

局所性を制御できる補間曲線としての S -スプラインと $B2$ -スプライン

黒田 満[†] 古川 進^{††} 木村 文彦^{†††}

CAGD や CG 分野で有用なユニフォーム 3 次の B -スプラインを用いた補間曲線を拡張して、局所性を系統的に制御できるようにした C^2 補間曲線について述べている。各曲線分を 4 次に上げた S -スプラインを用いて新たな補間曲線を導くとともに、各曲線分に節点を挿入した 3 次の $B2$ -スプラインを用いてすでに導いている同様の曲線と比較して、特徴を明らかにしている。両補間曲線は次数上げや節点挿入によって付加された制御点を所望の範囲の通過点の重心結合とすることによって局所性を制御している。この範囲を無限大にすると元の B -スプライン補間曲線と一致する。実質的に一致するとみなせるところを解析的に求めて局所性の実用的な制御範囲として新たに示している。 S -スプラインによる補間曲線のブレンディング関数は $B2$ -スプラインによる補間曲線のそれと比べて、局所台の中央と両端の各 2 区間で異なるだけである。他の区間では、次数上げと節点挿入の効果が消失して、完全な 3 次式として一致する。結果、両補間曲線は局所性の強い部分でのみ異なる。そこでは S -スプラインによる補間曲線のほうが実用的に好ましい形状となる。局所性の制御法が曲線の端点を含む全域で一貫して利用できるための新たな境界条件も付加している。

S -splines and $B2$ -splines as Interpolating Curves with Controllable Locality

MITSURU KURODA,[†] SUSUMU FURUKAWA^{††} and FUMIHIKO KIMURA^{†††}

This paper presents a uniform C^2 interpolating curve with controllable locality, extending the conventional interpolating curve using cubic B -splines, useful for CAGD and CG. The curve is developed in quartic S -spline form which has an additional control point in each segment because of degree-elevation. It is compared with another curve in cubic $B2$ -spline form using knot-insertion as proposed by the same authors. In both curves, the shape designer decides the desired range of locality for each segment and gets the corresponding additional control point as a barycentric combination of interpolation points within the range. A practical control range of locality is derived by analyzing how both curves tend to the conventional B -spline interpolation. The interpolating blending function in S -spline form is thoroughly identical as cubic with the corresponding one in $B2$ -spline form, except in the two spans at the center and at both ends of its local support. Therefore, both curves are different only in their portion with strong locality. The curve in S -spline form seems to be practically superior somehow. The control scheme of locality is systematic and consistent over the full curve including both ends, subject to a new kind of boundary conditions.

1. はじめに

本論文では、3 次の B -スプラインを用いた補間曲線を 4 次に上げて拡張して、局所性を系統的に制御できる C^2 補間曲線を導くとともに、各曲線分に節点を挿入してすでに導いている同様の曲線¹⁾と比較して特徴を明確にする。ここに、補間曲線の局所性とは、曲線形状がどの範囲の通過点の影響によって決定されるかを示すものである。

B -スプライン曲線²⁾は、CAGD や CG 分野で自由形状な曲線を扱うための強力な道具である。連続な接続を意識することなく、直観になじむ幾何学的関係を

[†] 豊田工業大学制御情報工学科
Department of Information and Control Engineering, Faculty of Engineering, Toyota Technological Institute

^{††} 山梨大学工学部機械システム工学科
Department of Mechanical System Engineering, Faculty of Engineering, Yamanashi University

^{†††} 東京大学工学部精密機械工学科
Department of Precision Machinery Engineering, Faculty of Engineering, The University of Tokyo

使って対象部分だけを変形・修正できる。しかし、 B -スプライン曲線は制御点を通らないので、より直観的に点列を補間する曲線 (B -スプライン補間曲線)を得なければ、関連する連立方程式を解かなければならない。このとき、予期せぬうねりが生ずるかもしれない。さらに、補間の性質を維持したまま部分修正を行うことは大変難しい。それは、制御点が局所的振舞いをする変数であり、通過点が大域的振舞いをする変数であるうえに、両変数が従属関係にあるからである。

そこで近年、 B -スプライン補間曲線の各曲線分に節点挿入か次数上げ²⁾をして得られる付加制御点と通過点とを、ともに局所性のある新たな制御点 (形状を記述・制御する独立な変数) とする曲線が次のように研究されてきた。

