な近似行列を計算する、より高速なアルゴリズムを開発した。本手法は、周波数推定でよく用いられる相関行列を、離散フーリエ変換の回転因子から成るベクトルの積で近似する手法を応用したものである。計算の高速化のためには、固有値計算の一手法であるブロックべき乗法を利用して、すべての特異値を近似的に一度で求めるようにした。

Lower Rank Approximation Method of Linear Prediction Matrices by the Block Power Method

JUN MURAKAMI^{*†} and YOSHIKI TADOKORO[†]

When the input data sequences are composed of N sinusoidal signals together with additive white noise, the harmonic decomposition and the harmonic retrieval of the sequences are important subjects in the areas of digital signal processing. In such subjects, the Toeplitz matrices commonly appear as the linear prediction matrices to describe the characteristics of the sequences. Recently, the singular value decomposition of these matrices are often used to reduce the influence of noisy components of the sequences by neglecting other singular values except the $2N$ largest singular values. Since these reduced rank matrices are usually not Toeplitz matrices, the essential problem is to find the Toeplitz matrices which approximate the data matrices. Although the iterated Toeplitz approximation method has been developed for this problem, this involves redundant computation tasks. In this paper, we propose a high speed algorithm to construct the reduced rank Toeplitz approximation matrices from the data matrices.

1. はじめに

入力信号系列がいくつかの正弦波と付加的な白色雑音により構成されていると仮定する。このような場合において、雑音成分を低減して、本来の正弦波成分を取り出す処理は、デジタル信号処理や科学計測の主要な目的の一つである¹⁾。

実際の計算手法としては、対象とする系の線形予測モデルを構成して、得られたデータ行列について特異

値分解 (SVD) を適用する手法が近年よく用いられている^{2),3)}。このデータ行列は線形予測行列と呼ばれ、対角成分およびこれに平行な斜め方向の成分 (副対角成分) の値が対角からの距離ごとに一定値となるテプリッツ行列である。

線形予測行列の SVD を計算すると、特異値の大きさが入力信号のフーリエ成分の大きさを表すことがわかっている^{4),5)}。そこで、雑音成分に対応する特異値を無視して、より低いランクの近似行列を構成する。一般に、信号成分の波の個数を特定することは容易ではなく、種々の方法が提案されている⁶⁾。本論文では、雑音成分の大きさは本来の信号成分の大きさに比べて十分小さいと仮定して、特異値の大きさにより波の個数を検出できるものとする。

信号波形を再構成するためには、近似行列はテプリッツ形でなければならない。このような近似行列を計

† 豊橋技術科学大学工学部情報工学系
Department of Information and Computer Sciences, Faculty of Engineering, Toyohashi University of Technology

* 現在 熊本電波工業高等専門学校情報工学科
Presently with Department of Information and Computer Sciences, Kumamoto National College of Technology

算する手法として、Wilkes らの方法⁷⁾が提案されている。波の個数がわかっているならば、最小 2 乗法により周波数を推定する手法⁸⁾が存在するが、計算時間がかかると指摘されており⁷⁾、この理由から信号波形の復元には Wilkes らの手法がよく用いられている。しかし、この方法では、SVD の計算を何回も行うため、必ずしも計算時間が高速とはならない。

我々は、高速にテプリッツ近似行列を計算する新しい方法を開発した。この手法は、周波数推定でよく用いられる相関行列⁹⁾を離散フーリエ変換 (DFT) の回転因子⁹⁾から成るベクトルの積で近似する手法¹⁰⁾を応用したものである。計算の高速化のために、固有値計算の一手法であるブロックべき乗法¹¹⁾を利用して、すべての特異値を近似的に一度で求めるようにした。

2. 線形予測行列の低ランク近似

2.1 線形予測行列の特異値分解による低ランク化

入力信号の時系列データ x_0, x_1, \dots, x_{N-1} は連立 1 次方程式

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 x_{k-1} + \alpha_1 x_{k-2} + \dots + \alpha_{L-1} x_{k-L} = 0, \\ L \leq k \leq N \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

