

特性法による点列のミニマックス曲線近似

黒 住 祥 祐†

多数の点が与えられるとき、それらを曲線で近似する方法にミニマックス近似がある。ミニマックス近似は点から曲線までの距離の最大値を最小にする近似である。距離には y 軸方向の距離と点から曲線までの垂線長(ユークリッド距離)がある。任意の関数が与えられたとき、多項式により y 軸方向の距離のミニマックス近似を行う方法に最良近似がある。まず、最良近似の定義と解法について説明する。次に与えられた点と任意の曲線とのユークリッド距離によるミニマックス曲線近似を定義する。線分と円のミニマックス近似では、すでに解法があり、それらの成果からミニマックス近似の幾つかの性質について説明する。ミニマックス近似を任意の曲線に拡張するために、特性点と特性曲線を導入し特性法とよぶアルゴリズムを提案する。特性法は r 個のパラメータをもつ曲線に対し、距離の大きい順に $r+1$ 個の特性点を選び、特性点からの距離を小さくかつ等しくする数値計算法である。さらに、本方式の収束条件や処理時間について検討し、実際の計算例を示す。最後に、問題点や改良点を述べ、本方式の有用性について言及する。

Minimax Curve Approximation for Points by Characteristic Method

YOSHISUKE KUROZUMI†

We consider the problem of finding a curve which represents in an optimal way a set of given points in a plane. This can be done by the minimax approximation in which the maximum point-curve distance is minimized. For the point-curve distance there are two common choices; one is the distance along the y -axis, and the other is the Euclidean distance, i. e., the distance along the perpendicular from a point to the curve. The version of the approximation in terms of y -coordinates is referred to as the "best" approximation, which is simpler than the other version in terms of the Euclidean distance. We begin with describing the best approximation, and then proceed to the minimax approximation in terms of the Euclidean distance. Various features of the minimax approximation are illustrated by means of an example of a line-segment and a circle for which the solution is known. In order to apply the minimax approximation to arbitrary curves, we introduce the notion of characteristic point method. For a curve with r parameters the method minimizes and equalizes the largest $r+1$ distances. We also illustrate and discuss the convergence condition and processing time.

1. ま え が き

平面上の多数の点列を線分, 多項式, 円弧などで近似する曲線近似はグラフィックスや画像処理の分野で使われる。近似の評価基準として, 2乗和誤差, y 軸方向距離, ユークリッド距離などがある。2乗和誤差については最小2乗法として, すでに多くの成果が知られている。最小2乗法は計算が簡単であるが, 最大誤差の確定ができないことおよび区分的近似に適さない欠点がある¹⁾。 y 軸方向距離の最大値を最小にする方法として最良近似がある。最良近似は複雑な関数をも有理式で近似する関数近似で, ミニマックス近似のひとつである。しかし, 座標軸の方向に依存することと与

えられた点とのミニマックス距離でない欠点がある²⁾。

与えられた点と近似曲線とのユークリッド距離の最大値を最小にするミニマックス近似には, 曲線の種類により次の方法が知られている。ミニマックス線分近似では, キャリパー法があり計算幾何学の凸包問題に帰着させ, 最小値の解を求めることができる³⁾。ミニマックス円(弧)近似では, 最大傾斜法があり数値計算により近似解を求めることができる⁴⁾。そのほか, ユークリッド距離を対象としたものに, 3次多項式との誤差をメッシュ間隔で近似したもの⁵⁾, 2次有理 Bezier 曲線(円錐曲線)との誤差について誤差が小さいとして1次の項までで近似した⁶⁾例がある。

このほかの曲線についての一般的なミニマックス近似の解法は提案されていない。

本文では, まず最良近似を説明し, 次に与えられた

† 京都産業大学
Kyoto Sangyo University

点に対する任意の曲線によるミニマックス近似を定義し、その数値解法を提案する。

2. ミニマックス関数近似 (最良近似)

ミニマックス関数近似は次式(1)のように、任意の関数 $f(x)$ と $n+1$ 個のパラメータをもつ近似関数 $g(x)$ との誤差の最大値を最小にする方法で、最良近似とも呼ばれる。

$$e = \min_{c_i (i=0,1,\dots,n)} \max_{a < x < b} |f(x) - g(x)| \quad (1)$$

近似関数 $g(x)$ として有理式、誤差として絶対誤差や相対誤差を含む一般の重みつき誤差に対する解法がすでに知られている。ここでは簡単のために、近似関数を多項式とし絶対誤差に対する最良近似の定義と解法の考え方を説明する⁷⁾。

