

高次の動的 Voronoi 図とその応用

今井 桂子[†] 今井 浩^{††}

計算幾何学の分野では、近年、動的な対象物に対する研究が盛んになってきている。本稿では、平面上を動く点の集合に対する高次の Voronoi 図（高次の動的 Voronoi 図）を求めるアルゴリズムとその解析を行う。点の座標は1つのパラメタに関する多項式や有理式で表されており、その次数が点の数によらない定数である場合を考える。s を点の動き方を決める多項式や有理式によって定まる定数としたとき、m 次 (m ≥ 2) の Voronoi 図の場合、その位相変化の回数は $O(n^2\lambda_{s+m+3}(n))$ であり、 $O(n^2m\lambda_{s+m+3}(n)\log n)$ 時間で m 次の動的 Voronoi 図が構成できることを示す。ここで、 $\lambda_s(n)$ は (n, s) Davenport-Schinzel 列の最大長を表し、n に関して線形に近い関数である。また、対応の与えられた平面上の2つの点集合を回転や平行移動などの幾何的な変換によって最適な位置に当てはめる問題に、高次の動的 Voronoi 図が応用できることについても述べる。

Higher-Order Dynamic Voronoi Diagrams and Its Applications

KEIKO IMAI[†] and HIROSHI IMAI^{††}

The Voronoi diagrams for moving objects have been investigated in computational geometry. We extend the concept of the higher-order Voronoi diagram for n points in the plane to the one for the case that the coordinates are represented by polynomials or rational functions of a parameter. We show that the combinatorial complexity of this m -th higher-order dynamic Voronoi diagram is $O(n^2\lambda_{s+m+3}(n))$ and this diagram can be constructed in $O(n^2m\lambda_{s+m+3}(n)\log n)$ time, where s some fixed number determined by the degree of the parameter functions and $\lambda_s(n)$ is the maximum length of (n, s) Davenport-Schinzel sequence. Applications of the higher-order dynamic Voronoi diagram to geometric fitting problems are also touched upon.

1. はじめに

Voronoi 図は、計算幾何学において重要な基本的概念であり、その構成方法についても様々な手法が提案され、研究がなされてきた。これまでに、いろいろな種類の Voronoi 図が考えられているが、その内で最も基本的なものは平面上に与えられた n 個の点に対する Voronoi 図である。平面上の n 個の点 $p_i = (x_i, y_i)$ ($i=1, \dots, n$) が与えられたとき（これらの点を母点という）、 $d(p, p_i)$ を点 p と p_i の Euclid 距離とすると

$$V(p_i) = \bigcap_{i \neq j} \{p \mid d(p, p_i) < d(p, p_j)\}$$

を点 p_i に対する Voronoi 多角形という。 $V(p_i)$ ($i=1, \dots, n$) によって平面の分割が得られ、それらを Voronoi 図と呼ぶ。このような基本的な Voronoi 図は、最も母点 p_i に近い点を集めることによって平面を分

割したものであるといえる。各 Voronoi 多角形を次に近い母点がどれであるかによって、さらに分割することができ、それを Voronoi 図の細分と呼ぶ。細分は近さの順序を問題にするが、その順序を考慮せずに、平面上のある点から l 番目に近い母点 ($l=1, 2, \dots, m$) からなる m 個の点集合が一致する領域に平面を分割した Voronoi 図を m 次の Voronoi 図という。この m 次の Voronoi 図は $O(m^2n\log n)$ 時間で求められることが知られている。

Voronoi 図のロボティクス、グラフィックスなどへの応用を考えると、平面上の母点が動いている場合について考慮する必要が生じてくる。われわれはこの平面上に与えられた n 個の点が連続的に動いている場合の Voronoi 図に関する研究を行い、1つのパラメタによって平面内を動く点の集合に対する Voronoi 図を求める $O(n^2\lambda_{s+1}(n)\log n)$ のアルゴリズムが得られている^{?)}。点の座標はパラメタに関する多項式や有理式で表され、その次数は点の数によらない定数としている。ここで、 s は点の動き方によって定まる定数であり、 $\lambda_s(n)$ は (n, s) Davenport-Schinzel 列の最大長を表し、n に関して線形に近い関数である。動的