を満たす係数 α_k によってモデル化される^{9), 11)}。ただし、 $x_k = x(k\Delta t)$ であり、 Δt はサンプル間隔である。式(1)を行列で表現すると、

$$\mathbf{X}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \quad (2)$$

となる。ここで、 \mathbf{X} は時系列データで構成された $(N-L+1) \times L$ 線形予測行列で、 $\boldsymbol{\alpha}$ は係数 α_k から成る $L \times 1$ 係数ベクトルである。データ系列の周期を $M\Delta t$ すなわち $x_k = x_{k+M}$ として、式(1)で $L=M$ 、 $M \leq k \leq (2M-1)$ とすると、行列 \mathbf{X} は次式のように $M \times M$ のテプリッツ行列となる。

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_0 & x_{M-1} & x_{M-2} & \dots & x_1 \\ x_1 & x_0 & x_{M-1} & \dots & x_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{M-2} & x_{M-3} & x_{M-4} & \dots & x_{M-1} \\ x_{M-1} & x_{M-2} & x_{M-3} & \dots & x_0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

この線形予測行列の SVD を計算すると、

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \sum_{k=1}^r \sigma_k \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^T, \\ \sigma_1 &\geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0 \end{aligned} \quad (4)$$

と表現できる。ここで、 σ_k は特異値であり、 \mathbf{u}_k 、 \mathbf{v}_k^T はそれぞれ σ_k に対応する左特異ベクトル、右特異ベクトルの転置、 r はランクを表している。

行列 $\mathbf{X}\mathbf{X}^T$ について考えると、この行列は次節で述べるようにテプリッツ行列である。そして、その固有

値はもとの信号系列のフーリエ成分の値の 2 乗に等しいことがわかっている⁴⁾。また、行列 $\mathbf{X}\mathbf{X}^T$ の固有値は行列 \mathbf{X} の特異値の 2 乗であるから、結局、 \mathbf{X} の特異値は入力信号の DFT の値の絶対値と等しくなる。

1 章で述べたように、本論文では、本来の正弦波信号の大きさに比べて、雑音信号の大きさが十分小さいと仮定している。このとき、正弦波信号に対応する行列 \mathbf{X} の特異値の大きさに比較して、雑音信号に対応する特異値はかなり小さくなる。そこで、特異値の大きさを調べて、 $\sigma_p \gg \sigma_{p+1}$ となるような p を見つけ、

$$\sigma_k = 0, \quad k = p+1, \dots, r \quad (5)$$

として、ランク p の行列 \mathbf{X}_p

$$\mathbf{X}_p = \sum_{k=1}^p \sigma_k \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^T \quad (6)$$

で行列 \mathbf{X} を近似すれば、雑音の影響を低減した低ランクの近似行列が構成できる。

2.2 従来の低ランク近似法

式(6)の行列 \mathbf{X}_p は一般にテプリッツ形ではないので、本来の信号波形を再構成するためには、テプリッツ形に変形しなければならない。テプリッツ形を保存したまま、低ランク近似行列を求めるために、逐次テプリッツ近似法 (ITAM: iterated Toeplitz approximation method) と呼ばれる手法が考案されている^{7), 12)}。この手法は、一般によく用いられており^{2), 13)}、次の手順で近似行列を計算する。

- ①もとの $M \times M$ 線形予測行列を \mathbf{X} とする。
- ②行列 \mathbf{X} の SVD を行い、特異値間の大きさのギャップを見出す。微小な特異値を無視した後の、非零特異値の個数を p とする。ランク p の行列 \mathbf{X}_{1p} を

$$\mathbf{X}_{1p} = \sum_{j=1}^p \sigma_j' \mathbf{u}_j \mathbf{v}_j^T, \quad (7)$$

$$\sigma_j' = \sigma_j - \frac{1}{r_0 - p} \sum_{i=p+1}^{r_0} \sigma_i \quad (8)$$

と構成する。ここで、 r_0 は行列 \mathbf{X} のランクである。なお、ギャップを見出す操作は反復の初回のみ行い、2 回目以降は p をランクとして用いる。