[定義] 関数 $f(x)$ を n 次の多項式 $g(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n$ により近似するとき、誤差関数 $e(x) = g(x) - f(x)$ が区間 $a < x < b$ に属する $n+2$ 個の点 $x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1}$ において、絶対値が同じで正負交互の値 ($\neq 0$) $e_0, -e_1, \dots, (-1)^{n+1}e_{n+1}$ となる $g(x)$ を最良近似式とする。このような誤差の絶対値 e を極値と呼び、極値をもたらず $n+2$ 個の点 $x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1}$ を極値点という。また、最良近似式は唯一である。

[解法] $f(x)$ が微分可能ならば、 $e(x)$ が $n+2$ 個の極値点において誤差が等しいことおよび極値をもつことから次の $2n+4$ 個の式(2)をうる。

$$f(x_i) - \sum_{k=0}^n c_k x_i^k = (-1)^i e \quad (i=0, 1, \dots, n+1) \quad (2)$$

$$f'(x_i) - \sum_{k=1}^n c_k k x_i^{k-1} = 0$$

未知数の個数は係数 c_i が $n+1$ 個、極値点が $n+2$ 個と極値 e の1個で合計 $2n+4$ 個である。つまり、 $2n+4$ 元連立方程式となるが、一般には非線形であり、初期値を与えて反復計算により近似解を求めることになる。このとき $n+2$ 個の極値をもつような第一次近似関数の決定が困難であるが、チェビシェフ近似などの方法²⁾や補間点操作の方法⁸⁾が提案されている。

最良近似は極値点からの y 軸方向距離のミニマックス近似であり、本文の目的である与えられた点からのユークリッド距離を対象するミニマックス曲線近似ではない。しかし、定義と解法に類似の方法が点列のミニマックス近似にも適用できる。

3. ミニマックス曲線近似の定義

n 個の異なる点 $p_i(x_i, y_i)$ ($i=1, 2, \dots, n$) と r 個のパラメータ q_j ($j=1, 2, \dots, r$) をもつ滑らかな曲線 $f_q(x, y) = 0$ において、各点 p_i から曲線 f_q への最短距離を e_i とする。この最短距離 e_i の最大値を最小にする f_q を求めることがミニマックス曲線近似であり、求められた最小距離がミニマックス距離である。 \mathcal{R} を実数全体、 e をミニマックス距離として次式(3)で示される曲線のパラメータ q_j を求めることと同等である。

$$e = \min_{q_j (j=1, 2, \dots, r) \in \mathcal{R}} \max_{i (i=1, 2, \dots, n)} e_i \quad (3)$$

ある点から曲線までの距離を求めるには、その点から曲線に接線と直交する法線を下ろし、交点までの長さを求める。

直線では、ある点から直線への法線は1本である。しかし、一般の曲線では、ある点から曲線への法線は複数本ある。すべての法線を計算し、そのうちの最小値を求め、最短距離を求める必要がある。ここでは、法線が多数あっても、最短のみに注目し、最短距離のことを距離とする。

4. ミニマックス曲線近似の特徴

与えられた点の個数を n 、曲線パラメータの個数を r とする。 $n=r$ ならば未知数と式の個数が一致するから、すべての点を通る曲線があり、誤差は $e_i = 0$ となる。 $n < r$ ならばパラメータが過多であり、さらに低次の曲線で近似できる。普通は $n > r$ であり、実用的には $n \gg r$ である。この場合 n 個の点から任意に r 個を選び、それらの点を通る曲線は存在するから、ミニマックス距離 $e \geq 0$ となる曲線は存在する。つまり、ミニマックス近似曲線は唯一とは限らないが、必ず存在する。