節点挿入法によって $B2$ -スプラインが導入されて³⁾、 Bn -スプラインへと一般化された⁴⁾。具体的には、 $B2$ -および $B3$ -スプラインを通過点を与えると決まる局所性のある補間曲線とするブレンド関数が導かれた⁵⁾。これに対して、著者らもすでに、付加制御点を近傍通過点列から決める別法を示し⁶⁾、さらに、大域性のある従来の3次の B -スプライン補間曲線から最も局所性の強い $B2$ -スプライン (補間) 曲線⁵⁾へと、系統的に局所性を制御できる曲線へと発展させた¹⁾。

次数上げ法によってノンユニフォーム $2m$ 次の S -スプラインが提案された^{7), 8)}。そして、付加制御点を近傍通過点列から決める考え方と例も示された^{7), 8)}。ほかに、多重節点のスプライン補間における節点決定法⁹⁾が研究されたし、一般的な Catmull-Rom スプラインも以前から知られている¹⁰⁾。しかし、これら後者のスプライン曲線は前者と異なるクラスの曲線となるために、必ずしも同一には論じられていない。

そこで本研究では、ユニフォーム3次の B -スプライン補間曲線を拡張するために、両クラスの曲線のうち直接関係があるユニフォームな4次の S -スプライン曲線と3次の $B2$ -スプライン曲線に限って論ずる。まず2章で、基礎となる両スプライン曲線を主にブレンド関数の立場から比較する。3.1節で、両スプライン曲線に局所性を系統的に制御する方法¹⁾を適用して自由度を制約してゆく。この制御法と従来の B -スプライン補間曲線との関係を解析して、実質的な制御範囲を明らかにする。3.2節で、通過点を唯一の制御点とする純粋な補間曲線となった両スプラインのブレンド関数を調べて、局所性の制御法と次数上げおよび節点挿入との関係を解析する。3.3節で、

不特定個の通過点の間に従属関係を持ち込むことによる局所性の制御法が、境界近傍でも一貫して利用できるような新しい境界条件について述べる。3.4節で、従来法と比較する。基本的考え方、ほかに考えられる方法について論ずる。4章で、曲線例によって両スプライン補間曲線の相違と一致を明示する。曲線上の好きなところで好きなように局所性を制御した例を与える。

以後、特にことわらない限り、「ユニフォームな」スプラインを対象としている。

2. S -および $B2$ -スプライン曲線

ここでは3章で使うために、3次の B -スプライン補間曲線に節点挿入と次数上げをして、3次の $B2$ -スプラインおよび4次の S -スプライン曲線を導いて、これら曲線間の関係と性質をまとめて述べる。簡単化のために、特にことわらない限り次のような無限に続く点列を考える。したがって、添字の範囲を省略する。図1参照。

- 与通過点列 $\dots, p_i, p_{i+1}, \dots,$
- B -スプライン制御点列 $\dots, c_i, c_{i+1}, \dots,$
 - 節点挿入後の制御点列 $\dots, \hat{d}_{2i}, \hat{d}_{2i+1}, \dots,$
 - 次数上げ後の制御点列 $\dots, \hat{d}_{2i}, \hat{d}_{2i+1}, \dots,$

奇数番の点 \hat{d}_{2i+1} 、 \hat{d}_{2i+1} が付加制御点である。通過点と B -スプライン制御点の関係式 (3), (7) を使って \hat{d}_{2i} 、 \hat{d}_{2i} を p_i に置き換えることによって3次の B -スプライン曲線 (1) と2重節点の4次の B -スプライン曲線 (5) は、それぞれ $B2$ -スプライン (2) と S -スプライン曲線 (6) に変換される。

2.1 $B2$ -スプライン曲線

比較の便宜上、節点列を $u_{2i}=i, u_{2i+1}=i+1/2, i=\dots, -1, 0, 1, \dots$ とする。 u_i は d_i に対応する。

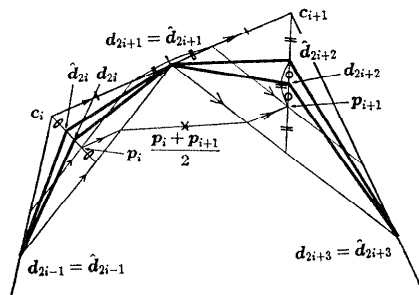


図1 B -スプライン補間曲線と $S/B2$ -スプライン曲線の関係

Fig. 1 Relation between interpolating B -spline curve and $S/B2$ -spline curves.