- ③行列 \mathbf{X}_{1p} の主対角と他の $2(M-1)$ 本の副対角ごとに成分の平均をとり、平均値を各対角に並べたテプリッツ行列を \mathbf{X}_{1T} とする。
- ④行列 \mathbf{X}_{1T} のランク r_1 は、一般に $r_1 \geq p$ であるから、この行列について②以下の手順を行い、 \mathbf{X}_{2T} を求める。
- ⑤②以降の手順を、 \mathbf{X}_{kT} のランク r_k が p に等しく

なるまで繰り返す。

この手法では、SVD 計算による低ランク化処理 (②) と平均操作によるテプリッツ化処理 (③) が別々に行われる。そして、それらを繰り返すので、全体として計算がかなり多くなる。そこで、低ランク化処理とテプリッツ化処理を同時に行うことができれば計算の高速化が可能になると考えられる。

3. 線形予測行列に対するブロックベキ乗法による低ランク近似法

我々の対象とする行列は線形予測行列であるが、新しく考案したアルゴリズムは相関行列のベクトルの積による分解¹⁰⁾を利用している。

3.1 相関行列の回転因子ベクトルによる分解

入力信号系列の自己相関関数を

$$y_i = \sum_{k=0}^{M-i} x_k x_{k+i}, \quad i=0, 1, \dots, M-1 \quad (9)$$

として¹⁴⁾、相関行列 \mathbf{Y} を

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\mathbf{X}^T = \begin{bmatrix} y_0 & y_1 & y_2 & \cdots & y_{M-1} \\ y_1 & y_0 & y_1 & \cdots & y_{M-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{M-2} & y_{M-3} & y_{M-4} & \cdots & y_1 \\ y_{M-1} & y_{M-2} & y_{M-3} & \cdots & y_0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

と構成すると、この行列は対称テプリッツ形となる。

行列 \mathbf{Y} の固有値分解 (EVD) を行うと次のようになる。

$$\mathbf{Y} = \sum_{k=1}^r \mu_k \mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T, \quad \mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_r > 0. \quad (11)$$

ここで、 μ_k は固有値であり、 \mathbf{w}_k は μ_k に対応する固有ベクトルを表している。ランク r は式 (4) の行列 \mathbf{X} のランクと一致し、さらに右、左特異ベクトルと特異値について次のような関係がある¹⁵⁾。

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{w}_k, \quad k=1, 2, \dots, r, \quad (12)$$

$$\mathbf{v}_k = \frac{1}{\sigma_k} \mathbf{X}^T \mathbf{u}_k, \quad k=1, 2, \dots, r, \quad (13)$$

$$\sigma_k^2 = \mu_k, \quad k=1, 2, \dots, r. \quad (14)$$

式 (14) から、行列 \mathbf{Y} はすべての固有値が非負であるので、非負定値行列である。

テプリッツ形の非負定値行列 \mathbf{Y} は、式 (11) の EVD とは別に、次式の形式で一意的に表現できることが知られている¹⁰⁾。

$$\mathbf{Y} = \sum_{k=1}^s c_k \mathbf{f}_k \mathbf{f}_k^T + d^2 \mathbf{I}. \quad (15)$$

ここで、 \mathbf{I} は単位行列を表し、項数 s は $s < M$ を満たし、 c_k 、 d^2 はそれぞれ $c_k > 0$ 、 $d^2 \geq 0$ を満足する係数である。また、ベクトル \mathbf{f}_k は

$$\mathbf{f}_k = [1 \exp\{j\theta_k\} \cdots \exp\{j(M-1)\theta_k\}]^T \quad (16)$$

であり、 θ_k は $[-\pi, \pi]$ の範囲の任意の値をとる。ここで、 $j = \sqrt{-1}$ である。式 (15) の $d^2 \mathbf{I}$ の項を無視して構成した行列 \mathbf{Y}' は

$$\mathbf{Y}' = \sum_{k=1}^s c_k \mathbf{f}_k \mathbf{f}_k^T \quad (17)$$

となり、テプリッツ形は保存される。この行列 \mathbf{Y}' の近似行列を求めることにより、もとの行列 \mathbf{Y} の低ランク近似行列を構成することにした。ベクトル \mathbf{f}_k を正規直交基底に選べば、式 (17) は固有値分解の形式になるので、係数 c_k を行列 \mathbf{Y}' の固有値と呼ぶことにする。