[†] 中央大学理工学部情報工学科

Department of Information and System Engineering, Faculty of Science and Engineering, Chuo University

^{††} 東京大学理学部情報科学科

Department of Information Science, Faculty of Science, The University of Tokyo

Voronoi 図を求めるとき、問題になるのは母点が動くことによって変化する Voronoi 図の位相を追跡することである。

本稿では、このような1つのパラメタによって平面内を動く点の集合に対する高次の Voronoi 図を求めるアルゴリズムとその解析を行う。 m 次 ($m \geq 2$) の Voronoi 図の場合、その位相変化の回数は $O(n^2 \lambda_{s+m+3}(n))$ であり、 $O(n^2 m \lambda_{s+m+2}(n) \log n)$ 時間で構成できることを示す。

1変数関数の最小値をとる関数を求めることは、Davenport-Schinzel 列と深く関係しており、かなり研究がなされている⁹⁾。多変数の場合は、まだ一般論が確立されておらず、2変数の場合でさえ、特殊な場合に結果が得られているだけである^{5),10)}。点が1つのパラメタに伴って動く場合の Voronoi 図 ($m=1$) を求めることは、 n 個の3変数関数の最小値をとる関数を求めることに帰着され、Davenport-Schinzel 列を用いて研究されてきた。本稿では高次の Voronoi 図を求めるため、3変数の関数の l 番目に小さい値をとる関数を求めるという問題を扱わなければならない。

2. m 次 の Voronoi 図

この章では、まず Euclid 距離を用いた m 次 Voronoi 図の定義を与え、その性質を述べる(詳しくは文献9)を参照)。まず、基本的な Voronoi 図 ($m=1$) の場合、Voronoi 多角形は、平面上の n 個の点 $p_i = (x_i, y_i)$ ($i=1, \dots, n$) が与えられたとき、 $d(p, p_i)$ を点 p と p_i の Euclid 距離とすると

$$V(p_i) = \bigcap_{i \neq j} \{p \mid d(p, p_i) < d(p, p_j)\}$$

によって定義されている。このとき、Voronoi 辺はその辺を共有する2つの Voronoi 多角形 $V(p_i), V(p_j)$ の母点である p_i と p_j から等距離にある点の軌跡、つまり線分 $\overline{p_i p_j}$ の垂直二等分線の一部である。

m 次 Voronoi 図とは、相異なる m 個の母点の集合の勢力圏を示すものである。 $\{p_i \mid i \in I\}$ ($|I|=m, I \subset \{1, \dots, n\}$) の Voronoi 領域 $V^{(m)}(I)$ は

$$\begin{aligned} V^{(m)}(I) &= \bigcap_{i \in I, j \notin I} \{p \mid d(p, p_i) < d(p, p_j)\} \\ &= \{p \mid \max_{i \in I} d(p, p_i) < \min_{j \notin I} d(p, p_j)\} \end{aligned}$$

で定義される(図1)。通常の Voronoi 図は1次 Voronoi 図にはかならない。

平面上の点 p_i の座標を (x_i, y_i) ($i=1, \dots, n$) とし、3次元 Euclid 空間 E^3 において各 i に対し

$$z = d(p, p_i)^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2$$

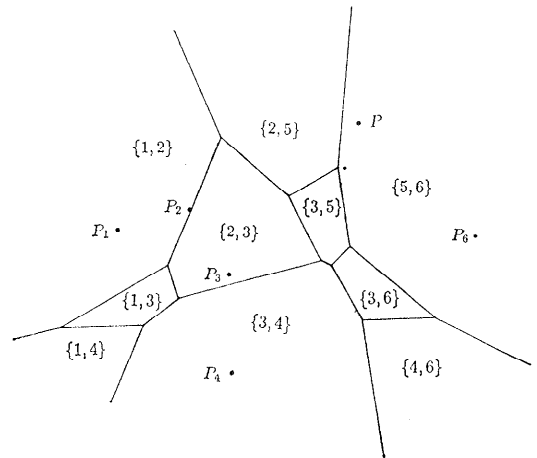


図1 2次の Voronoi 図
Fig. 1 Second-order Voronoi diagram.