さらに、直線や円のミニマックス近似の例から次の性質が知られている⁹⁾。

- (a) n 個の点が線対称や点対称に並ぶと、ミニマックス距離 e が同じで近似曲線は複数個になることがある。
- (b) n 個の点がすべて近似曲線上に並ぶと、ミニマックス距離は $e = 0$ で近似曲線は1個である。

n 個の点の位置により、近似曲線の個数は変化するの
で、ミニマックス距離 e を

$$e = e(q_1, q_2, \dots, q_r)$$

のように q_i の関数とすると、(a)では e は 0 でない同じ最小値を複数もち、(b)では e は 0 の最小値を 1 個もつ。(a)と(b)は与えられた点の位置としては極端な例で、普通はこれらの中間の点の配置となる。点の位置が(a)から(b)へ変わるにつれて、複数個の最小値は 1 個の最小値と幾つかの極小値に変わり、やがて極小値は変曲点となり、1 個の最小値のみとなり、最後に 0 の最小値となる。結局、ユークリッド距離による多数の点列に対するミニマックス曲線近似はいたるところ極小値をもつ場合がある非線形問題とみなすことができる。

5. 特性点と特性曲線

$r+1$ 個の点 $p_i(x_i, y_i)$ ($i=1, 2, \dots, r+1$) を与え、 r 個のパラメータ q_j ($j=1, 2, \dots, r$) をもつ曲線 $f_q(x, y)=0$ にたいし、各点 p_i からの距離 e_i をすべて等しくする。これは次式(4)となる。

$$e=e_1=e_2=\dots=e_{r+1} \tag{4}$$

r 個のパラメータにたいし、式(4)から r 個の等式が得られるから、 r 元連立方程式となり図1のような解(近似曲線)を求めることができる。これら任意の $r+1$ 個の点を曲線の形状を特徴づけるために、特性点と呼び、特性点から等しい距離にある曲線を特性曲線とする。また、法線と曲線との交点を通過点とする。特性点は $r+1$ 個であるが、通過点はそのうちの r 個を選び、特性曲線を決定できる。特性点のうち最小の距離を与えるものが2章の極値点である。特性曲線には次のように安定な場合と不安定な場合がある。

(a) 安定な特性曲線

図2のように、特性曲線上の通過点を順にたどるとき、 $r+1$ 個の特性点が左右交互にあらわれるときは安定である。たとえば、通過点の隣り合う2点とそのほかの $r-1$ 点において、 $r-1$ 点を固定し隣り合う2点のうち1点からの距離が e より小となる位置を通る曲線を求めると、特性点は曲線の反対側にあるために残りの1点からの距離は

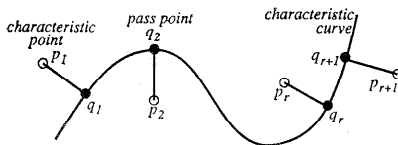


図1 特性点、通過点、特性曲線
Fig. 1 Characteristic points, pass points, characteristic curve.

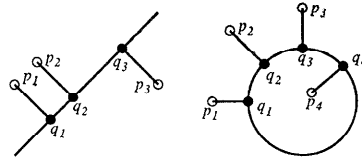


図2 安定な特性曲線
Fig. 2 Stable characteristic curve.

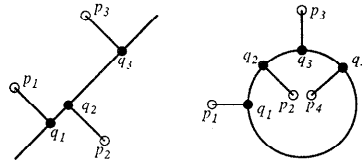


図3 不安定な特性曲線
Fig. 3 Unstable characteristic curve.

必ず e より大となる。この場合、 e は $r+1$ 個の点からの距離の極小値となる。

(b) 不安定な特性曲線

図3のように、特性点が一方に片寄るとき、片寄った2個の特性点と残りの $r-1$ 個の点において、通過点の $r-1$ 点を固定し、片寄った2点のうち1点からの距離が e より小となる位置を通る曲線を求めると、特性点が曲線の同じ側にあるために、残りの点からの距離も e より小とすることができる。このとき、さらに e の小さい安定な曲線を求めることができる。つまり、(a)の安定な特性曲線の条件を満足させる極小値が必ずある。

結局、 n 個の点から $r+1$ 個の特性点を選び、安定な特性曲線と距離 e を求めて、その他の点からの距離が e 以下であれば、ひとつの極小値を求めたことになる。これらの極小値をすべて求めれば最小値がわかり、ミニマックス近似曲線を得ることができる。この処理回数は n 個の点から $r+1$ 個を選ぶ組み合わせのみで nC_{r+1} 回あり実用的でない。また、極小値を求める連立方程式の解法も簡単でない。そこで、ある初期値から出発し、より小さい極小値を求める特性法を提案する。