いま、 θ_k を

$$\theta_k = -\frac{2\pi k}{M} \quad (18)$$

とすると、式 (16) の各要素は DFT の計算に用いられる回転因子であるから、ベクトル \mathbf{f}_k を回転因子ベクトルと呼ぶことにする。

3.2 ブロックベキ乗法による低ランク近似の原理

入力信号系列は実数値をとるものと仮定すると、回転因子の余弦波成分と正弦波成分のみを使用して、

$$\mathbf{g}_k = \frac{1}{\sqrt{M}} [1 \cos \theta_k \cdots \cos(M-1)\theta_k]^T, \quad k=0, 1, 2, \dots, \left[\frac{M}{2}\right], \quad (19)$$

$$\mathbf{h}_k = \frac{1}{\sqrt{M}} [0 \sin \theta_k \cdots \sin(M-1)\theta_k]^T, \quad k = \begin{cases} 1, 2, \dots, M-1 & (M \text{ が奇数}) \\ 1, 2, \dots, \left[\frac{M}{4}\right], M - \left[\frac{M}{4}\right], \dots, M-1 & (M \text{ が偶数}) \end{cases} \quad (20)$$

を回転因子ベクトルとする。ただし、記号 $[\]$ は括弧内の数を超えない最大の整数を表す。式 (19)、(20) は、全体で $2M$ 個存在するベクトルのうちで一次独立なものだけを選んだ結果である。 \mathbf{g}_k の個数を k_1 個、 \mathbf{h}_k の個数を k_2 個、 $m = k_1 + k_2$ として、これらを列ベクトルにして

$$\mathbf{R} = [\mathbf{g}_1 \cdots \mathbf{g}_{k_1} \mathbf{h}_{k_1+1} \cdots \mathbf{h}_m] \quad (21)$$

と構成した $M \times m$ 行列 \mathbf{R} を回転因子行列と呼ぶことにする。

まず、相関行列 \mathbf{Y} の低ランク近似行列を求める。そして、近似行列の固有値 c_k の計算を行い、固有値

の間の大きさのギャップを見出し、 $k=s_p$ のとき $c_k \gg c_{k+1}$ となったとする。対応する固有ベクトル f_k を用いて、式(15)の関係より

$$Y_p = \sum_{k=1}^{s_p} c_k f_k f_k^T \quad (22)$$

により近似行列 Y_p を構成することができる。この式から式(6)、(12)~(14)の関係により、線形予測行列 X の低ランク近似行列 X_p は

$$X_p = \sum_{k=1}^{s_p} f_k (X^T f_k)^T \quad (23)$$

で計算することができる。

3.3 具体的な計算法

具体的な計算は、まず式(21)の回転因子行列 R を初期行列 A_0 として用いて、

$$A_0 = R = [r_1 \ r_2 \ \dots \ r_m] \quad (24)$$

とする。この A_0 に対して固有値計算のブロックべき乗法¹¹⁾を適用して、

$$A_1 = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_m] = X A_0 \quad (25)$$

として左特異ベクトル a_k を列に持つ行列 A_1 を計算する。 A_0 の各列は正規直交基底であるから、互いに直交する m 個の初期ベクトルについて、通常のべき乗法¹⁶⁾を同時に適用したのと同じである。

べき乗法では式(25)の積を A_k について繰り返し行い、初期ベクトルを固有ベクトルに収束させる。しかし、本手法では計算速度の向上に主眼を置いているので、反復は1回のみで近似を行うことにした。1回の適用で、すべての特異ベクトルを近似的に求めることにしているの、計算の高速化が達成できる。