のグラフを描く。異なる2つの i, j に対し、 $z = d(p, p_i)^2$ と $z = d(p, p_j)^2$ のグラフは E^3 内の放物線と交わるが、この放物線を (x, y) -平面に射影したものが、線分 $\overline{p_i p_j}$ の垂直二等分線となる。つまり、 n 個のグラフ $z = d(p, p_i)^2$ の下側エンベロープ(すなわち、 n 個の2変数関数の最小値を取る関数)を (x, y) -平面に射影したものが n 個の母点 $p_i (i=1, \dots, n)$ に対する Voronoi 図となり、2番目に小さな値を取る関数を (x, y) -平面に射影したものが Voronoi 図の2次の細分である。2次の Voronoi 図は、この細分から1次の Voronoi 図を取り除いたものである((x_0, y_0) で最小値、2番目に小さな値を取るグラフがそれぞれ $z = d(p, p_i)^2, z = d(p, p_j)^2$ であったとすると、 (x_0, y_0) は $V^{(2)}(i, j)$ に含まれる)。同様にして m 次 Voronoi 図に対して、 m 番目に小さな値を取る関数を (x, y) -平面に射影したものが $m-1$ 次 Voronoi 図の細分となり、 m 次 Voronoi 図は $m-1$ 次 Voronoi 図の細分から $m-1$ 次 Voronoi 図を取り除いたものとなっていることがわかる。

3. m 次 の 動的 Voronoi 図

次に、パラメタ t をもつ n 個の点 $p_i(t) = (x_i(t), y_i(t))$ を考える。ここで、 $x_i(t), y_i(t)$ は t の多項式か有理式で表される関数とし、その次数は n に無関係な定数であるとする。

点 $p = (x, y)$ と $p_i(t)$ の Euclid 距離の2乗をとる関数

$$f_i(x, y, t) = (x - x_i(t))^2 + (y - y_i(t))^2$$

を考える。すでに述べたように、 t を t_0 に固定すれば n 個の x, y の 2 変数関数 $f_i(x, y, t_0)$ の下側エンベロープの (x, y) -平面への射影は点 $p_i(t_0)$ に対する Voronoi 図となる。したがって、関数 $f_i(x, y, t)$ の最小値をとる関数

$$f_{(1)}(x, y, t) = \min_{i=1, \dots, n} f_i(x, y, t)$$

に対して、4 次元 Euclid 空間 E^4 内のグラフ $z = f_{(1)}(x, y, t)$ を (x, y, t) -空間に射影すると、 (x, y, t) -空間の分割 (これを n 個の関数 $f_i(x, y, t)$ の最小値図と呼ぶ) が得られるが、この最小値図と E^3 内の超平面 $t = t_0$ の交わりは、 $t = t_0$ のときの点 $p_i(t_0)$ ($i = 1, \dots, n$) を母点とする Voronoi 図を与えている。この $f_i(x, y, t)$ の最小値図を動的 Voronoi 図とよぶことにする。同様に、関数 $f_i(x, y, t)$ の m 番目に小さな値をとる関数 $f_{(m)}$ に対して、4 次元 Euclid 空間 E^4 内のグラフ $z = f_{(m)}(x, y, t)$ を (x, y, t) -空間に射影して得られる (x, y, t) -空間の分割 (m 次値図) から $m-1$ 次値図を除いたものと E^3 内の超平面 $t = t_0$ の交わりは、 $t = t_0$ のときの点 $p_i(t_0)$ ($i = 1, \dots, n$) を母点とする m 次の Voronoi 図を与える。これを m 次の動的 Voronoi 図とよぶ。

以下では簡単のため、任意の t に対して、 $p_i(t)$ はすべて相異なるとする。任意の t に対して $p_i(t)$ がすべて相異なるという仮定のもとでは、 m 次値図は、3 次元の領域、2 つの f_i の交わりで構成される面、3 つの交わりで構成される辺、4 つの交わりで構成される頂点よりなる。 $f_i(x, y, t)$ の連立方程式を解くことにより、4 次元 Euclid 空間内での $f_i(x, y, t)$ の交わりの性質がすぐわかる (今後、 $f_i(x, y, t)$ の変数 x, y, t は混乱が生じない限り省略して、 $f_i(x, y, t)$ を単に f_i と書くこともある)。