6. 特性法のアルゴリズム

6.1 特性曲線処理

n 個の点を $p_i(x_i, y_i)$ ($i=1, 2, \dots, n$) とし、 r 個のパラメータをもつミニマックス近似曲線を求める。 n 個の点のうち r 個の点を通る点、通過点を通る曲線を特性曲線とする。誤差を評価するための微小量を d とする。

(a) 初期値設定

始めの r 個の点 p_i ($i=1, 2, \dots, r$) を初期値とし、これを通過点とする。

(b) 曲線の方程式

r 個の通過点を通る曲線すなわち特性曲線を求める。

(c) 距離とソート

n 個の点から特性曲線への距離を求め、距離の大きから小の順にソートする。このソートは第 1 位から第 $r+1$ 位まででよく、これらが特性点である。距離の第 1 位 (最大距離) を e_1 、第 $r+1$ 位を e_{r+1} とする。

(d) 終了判定条件

$e_1 - e_{r+1} \geq d$ が不安定な特性点があれば接近処理を行い、最大距離がより小さい通過点を求め、(b) から繰り返す。

$e_1 - e_{r+1} < d$ で安定な特性点ならば、その特性曲線をミニマックス近似曲線として終了する。

6.2 接近処理

$r+1$ 個の特性点を p_i ($i=1, 2, \dots, r+1$) とし、 p_i からの法線と曲線との交点である通過点を q_i ($i=1, 2, \dots, r+1$) とする。特性点の属性を入れる変数を z_i ($i=1, 2, \dots, r+1$) とする。属性は $z_i=1$ のとき安定な特性点、 $z_i=-1$ のとき不安定な特性点、 $z_i=0$ のときは特性点としないことを意味する。 p_i と q_i を (x, y) のベクトルとみなす。

(a) 特性点の属性 z_i ($i=1, 2, \dots, r+1$) をすべて初期値 1 とする。曲線にそって $r+1$ 個の通過点を順にたどり特性点を調べる。特性点がどちらかに片寄れば、片寄った特性点 (1 組のみ) のうち誤差の最大をもつ特性点の属性を $z_i=-1$ 、隣でより小さいほうの属性を $z_j=0$ とする。特性点が左右交互にあれば、誤差最小の特性点を $z_{r+1}=0$ とする。 $k=1$ とする。

(b) 新しい通過点を

$$q_i = p_i \times t + q_i \times (1-t) \quad (i=1, 2, \dots, r+1)$$

とし、通過点を通る曲線を求める。ただし

$$z_i=1 \text{ ならば } t=(1-e_{r+1}/e_i)/k$$

$$z_i=-1 \text{ ならば } t=1/k$$

(c) n 個の点から曲線への最大距離 e を求め、

$e \geq e_1$ ならば、 k を 2 倍し (b) から繰り返す。

$e < e_1$ ならば、最大距離がより小さい通過点があり、さらに特性点に接近した曲線を求め、接近処理を終了する。

7. 収束条件と処理時間

特性法は誤差の大きい順に r 個の特性点を探し、それら誤差を小さくして特性曲線が接近するような通過点を求め、すべてを第 $r+1$ 位の誤差に等しくする方法である。接近方法は幾つか考えられるが、任意の初期値から単調にしかも速やかに安定な特性点に収束する方法がよい。本方法では、上の終了判定条件により、最大誤差 e_1 は単調に減少する。また、

1. 特性点が片寄るときは図 4 (a) のように 1 個の不安定特性点 p_i があり、その点のみ p_i と q_i の間で最大距離を減少させるところを探す。

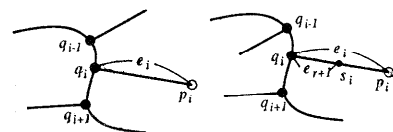
2. そのほかの場合は図 4 (b) のように p_i と q_i の間に $p_i s_i = e_{r+1}$ となる点 s_i を考え、 $q_i s_i$ 間で最大距離を減少させるところを探す。

ことにより、特性点の属性に対し接近距離を変えるために、初期値の誤差が大きく不安定な特性点があっても、必ず安定な特性点になる。また、接近処理で q_i を s_i にゆるやかに近づけると、はじめは e_1 が最大距離であるが、やがて他の e_j が最大距離となる。つまり、最大距離はまず減少しやがて増加し振動を始める。この減少する点を探すためには、区間が $q_i s_i$ と決まっているから 2 分法が最適である。なお、特性点が片寄るところでは p_i と q_i の間で大きく接近しないと安定化しないし、安定なところでは s_i と q_i の間で誤差が小となるように徐々に接近しないと発散する。