式(22)のベクトル f_k としては、回転因子ベクトルをそのまま次式のように使用することにする。

$$f_k = q_k, \quad k=0, 1, \dots, s_p. \quad (26)$$

ここで、 q_k は式(24)の初期ベクトル r_k を対応する c_k の大きさの順に並び替えたもので、 c_k の集合 C を $\{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ と表したとき、

$$c_{j1} = \max(C) \text{ のとき } q_1 = r_{j1},$$

$$c_{j2} = \max(C - \{c_{j1}\}) \text{ のとき } q_2 = r_{j2},$$

のようにして、以下同様に順次定める。本論文ではテプリッツ形近似行列を得ることが重要であるから、このようなベクトルを

選べば、式(15)~(17)の関係から、近似行列はテプリッツ形になることが保証される。

式(25)で得られた結果のベクトルを用いて c_k を計算する。行列 X を式(24)の列ベクトル r_k に乗じると、特異ベクトル方向の成分が特異値の大きさに応じて伸縮される。普通、その伸縮の比率から、特異値の近似値は求められる。しかし、特異ベクトルの近似値として、初期ベクトルを使用することにしたので、ベクトル a_k の r_k 方向への射影 a_k' を求めると、

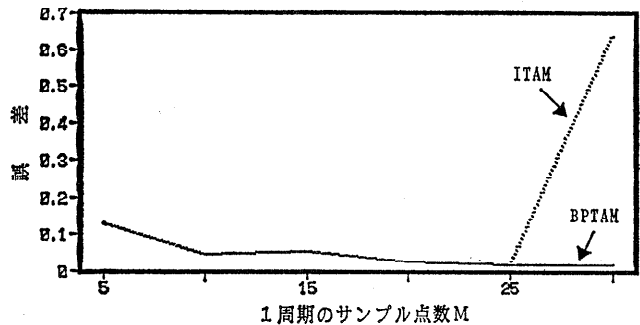
$$a_k' = \frac{r_k^T a_k}{r_k^T r_k} r_k \quad (27)$$

となる。これと r_k とのノルムの比を求め c_k とする。 r_k のノルムは1であるから、結局 c_k は

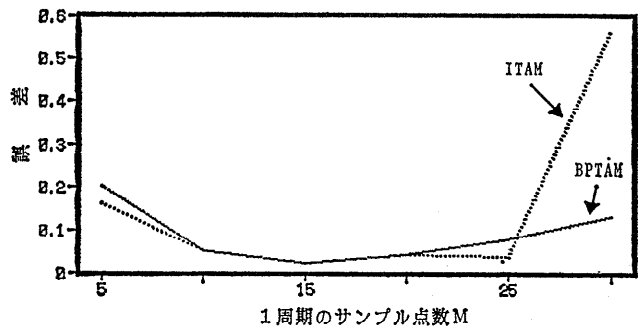
$$c_k = r_k^T a_k, \quad k=1, 2, \dots, m \quad (28)$$

で計算することができる。右特異ベクトル v_k は式(13)から、

$$v_k = \frac{1}{c_k} X^T r_k, \quad k=1, 2, \dots, s_p \quad (29)$$



(a) $2 \sin(2\pi k/M)$ の誤差



(b) $\sin(4\pi k/M)$ の誤差

図1 計算結果の誤差の比較

Fig. 1 Comparison of harmonic retrieval error in the case of two sinusoids plus noise.

(a) $2 \sin(2\pi k/M)$. (b) $\sin(4\pi k/M)$.

により計算できるので、

$$\mathbf{X}_p = \sum_{k=1}^{S_p} c_k \mathbf{f}_k \mathbf{v}_k^T \quad (30)$$

により線形予測行列の低ランク近似行列 \mathbf{X}_p を求める。

4. 計算結果

入力信号系列の例として、次のような基本波とその2倍の周波数の正弦波の場合を考えた。

$$b_k = 2 \sin\left(\frac{2\pi k}{M}\right) + \sin\left(\frac{4\pi k}{M}\right), \quad (31)$$

$$k=0, 1, \dots, M-1.$$

これに平均0、分散1の白色雑音 z_k が加わった信号系列が次式のように与えられたとする。

$$x_k = b_k + z_k, \quad k=0, 1, \dots, M-1. \quad (32)$$

ただし、 M は1周期間のサンプル点数で、信号の周期を表しており、 $x_k = x_{k+M}$ である。

式(32)の信号系列から、線形予測行列(簡単にデータ行列と呼ぶことにする) \mathbf{X} を構成する。一般に、 n 個の正弦波から成る信号のデータ行列のランクは $2n$ であることが知られている^{7),17)}。従って、1周波数の信号はランク2のテプリッツ近似行列に対応している。