$$\mathbf{r}(u) = \sum_i e(u-u_i) \mathbf{d}_i, \quad (1)$$

$$= \sum_i g(u-i) \mathbf{p}_i + \sum_i h(u-i) \mathbf{d}_{2i+1}. \quad (2)$$

$$\mathbf{d}_{2i-1} + 4\mathbf{d}_{2i} + \mathbf{d}_{2i+1} = 6\mathbf{p}_i. \quad (3)$$

$$\begin{cases} g(u) = \frac{3}{2}e(u), \\ h(u) = -\frac{1}{4}e(u) + e(u-1/2) - \frac{1}{4}e(u-1). \end{cases} \quad (4)$$

3 次の B-スプライン関数は

$$\begin{cases} e(t/2+1/2) = \frac{1}{6}(1-t)^3, \\ e(t/2) = \frac{1}{2}t^3 - t^2 + \frac{2}{3}, \\ e(t/2-1/2) = -\frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{6}, \\ e(t/2-1) = \frac{1}{6}t^3, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1.$$

2.2 S-スプライン曲線

多重度 2 の節点列を $u_i = i, i = \dots, -1, 0, 1, \dots$ とする。 u_i は \mathbf{d}_{2i} に対応する。

$$\mathbf{r}(u) = \sum_i \ell(u-i) \mathbf{d}_{2i} + \sum_i f(u-i) \mathbf{d}_{2i+1}, \quad (5)$$

$$= \sum_i \hat{g}(u-i) \mathbf{p}_i + \sum_i \hat{h}(u-i) \mathbf{d}_{2i+1}. \quad (6)$$

$$\mathbf{d}_{2i-1} + 2\mathbf{d}_{2i} + \mathbf{d}_{2i+1} = 4\mathbf{p}_i. \quad (7)$$

$$\begin{cases} \hat{g}(u) = 2\ell(u), \\ \hat{h}(u) = \frac{1}{2}\ell(u) + f(u) - \frac{1}{2}\ell(u-1). \end{cases} \quad (8)$$

全節点が多重量度 2 である 4 次の B-スプライン関数は

$$\begin{cases} f(t+1) = \frac{1}{4}(1-t)^4, \\ \ell(t) = -\frac{3}{2}t^4 + 4t^3 - 3t^2 + \frac{1}{2}, \\ f(t) = \frac{5}{2}t^4 - 5t^3 + \frac{3}{2}t^2 + t + \frac{1}{4}, \\ \ell(t-1) = -\frac{3}{2}t^4 + 2t^3, \\ f(t-1) = \frac{1}{4}t^4, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1.$$

2.3 両スプライン曲線の性質

曲線の性質を調べるために S-および B2-スプライン曲線のブレンド関数を導いたけれども、実用上は逆に、式(3)、(7)を使って S-あるいは B2-スプライン曲線を B-スプライン曲線に変換して生成するのが合理的である。

点列が図 1 のような位置関係にあって隣接通過点間

が 3 次式となるための (図からも導ける) 次の関係式を満たしているとき、これら 3 つの B-スプライン曲線と S-および B2-スプライン曲線は一致する。

$$\begin{cases} \mathbf{d}_{2i-1} + 4\mathbf{d}_{2i+1} + \mathbf{d}_{2i+3} = 3(\mathbf{p}_i + \mathbf{p}_{i+1}), \\ \mathbf{d}_{2i+1} = \mathbf{d}_{2i+3} = \frac{\mathbf{c}_i + \mathbf{c}_{i+1}}{2}. \end{cases} \quad (9)$$

ブレンド関数 $g(u), h(u)$ と $\hat{g}(u), \hat{h}(u)$ は図 2 のようなグラフとなり、局所台 (恒等的にゼロとなる区間を除いた領域) がそれぞれ 4, 6 区間と 2, 3 区間とである。したがって、新制御点 $\mathbf{p}_i, \mathbf{d}_{2i+1}, \mathbf{d}_{2i+3}$ はすべて局所性のある変数である。

通過点にかかる $g(u), \hat{g}(u)$ は B-スプラインと同形の非負の関数であるが、付加制御点にかかる $h(u), \hat{h}(u)$ は補間曲線のブレンド関数 (図 3) に似て負の値をとる。したがって、これらの関数を重み係数とする重心結合として表される両スプライン曲線は、凸結合として表される B-スプライン曲線や Bézier 曲線がもっているような、形状制御のために好ましい凸包性をもっていない。しかも、従来の補間曲線や B-スプライン曲線の場合とは逆に、通過点によるよ

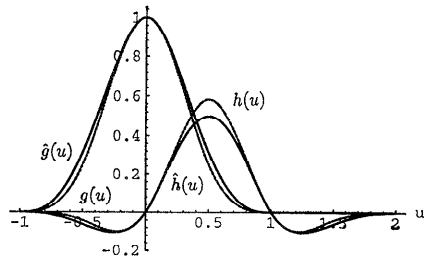


図 2 S/B2-スプライン曲線のブレンド関数 Fig. 2 Blending functions of S/B2-spline curves.