処理時間は上位 $r+1$ 個のソートと接近距離の和に反復回数を乗じた次式に比例する。

$$(n \times (r+1) + \text{接近処理}) \times \text{反復回数}$$

接近処理では 2 分法を使う。2 分法は区間を $1/2$ ずつするため、相対誤差を E とすると、 $\log_2 E$ 回以内で収束する。これは倍精度でも約 20 回以内である。しかし、全体の反復回数は与えられた初期値と点の状態により、大幅にかわり、一定しない。



(a) 不安定 (a) unstable (b) 安定 (b) stable

図 4 接近処理 Fig. 4 Approach process.

8. 計算例

本アルゴリズムによるミニマックス曲線近似の例を示す。図5は点20個に対する円近似の例である。×印は与えられた点、○印は特性点、●は通過点である。細い線は初期値で、太い線が近似曲線である。表1は与えられた点の個数を10から500まで変化させたとき、反復回数、処理時間とミニマックス距離との関係を示す。

使用計算機はパソコン NEC-PC 98 (クロック 20 MHz)、プログラムはCで倍精度演算を行った。なお最大傾斜法によるミニマックス距離も併記する。いずれの方法も極小値と近似円はほぼ同じであるが、処理時間は最大傾斜法⁴⁾がやや少ない。しかし、最大傾斜法では処理時間は点数、初期値、移動量に比例するが、特性法は2分法のため処理時間の推定は困難である。表1の50点と100点の間に反復回数と処理時間の逆転が見られ、200点と300点の間に極小値の逆転がある。いずれの方法も点数が多くなり、極小値が近接すると最小値でない値を求めることがわかる。

図6は3次多項式の例である。表2のように、円近似に比べ処理時間はきわめて大きい。この理由については次に説明する。

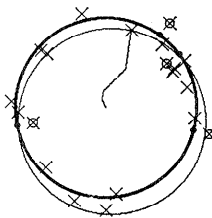


図5 円近似例 (20点)
Fig. 5 Example of circle approximation (20 points).

表1 円近似例 (10-500点)
Table 1 Examples of circle approximation (10-500 points).

与えられた 点数	反復回数 回	処理時間 秒	距離 特性法	距離 傾斜法
10	23	1	12.828	12.828
20	55	3	19.107	19.103
30	34	2	19.568	19.567
50	55	5	20.830	20.825
100	27	4	21.754	21.754
200	122	48	24.002	24.001
300	125	13	23.998	23.997
500	113	73	24.660	24.657

図7は20点の同じデータについて、直線、2次多項式、3次多項式、円および楕円の例である。表3に、パラメータ数、反復回数、処理時間、および誤差を示す。点列の形状は楕円の半分であるから、楕円

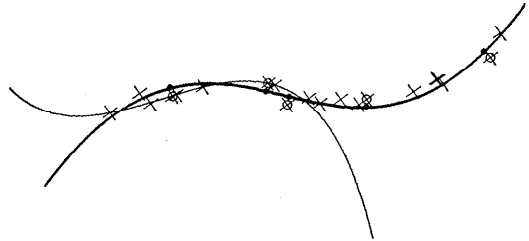


図6 3次多項式近似例 (20点)
Fig. 6 Example of 3rd order polynomial approximation (20 points).

表2 3次多項式近似例 (10-500点)
Table 2 Examples of 3rd order polynomial approximation (10-500 points).

与えられた 点数	反復回数 回	処理時間 秒	距離 特性法
10	157	75	5.073
20	68	84	10.029
30	70	130	12.531
50	196	222	14.229
100	154	970	14.238
200	134	1602	14.254
300	129	5016	14.257
500	355	14898	14.261

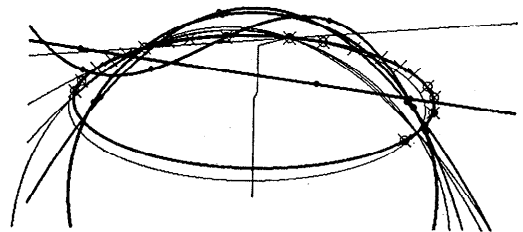


図7 各種の曲線近似例 (20点)
Fig. 7 Examples of curve approximation (20 points).