上の例について、まずデータ行列 \mathbf{X} の固有値の計算を行う。そして、固有値の大きさのギャップを見つげると $s_p=2$ 、すなわちランクが2であることがわかる。そこで、ランク2の低ランク近似行列 \mathbf{X}_{p1} の計算を行う。次に、この近似行列とデータ行列との残差行列を求め、さらにランク2の近似行列 \mathbf{X}_{p2} を計算すれば、結局雑音を低減した二つの周波数の信号に対するデータ行列が得られる。

なお、計算はすべて単精度演算で行った。

4.1 残差ノルムの計算

雑音のない場合について、我々の開発した手法(BPTAM: block power Toeplitz approximation method と呼ぶことにする)およびITAMにより計算した近似行列と、データ行列との残差のノルム

$$\varepsilon_N = \frac{|\mathbf{X} - \mathbf{X}_{p1} - \mathbf{X}_{p2}|}{|\mathbf{X}|} \times 100[\%] \quad (33)$$

を評価して、近似計算の妥当性を調べたのが表1である。次節で誤差の比較を行うために、1周期のサンプル点数 M を変化させて評価を行った。行列のノルムにはフロベニウス・ノルム¹⁸⁾を用いた。表1の値は両手法とも丸め誤差の程度であり、計算の妥当性が確かめられる。

表1 低ランク近似行列の残差ノルムの比較
Table 1 Comparison of residual norm of the lower rank approximation matrix in the case of two sinusoids.

入力信号の1周期の サンプル点数	相対残差 (%)	
	BPTAM	ITAM
5	3.32×10^{-5}	4.26×10^{-5}
10	9.54×10^{-5}	3.36×10^{-5}
15	9.56×10^{-5}	1.94×10^{-5}
20	1.61×10^{-4}	4.13×10^{-5}
25	4.62×10^{-4}	2.24×10^{-4}
30	7.52×10^{-5}	9.04×10^{-5}

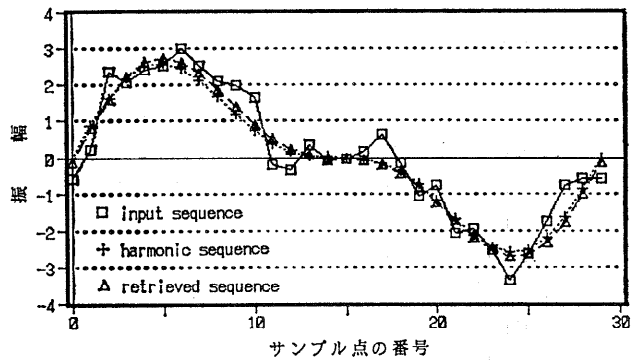


図2 復元した正弦波信号波形と入力信号波形
Fig. 2 Retrieved harmonic sequences for $M=30$, $SNR=10$ dB, together with input sequence.

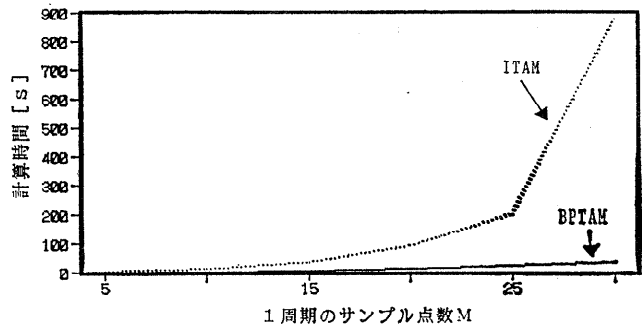


図3 計算時間の比較
Fig. 3 Comparison of computation time.