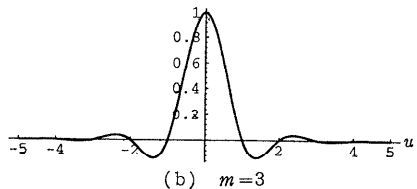
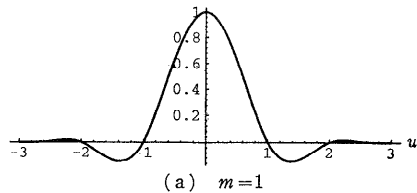


図 3 B2-スプライン補間曲線のブレンド関数 Fig. 3 Blending functions of interpolating B2-spline curve.

りは付加制御点による形状制御の方に不安定さが内在する。また、 S -スプライン曲線は、付加制御点にかかる $\hat{h}(u)$ が相対的に小さく、通過点にかかる $\hat{g}(u)$ が相対的に大きいので、どちらかといえば好ましい傾向をそなえている。

3. S -および $B2$ -スプライン補間曲線

すでに $B2$ -スプライン曲線に適用した局所性を系統的に制御する方法¹⁾について新たな知見を加えて簡単に述べる。そしてこれを S -スプライン曲線にも適用して、得られる両スプライン補間曲線の関係と性質について明らかにする。2.3 節で述べたように、付加制御点による形状制御には不安定さが内在する。この微妙な制御に局所性の制御法が1つのガイドラインを与えると考えられる。

3.1 付加制御点の決定法

従来の3次の B -スプライン補間曲線を得るための制御点と通過点に関する連立方程式(10)の解¹⁾を使って、式(9)を満たす解が次のように得られる。

$$c_{i-1} + 4c_i + c_{i+1} = 6p_i. \quad (10)$$

$$d_{2i+1} = \hat{d}_{2i+1} = \sqrt{3} (1+\alpha) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{p_{i-j} + p_{i+j}}{2} \alpha^j, \quad (11)$$

$$\alpha = -2 + \sqrt{3} = -0.2679492.$$

無限級数を α の m 次で打ち切って、そこまでの通過点の重心結合を付加制御点 $d_{2i+1,m}$ と定めることにする。

$$d_{2i+1} = \hat{d}_{2i+1} = d_{2i+1,m} = \frac{1-\alpha}{1-\alpha^{m+1}} \sum_{j=0}^m q_{i,j} \alpha^j, \quad (12)$$

$$q_{i,j} = \frac{p_{i-j} + p_{i+j+1}}{2}, \quad j=0, 1, \dots, m.$$

両スプライン曲線は通過点を唯一の制御点とする純粋な補間曲線となったので、以後、 S -スプライン補間曲線、 $B2$ -スプライン補間曲線と呼ぶことにする。

m を ∞ にすれば両スプライン補間曲線は従来の3次の B -スプライン補間曲線と一致する。 m を大きな値から小さな値へと変化させれば、大域性のある曲線から局所性の強い曲線へと系統的に制御できる。必要なら、各点 d_{2i+1} ごとに m_i を指定するなり、 p_{i-m_i} から p_{i+m_i} までの重心結合に変更するなりしてもよい。すなわち、各曲線分ごとに1つの整数、あるいは2つの整数の組を要素とするリスト、

$$m \text{ ベクトル: } \{\dots, m_i, \dots, (m_{i_s}, m_{i_r}), \dots\},$$

を与えることができる。

式(12)のように無限級数を打ち切ることが式(9)に

およぼす影響を解析すれば、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6} d_{2i-1,m} + \frac{4}{6} d_{2i+1,m} + \frac{1}{6} d_{2i+3,m} \\ &= \frac{1}{1-\alpha^{m+1}} \left[q_{i,0} + \frac{1-\alpha}{6} \alpha^m (-\alpha q_{i,m} + q_{i,m+1}) \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

m が 4, 5 のとき、右辺の各点の重み係数は順に、

$$m=4; 0.998621, \quad 0.000291, \quad 0.001088,$$

$$m=5; 1.000370, \quad -0.000078, \quad -0.000292.$$

となる。したがって、 $m=5$ なら両補間曲線が従来の B -スプライン補間曲線と一致するための関係式(9)を 0.1% 以内の誤差で満たすことになる。これは局所性の実質的な制御範囲の目安を与えるものと考えられる。