表3 各種の曲線近似例 (20点)
Table 3 Examples of curve approximation (20 points).

曲線の種類	パラメータ 数	反復回数 回	処理時間 秒	距離
直線	2	36	2	51.189
2次式	3	36	87	30.603
3次式	4	69	236	27.137
円	3	78	4	26.806
楕円	4	43	35	1.320

が最も誤差が小さく、直線が大となる。一般にパラメータが多くなれば誤差は小さくなる。しかし、3次式(4)と円(3)のように点の並び方によっては逆の場合もある。つまり、点の並び方により最適な曲線の種類は変わることがわかる。

9. 問題点

特性法は点と曲線への距離と通過点を通る曲線に注目するから、問題点は次に説明するように距離、通過点および曲線の存在にある。

1. 距離：距離は垂線の長さである。与えられた点から曲線への垂線は1次式と円は簡単であるが、ほかの曲線では正確な値を求めることが困難である。たとえば、 r 次の多項式では $r+2$ 次の代数方程式を解けばよい。これらの実数解をすべて求め、最短距離を与える交点を求めることになる。ところが、距離を求めることは曲線と円の接点を求めることと同等であり、曲率がほぼ同じところではきわめて悪条件となる。このとき、代数方程式の解の収束は遅く、しかも精度は悪い。また、実数解が複数の場合では、すべての実数解を求めないと、最短距離は得られないので計算量が多い。特性点の x 値が同じつまり y 軸に平行な特性点があると、2次以上の多項式では距離の誤差が大きくなる。前記の計算例では倍精度のDKA法で代数方程式のすべての解を求め距離を計算しているが、勾配が急なところでは収束は悪い。より高速な方法が望まれる。
2. 通過点： r 個のパラメータをもつ曲線を r 個の通過点により求めるから、通過点の位置により、曲線の精度に影響を与えることがある。たとえば、 $r-1$ 次の多項式では r 個の点を通ることにより、 r 元連立一次方程式を解けばよい。通過点の x 値が同じか近接するとき、行列式の値が0か0に近くなり悪条件となる。また、与えられた点は異なっても通過点が一致する場合がある。これは曲線の左右に線対称で与えられた点があるときで、異なる通過点は r 個より少なく、連立方程式は不定となり解けない。このような曲線を求めるためには2個の近接または同じ通過点の代わりに1個の通過点と直交条件を加える必要がある。
3. 曲線の存在：特性法は任意の点を通る滑らかな曲線があれば適用できる。滑らかなという意味は法

線が求められ距離が計算できること、異なる特性点から異なる通過点が求められ左右交互に特性点がある安定条件を満たすことである。つまり、1次微分までが連続であれば十分である。しかし、アステロイド $(x-u)^{2/3}+(y-v)^{2/3}=a^{2/3}$ のように尖点があっても、距離と曲線の内部外部が計算できれば近似は可能である。また、たとえば中心 (u, v) で長径、短径が a, b である楕円は $(x-u)^2/a^2+(y-v)^2/b^2=1$ である。ひし形状の4点を通る楕円はあり、パラメータ u, v, a, b は求まるが、三角形とその重心の4点を通る楕円は存在しない。つまり、5点の特性点から決まるミニマックス近似楕円がない場合がある。しかし、4点の特性点から決まるミニマックス近似楕円は存在する。このような曲線の場合、パラメータ r 個の曲線に対し個数を1個少なくした r 個の特性点に対するミニマックス近似を求めればよい。

4. 極小値と最小値：特性法はミニマックス誤差の極小値を求めているにすぎない。多くの場合、最小値かそれに近い極小値を求めているが最小値の保証はない。しかし、 r 個のパラメータをもつ曲線に対しては $r+1$ 個の点であれば最小値が求められる。 n 個の点の最小値を求めたいならば、 n 個から $r+1$ 個を取り出し、 nC_{r+1} 回の極小値を求め比較を行うことになる。

10. あとがき

ミニマックス曲線近似を定義し、その数値解法である特性法を紹介した。最良近似と1次式、円のミニマックス近似にはすでに解法があり、それらとの関係を説明するとともに特性法の実例を示した。特性法の特徴は直感的な方法で誤差を少なくする簡単なアルゴリズムにある。また、同じ方法で任意の曲線が求められることにある。