4.2 再構成した信号系列値の誤差の比較

信号成分の大きさから、行列 \mathbf{X}_{p1} が $2\sin(2\pi k/M)$ に、行列 \mathbf{X}_{p2} が $\sin(4\pi k/M)$ の成分に対応している。そこで、行列 \mathbf{X}_{p1} と \mathbf{X}_{p2} の第 1 列目を取り出し、第 1 要素から順に並べることにより、対応する周波数成分ごとの信号系列を再構成できる。

雑音のある場合の、再構成した信号系列値の精度を調べるために、誤差

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{M} \sqrt{\sum_{k=0}^{M-1} \left\{ 2 \sin\left(\frac{2\pi k}{M}\right) - x_{p1,k} \right\}^2} \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{M} \sqrt{\sum_{k=0}^{M-1} \left\{ \sin\left(\frac{4\pi k}{M}\right) - x_{p2,k} \right\}^2} \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

を BPTAM と ITAM について計算し、比較を行った。ここで、 $x_{p1,k}$, $x_{p2,k}$ はそれぞれ行列 \mathbf{X}_{p1} , \mathbf{X}_{p2} の第 1 列の第 k 要素である。SN 比が 10[dB] の場合の計算結果を図 1 に示す。白色雑音は、正規乱数を生成するサブルーチン¹⁹⁾を使用して、乱数を求める際の初期値を変えて、3 通り発生させた。そして、3 回計算を行った平均値を求めた。

図 1 のグラフから、信号の推定精度については両手法間にあまり差はないが、 M の小さいときは ITAM の方が若干誤差が小さくなるのがわかる。しかし、 M が大きくなると ITAM はうまく収束せずに誤差が大きくなる場合があるのに対し、BPTAM では正常に計算できた。他の例についても計算を行ってみたが、同様の結果が得られた。

図 2 に $M=30$ の場合の、式 (31) の雑音のない信号波形と式 (32) の雑音を含んだ波形、および雑音を低減した後の信号波形を示す。

4.3 計算時間の比較

4.1 節、4.2 節の例においては、入力信号のサンプル点数 M はデータ行列のサイズを表している。そこで、4.2 節の例で、サンプル点数を変えたときの ITAM と BPTAM の計算時間の比較を行った。その結果を図 3 に示す。

M が大きくなるに従って、計算時間の差は大きくなり、 $M=30$ では ITAM の計算時間は約 24 倍である。ITAM では、発生させた乱数の違いによって、収束に要する計算時間が変化し、30 分近くかかる場合もあった。BPTAM は反復法ではないので、乱数が異なっても計算時間は不変であった。なお、計算にはパーソナル・コンピュータ NEC-9801-NS を用い、使用言語は Fortran である。

5. おわりに

ブロックべき乗法の初期値に回転因子行列を用いて、線形予測行列の低ランク近似行列を高速に求める新しい手法について述べた。

基本波とその 2 倍の周波数の正弦波からなる信号の例を用いて、本手法と ITAM とを比較した結果から、以下のことが確かめられた。

- 雑音のない場合のテプリッツ近似行列の残差は、両手法とも丸め誤差の範囲である。
- 雑音がある場合の再構成した信号系列の誤差は、ほぼ同程度と考えられるが、ITAM はサンプル点数が大きくなるとうまく収束しない場合がある。
- 計算時間は本手法のほうが速く、ITAM は反復法であるから、収束にかなり時間のかかる場合もある。