3.2 両スプライン補間曲線の性質

$B2$ -スプライン補間曲線のブレンディング関数は、図3のようになる。 S -スプライン補間曲線のものもほとんど同形となるので、図4に差をとって違いを明示した。両ブレンディング関数は区間 $[-m, -1]$, $[1, m]$ でまったく一致する。したがって、 m を大きくすると一致する区間が広がるとともに両関数の差も急速に小さくなる。両スプライン補間曲線は $m=0, 1, 2$ といった局所性の強いところで異なり、その他のところではほぼ一致する。しかし、3.1 節末でみたように $m=5$ くらいにならないと従来の B -スプライン補間曲線には一致しない。

この点をより詳しくみるために、両スプライン補間曲線の p_0 にかかるブレンディング関数を B -スプラインで表すための制御点を求める。 p_i の x 成分を i とし、 y 成分を $i=0$ のときに1でその他のときに0とする。簡単のために d_i の y 成分を d_i と書いて、ゼロ以外の値を求めると、

$$\begin{aligned} d_{2i+1} &= d_{2i-1} \\ &= \frac{1-\alpha}{1-\alpha^{m+1}} \frac{1}{2} \alpha^i, \quad i=0, \dots, m. \end{aligned} \quad (14)$$

偶数番目の付加制御点 d_{2i} はそれぞれ式(3), (7)によって求まる。式(14)における y 座標値が m を無限大にしたときのものと同比例することから予想できるように、区間 $[-m, -1]$, $[1, m]$ 内の各付加制御点 d_{2i+1} が式(9)を満たして両関数が同一の3次式となることがわかる。

3.3 境界条件

有限個の通過点からなる実用的な補間問題においても、式(12)が全曲線にわたって成り立つならば都合がよい。対象が閉じた曲線以外ならば、次のような各

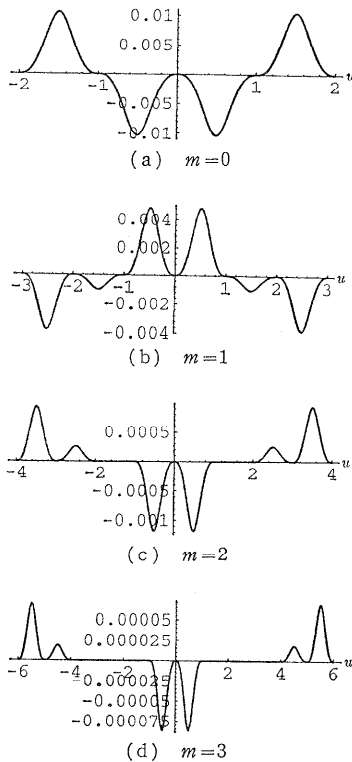


図4 S-スプライン補間曲線のブレンディング関数引く
B2-スプライン補間曲線のブレンディング関数
Fig. 4 Blending function of interpolating S-spline
curve minus blending function of inter-
polating B2-spline curve.

$m+1$ 個の仮定の通過点によって境界条件を与えることができる。これは、同じように仮定通過点を使っても、従来の境界条件の与え方^{20), 12)}とは違う。本研究では、 $2m+2$ 個の通過点間に式(12)のような従属関係を導入しているからである。

- 自然終端条件 (端点曲率ゼロ): 端点を中心に与通過点列に点対象な仮定通過点列を置く。
- 端点接線方向指定条件: 端点での接線に垂直に置かれた鏡に対する与通過点列の鏡像としての仮定通過点列を置く。接線方向を与えないときには、ベッセルの終端条件²¹⁾として得られる接線ベクトルを代用できる。

3.4 従来の付加制御点決定法との比較

3.1 節で述べた方法を他の方法と比較・検討する。すでに提案されている付加制御点の決定法は次のように分類できる。

I 近傍2通過点から決める⁵⁾。

$$\mathbf{d}_{2i+1} = \mathbf{q}_{i,0}. \quad (15)$$

II 近傍4通過点から決める。

(a) 線形式^{6), 7)}。

$$\mathbf{d}_{2i+1} = \hat{\mathbf{d}}_{2i+1} = \frac{5}{4} \mathbf{q}_{i,0} - \frac{1}{4} \mathbf{q}_{i,1}. \quad (16)$$