最近の画像処理では、画像の輪郭線を任意の曲線で近似することがある。曲線として、線分よりも円、円よりも多項式、そして円錐曲線やスプライン曲線へと各種の曲線が使われる⁹⁾⁻¹⁰⁾。しかし、誤差の計算が困難で、どの曲線が最適であるかの判定が一般に難しい。ミニマックス近似は誤差の最大値が指定できるので、区分的近似であっても、最適な曲線の選択が容易である。今後は、ミニマックス近似の高速化と接続点での連続条件の導入およびパラメータ数の異なる曲線による複合的区分近似の最適化を考えたい。また、特

性法は3次元にも拡張できるため、曲面にも応用してみたい。

参 考 文 献

- 1) Kurozumi, Y. and Davis, W.: Polygonal Approximation by the Minimax Method, *CGIP*, Vol. 19, pp. 248-284 (1982).
- 2) 大野 豊ほか: 新版数値計算ハンドブック, pp. 728-742, オーム社 (1990).
- 3) 浅野哲夫: 計算幾何学, pp. 79-80, 朝倉書店 (1990).
- 4) 黒住祥祐: ミニマックス線分近似と円弧近似, 情報処理学会論文誌, Vol. 30, No. 11, pp. 1434-1439 (1989).
- 5) 山崎一生, 鳥島 剛, 勝野進一: 区分的3次多項式を用いた文字輪郭線の近似, 情報処理学会論文誌, Vol. 31, No. 1, pp. 33-41 (1990).
- 6) 齊藤 剛, 穂坂 衛: 拡張した2次有理 Bezier 曲線の性質とその曲線近似法への応用, 情報処理学会論文誌, Vol. 31, No. 5, pp. 701-709 (1990).
- 7) A. ラルストン, P. ラビノヴィッツ共著 (戸田英雄, 小野令美共訳): 電子計算機のための数値解析の理論と応用<下>, pp. 292-300, ブレイン図書出版 (1986).
- 8) 山下真一郎: 区分的最良近似およびそのプログラム, 情報処理学会論文誌, Vol. 33, No. 9, pp. 1143-1151 (1992).
- 9) Imai, H. and Iri, M.: Computational-Geometric Methods for Polygonal Approximation of a Curve, *CVGIP*, Vol. 36, pp. 31-41 (1986).
- 10) Rossignac, J. R. and Requicha, A. A. G.: Piecewise Circular Curves for Geometric Modeling, *IBM J. Res. & Develop.*, Vol. 31, pp. 296-313 (1987).
- 11) 大和淳二, 入澤和義, 石井郁夫, 牧野秀夫: 重み

付け中点図面を用いた円抽出アルゴリズム, 信学論 (D), Vol. J72-D-II, No. 7, pp. 1009-1016 (1989).

- 12) Aoyama, H. and Kawagoe, M.: A Piecewise Linear Approximation Method Preserving Visual Feature Points of Original Figures, *CVGIP*, Vol. 53, pp. 435-446 (1991).
- 13) Meek, D. S. and Walton, D. J.: Approximation of Discrete Data by G^1 Arc Splines, *Computer-aided Design*, Vol. 24, pp. 301-306 (1992).
- 14) Goshtasby, A.: Parametric Representation of Digital Shapes by Gaussian Functions, *Computer-aided Design*, Vol. 24, pp. 659-665 (1992).
- 15) 塩野 充: 黒点ランダム抽出と重心を用いたハフ変換による円弧の検出実験, 信学論 (D), Vol. J75-D-II, No. 7, pp. 1195-1201 (1992).

(平成5年3月1日受付)

(平成5年9月8日採録)



黒住 祥祐 (正会員)

昭和15年生。昭和38年京都大学工学部数理工学科卒業。昭和43年同大学院修了。同年京都産業大学理学部講師。昭和54年同教授となり、現在京都産業大学工学部情報通信工学科教授。電子計算機の論理設計、マイクロプログラム、言語プロセッサなどの研究と開発に従事。最近では、グラフィックス、画像処理、形状処理などに興味をもっている。工学博士。著訳書「現代電子計算機ハードウェア」、「並列計算機」、「コンピュータ設計・製図」など。