今後は、計算誤差をさらに小さくできるように改善を行う予定である。

謝辞 有益なご助言をいただいた査読者に感謝します。

参考文献

- 1) 南 茂夫 (編著): 科学計測のための波形データ処理, p. 166, CQ 出版社 (1986).
- 2) Bakamidis, S., Dendrinos, M. and Carayannis, G.: SVD Analysis by Synthesis of Harmonic Signals, *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol. 39, No. 2, pp. 472-477 (1991).
- 3) Scharf, L.L.: The SVD and Reduced-Rank Signal Processing, In Vaccaro, R. J. (Editor), *SVD and Signal Processing II*, pp. 3-31, North-Holland (1988).
- 4) Ekstrom, M.P.: An Iterative-Improvement Approach to the Numerical Solution of Vector Toeplitz Systems, *IEEE Trans. Comput.*, Vol. 23, pp. 320-325 (1975).
- 5) Makhoul, J.: On the Eigenvectors of Symmetric Toeplitz Matrices, *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, Vol. ASSP-29, No. 4, pp. 868-872 (1981).
- 6) 辻 宏之, 大森浩充, 佐野 昭: AR スペクトル推定における正弦波信号の個数判定法, 信学論, Vol. J74-A, No. 9, pp. 1374-1384 (1991).
- 7) Wilkes, D.M. and Hayes, M.H.: Block Toeplitz Approximation, *Signal Processing*, Vol. 15, No. 3, pp. 303-313 (1988).
- 8) Rahman, M.A. and Yu, K.B.: Total Least Squares Approach for Frequency Estimation Using Linear Prediction, *IEEE Trans. Acoust. Speech and Signal Processing*, Vol. ASSP-35,

- No. 10, pp. 1440-1454 (1987).
- 9) 例えば, 樋口龍雄: デジタル信号処理の基礎, p. 40, 昭晃堂 (1985).
 - 10) Fuhrmann, D. R. and Miller, M. I.: On the Existence of Positive-Definite Maximum-Likelihood Estimates of Structured Covariance Matrices, *IEEE Trans. Inf. Theory*, Vol. 34, No. 4, pp. 722-729 (1988).
 - 11) G. ストラング (山口昌哉監訳, 井上昭訳): 線形代数とその応用, p. 316, 産業図書 (1978).
 - 12) Cadzow, J. A. and Wilkes, D. M.: Enhanced Rational Signal Modeling, *Signal Processing*, Vol. 25, No. 2, pp. 171-188 (1991).
 - 13) 松尾道夫, 田所嘉昭: 拡張されたノッチフーリエ変換の特性, 信学技報, DSP 91-49 (1991).
 - 14) 電子通信学会編: デジタル信号処理, p. 43, 電子通信学会 (1975).
 - 15) Lawson, C. L. and Hanson, R. J.: *Solving Least Squares Problems*, p. 18, Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1974).
 - 16) 洲之内治男, 四條忠雄: パソコンによる数値計算, p. 104, サイエンス社 (1984).
 - 17) Johnson, D. H. and DeGraaf, S. R.: Improving the Resolution of Bearing in Passive Sonar Arrays by Eigenvalue Analysis, *IEEE Trans. Acoust, Speech, and Signal Process.*, Vol. ASSP-30, No. 4, pp. 638-647 (1982).
 - 18) 柳井晴夫, 竹内 啓: 射影行列・一般逆行列・特異値分解, p. 42, 東京大学出版会 (1983).

- 19) 渡部 力, 名取 亮, 小国 力 (監修): Fortran 77 による数値計算ソフトウェア, 丸善 (1989).
(平成 4 年 10 月 22 日受付)
(平成 5 年 5 月 12 日採録)



村上 純 (正会員)

昭和 34 年生。昭和 57 年豊橋技術科学大学工学部情報工学課程卒業。昭和 59 年同大学大学院修士課程修了。同年熊本電波工業高等専門学校情報工学科助手, 平成 2 年同講師, 平成 3 年豊橋技術科学大学情報工学系講師, 平成 5 年熊本電波工業高等専門学校情報工学科助教授。デジタル信号処理に関する研究に従事。電子情報通信学会, 応用物理学会各会員。



田所 嘉昭 (正会員)

昭和 18 年生。昭和 42 年東北大学工学部電子工学科卒業。昭和 44 年同大学大学院修士課程修了。工学博士 (東北大学)。昭和 44 年より東北大学工学部助手, 昭和 53 年豊橋技術科学大学講師, 昭和 61 年同大学教授。デジタル信号処理とその応用, 福祉工学に関する研究に従事。電気学会, 電子情報通信学会, 計測自動制御学会, IEEE 各会員。