(b) 非線形式⁸⁾。

$$\hat{\mathbf{d}}_{2i+1} = \mathbf{q}_{i,0} + (\mathbf{t}_i - \mathbf{t}_{i+1}) \frac{|\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i|}{6}, \quad (17)$$

$$\mathbf{t}_i = \frac{\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_{i-1}}{|\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_{i-1}|}.$$

I は別の形で提案されたものを解釈し直したものである。本方法の $m=0$ の場合と一致する。

(a) に対応する本方法 ($m=1$) と、重み係数を小数点以下3桁までの精度で有理化したものは次のようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{2i+1,1} &= \frac{1}{1+\alpha} \mathbf{q}_{i,0} + \frac{\alpha}{1+\alpha} \mathbf{q}_{i,1} \\ &\equiv \frac{56}{41} \mathbf{q}_{i,0} - \frac{15}{41} \mathbf{q}_{i,1}. \end{aligned} \quad (18)$$

重みをさらに切り捨てて近似すれば式(16)と一致する。

(b) は FMILL 法による通過点での接線推定値を使っている。曲線分がなるべく低次の曲線に近くなるように、そして、通過点列が直線上にあるときに生成曲線も直線となるように考慮しているという。対応する本方法 ($m=1$) もいわゆる直線再現性を有するし、次のように整理すれば、別の接線推定値を使っていることがわかる。

$$\mathbf{d}_{2i+1,1} = \mathbf{q}_{i,0} + \frac{\alpha}{1+\alpha} \{(\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i) - (\mathbf{p}_{i+2} - \mathbf{p}_{i+1})\}.$$

どちらがより低次曲線に近いかについては、定量的に評価する基準を見いだせないで何ともいえない。

対象範囲の通過点の間の非線形の関係をうまく使えば、計算量は増すけれども、特徴ある曲線生成法を導ける可能性はある。その意味では、区分3次の C^1 補間曲線として知られるいくつかの方法²⁾によって決まる、各3次の曲線分の Bézier 制御多角形の中央の辺の中点を、付加制御点とすることが考えられる。特徴ある C^1 補間曲線としての性質は比較的保存されると思われる。

現状では、付加制御点をどう決めるべきかの決定的な評価手段はない。著者らの方法は、I の方法による B2-スプラインから従来の3次の B-スプライン補間曲線までを含むように系統的に局所性を制御できる点で優れている。

4. 曲線例

図 5, 6, 7 で白丸は通過点である。図 5 は m を 0, 1, 2, 3 としたときの曲線例である。実線は S -スプライン補間曲線で、点線が $B2$ -スプライン補間曲線である。両曲線は $m=2$ ではほぼ一致し、 $m=3$ では違いが見いだせない。

図 6 は、図 5 における $m=1, 2$ のときの曲線の右下部分を拡大して詳細に比較したものである。実線は S -スプライン補間曲線で白抜き太線が $B2$ -スプライン補間曲線である。図 5, 6 から曲線の凸部分で、 m の

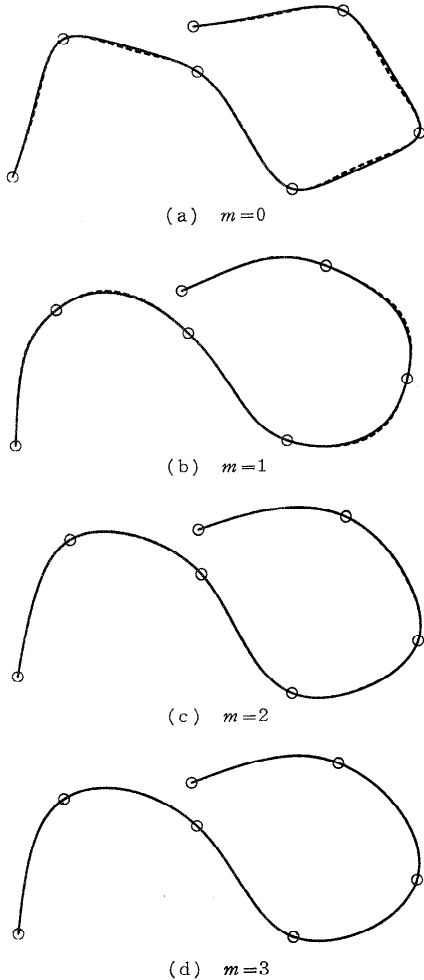


図 5 S - $B2$ -スプライン補間曲線の比較、実線： S -スプライン補間曲線、点線： $B2$ -スプライン補間曲線
Fig. 5 Comparison of interpolating S - $B2$ -spline curves, solid lines: interpolating S -spline curve, dotted lines: interpolating $B2$ -spline curve.

増大とともにより凸側にいく曲線が S -スプライン補間曲線から $B2$ -スプライン補間曲線へ、またその逆にと交互にいれ代わることがわかる。

これは次のように理解できる。式 (12) において、 α は負の数なので、制御点 $\mathbf{a}_{2i+1,m}$ は中点 $\mathbf{a}_{i,0}$ にはじまり、次の中点 $\mathbf{a}_{i,1}$ との外分点に変わり、さらに次の中

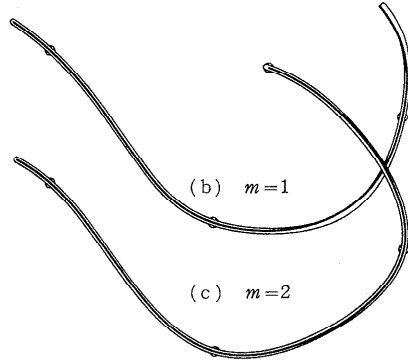
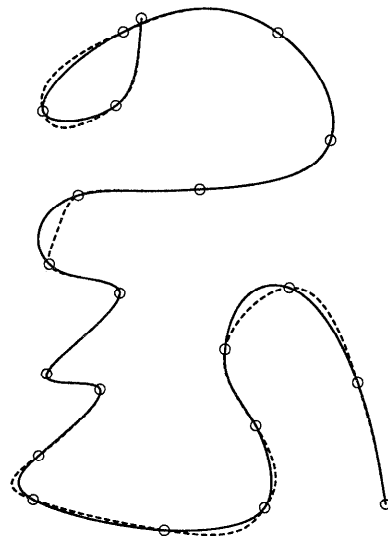


図 6 S - $B2$ -スプライン補間曲線の詳細比較、実線： S -スプライン補間曲線、白抜き太線： $B2$ -スプライン補間曲線
Fig. 6 Detailed comparisons of both interpolating spline curves, solid lines: interpolating S -spline curves, outlined thick lines: interpolating $B2$ -spline curves.



dotted line: $m = \{1, 1, 1, 1, 2, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 3\}$, solid line: $m = \{1, 2, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 2, 2, 2, 1, 2, 3\}$.

図 7 m ベクトルによる S -スプライン補間曲線の形状制御
Fig. 7 Shape control of interpolating S -spline curve by m vector.

点 $q_{i,2}$ との内分点に変わるといったように、交互に内分、外分を繰り返しながら点 $d_{2i+1,\infty}$ へと近づいてゆく。したがって、中点 $q_{i,1}$ と $q_{i,2}$ が p_i, p_{i+1} を通る直線の同じ側にあれば $m=1$ のときには中点側とは反対の側に大きく移動し、 $m=2$ のときには逆に、中点の側に揺り戻されるように移動する。このことと、2章でみたように、 B_2 -スプライン曲線の付加制御点にかかるブレンド関数が S -スプライン曲線のそれに比べて、大きく影響をおよぼすためである。

図7は比較的变化があつて局所性の強い曲線の例である。左上から始まる曲線の m ベクトルと変更後の m ベクトルを添えている。 m_i をいろいろ変えて手軽に形状制御できることがわかる。もちろん、周辺から遊離して極端に小さい、あるいは大きい m_i の値を設定することは、あまり実際的ではない。曲線に沿う m_i の値の変化に合わせて値を変えていくのがよいと考えられる。

5. ま と め

4 次の S -スプライン曲線を用いて従来の3次の B -スプライン補間曲線を拡張して、局所性を系統的に制御できる C^2 補間曲線を導き、3次の B_2 -スプライン曲線を用いた同様の曲線と比較した。その結果、以下のことが明らかとなった。

1. 基礎となる S -スプライン曲線と B_2 -スプライン曲線の付加制御点による形状制御には、それらにかかるブレンド関数が負値もとるために慎重さが要求される。局所性の制御法はその一つのガイドラインとして機能しうる。
2. 局所性を制御できる両スプライン補間曲線は、大域性の強いところではほぼ一致し、局所性の強いところで異なる。そこでは S -スプライン補間曲線の方が実用上好ましいと思われる形状となる。
3. 両スプライン補間曲線のブレンド関数は局所台の中央と両端の各2 (通過点間の) 区間を除いて、付加された4次の項や節点は消失して完全な3次式となって一致する。
4. 隣接通過点間の曲線分を近傍十数個以上の通過点から決めるようにすると、両スプライン補間曲線が元の B -スプライン補間曲線と一致するための関係式を誤差0.1%以内で近似する。それは局所性の実質的な制御範囲の目安を与える。

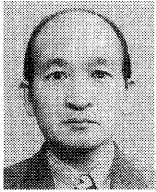
今後、局所性の強い B_2 -スプライン補間曲線に専用の付加制御点の決め方を検討していく予定である。

参 考 文 献

- 1) 黒田 満, 古川 進, 伊藤 誠: 局所性をもつ3次の C^2 連続なスプライン補間曲線, 1991年度精密工学会秋季大会講演論文集, pp. 797-798 (1991).
- 2) Farin, G. (木村文彦監修, 山口 泰監訳): CAGD のための曲線・曲面理論—実践的利用法—, p. 330, 共立出版 (1990).
- 3) Woodward, C. D.: B_2 -splines; A Local Representation for Cubic Spline Interpolation, In Kunii, T. L. (Editor), *Proc. CG International '87*, pp. 197-206, Springer, New York (1987).
- 4) Krokos, M. A. and Slater, M.: Interactive Shape Control of Interpolating B -splines, *Computer Graphics Forum*, Vol. II, No. 3, pp. C-435-C-447 (EUROGRAPHICS '92) (1992).
- 5) Kai-Ching Chu: B_3 -splines for Interactive Curve and Surface Fitting, *Computer & Graphics*, Vol. 14, No. 2, pp. 281-288 (1990).
- 6) 古川 進, 伊藤 誠, 黒田 満, 清水誠治: 自由曲線, 曲面の生成時における制御点決定の一手法, 精密工学会誌, Vol. 58, No. 4, pp. 715-719 (1992).
- 7) 河合利幸, 藤田卓志, 大村皓一: 2重節点をもつスプライン基底の一構成法, 信学論 (D), Vol. J 71-D, No. 6, pp. 1149-1150 (1988).
- 8) 藤田卓志, 岸 良行, 栗山 繁, 河合利幸, 大村皓一: 多重節点を持つスプライン基底関数を用いた曲面補間法, テレビジョン学会技術報告 ITEJ Technical Report, Vol. 12, No. 9, pp. 7-12 (1988).
- 9) 吉本富士市, 杉山武司: 多重節点のスプライン関数を用いた補間, 情報処理学会論文誌, Vol. 33, No. 12, pp. 1536-1544 (1992).
- 10) Catmull, E. and Rom, R.: A Class of Local Interpolating Splines, In Barnhill, R. and Riesenfeld, R. (Editors), *Computer Aided Geometric Design*, pp. 317-326, Academic Press, Orlando (1974).
- 11) 穂坂 衛, 黒田 満: CADにおける曲線曲面の創成について, 情報処理, Vol. 17, No. 12, pp. 1120-1127 (1976).
- 12) Barsky, B. A.: End Conditions and Boundary Conditions for Uniform B -Spline Curve and Surface Representations, *Computers in Industry*, Vol. 3, pp. 17-29 (1982).

(平成5年5月26日受付)

(平成5年9月8日採録)



黒田 満 (正会員)

昭和 18 年生。昭和 40 年岐阜大学工学部卒業。同年同大学工学部助手。昭和 56 年豊田工業大学制御情報工学科講師。現在助教授。曲線・曲面理論、コンピュータ・グラフィックスの研究に従事。工学博士。精密工学会、日本機械学会、ACM などの各会員。



古川 進 (正会員)

昭和 19 年生。昭和 43 年山梨大学大学院修士課程修了。同年山梨大学工学部助手。講師を経て昭和 63 年より同助教授。CAD/CAM システム、立休の特徴抽出、曲線・曲面理論などの研究に従事。物流やロボットにも興味を持っている。工学博士。精密工学会、日本機械学会、設計工学会などの各会員。



木村 文彦 (正会員)

昭和 20 年生。昭和 49 年東京大学大学院博士課程修了。同年電子技術総合研究所パターン情報部入所。昭和 54 年より東京大学工学部精密機械工学科助教授。昭和 62 年より同教授。マン・マシン・システム、コンピュータ・グラフィックス、形状モデリング、CAD/CAM などの研究に従事。工学博士。IFIP-WG 5.2-5.2-5.3 委員。精密工学会、日本機械学会などの各会員。