補題 1. (1) 任意の $i \neq j$ に対して $f_i(x, y, t) = f_j(x, y, t)$ は連結な E^4 内の曲面となる。

(2) 任意の相異なる 3 つの添字 i, j, k に対して、 $p_i(t), p_j(t), p_k(t)$ が一直線上になるような t が存在しなければ、 $f_i = f_j = f_k$ は t をパラメタとする曲線である。もし、 $p_i(t), p_j(t), p_k(t)$ が一直線上になるような t が存在したとすると、その t において曲線は不連続となるが、このような t は高々定数個しかない。

(3) 任意の相異なる i, j, k, l に対して $f_i = f_j = f_k - f_l$ は高々定数個の点 (この数を s とする) からなる。 □

この補題により m 次値図での頂点の数は $O(n^4)$ であることがすぐわかるが、より良い上界が以下のよう

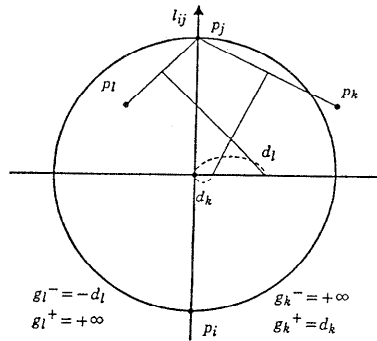


図 2 g_k^+, g_k^- の定義
Fig. 2 Definitions of g_k^+ and g_k^- .

にして得られる。2 つの添字 $i \neq j$ をとり、固定する。 $k \neq i, j$ に対して、関数 $g_k^+(t), g_k^-(t)$ を次のように定義する。 $p_i(t), p_j(t), p_k(t)$ の外心を q_k とし、 $p_i(t)$ と $p_j(t)$ の中点と点 p_k との距離を d_k とおく。また、 $l_{ij}(t)$ を $p_i(t)$ から $p_j(t)$ へ向かう有向直線とする (図 2 参照)。

Case 1: $p_k(t)$ が有向直線 $l_{ij}(t)$ の右側にある。

$$g_k^+(t) = \begin{cases} +d_k & (q_k \text{ が } l_{ij}(t) \text{ の右側にある}) \\ -d_k & (q_k \text{ が } l_{ij}(t) \text{ の左側にある}) \end{cases}$$

$$g_k^-(t) = +\infty$$

Case 2: $p_k(t)$ が有向直線 $l_{ij}(t)$ の左側にある :

$$g_k^+(t) = +\infty$$

$$g_k^-(t) = \begin{cases} -d_k & (q_k \text{ が } l_{ij}(t) \text{ の右側にある}) \\ +d_k & (q_k \text{ が } l_{ij}(t) \text{ の左側にある}) \end{cases}$$

Case 3: $p_k(t)$ が $l_{ij}(t)$ 上にある (このような場合は高々定数個の t の値に対してしか起こらない) :

$$g_k^+(t) = g_k^-(t) = \begin{cases} -\infty & (p_k(t) \text{ が } \overline{p_i(t)p_j(t)} \text{ 上にある}) \\ +\infty & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$

これらの $g_k^+(t), g_k^-(t)$ に対して、さらに $g_{(l)}^+(t), g_{(l)}^-(t)$ をそれぞれ $\{g_k^+(t)\}, \{g_k^-(t)\}$ のなかで l 番目 ($l = 1, 2, \dots, m$) に小さな値を取る関数と定義し、 $\bar{g}_{(m, l)}(t)$ ($l \geq 1$) を次のようにおく。

$$\bar{g}_{(m, l)}(t) = \max \{g_{(l)}^+(t) + g_{(m-l+1)}^-(t), 0\}$$

特に $m=1$ の場合は次のようになる。

$$g_{(1)}^+(t) = \min_{k \neq i, j} g_k^+(t),$$

$$g_{(1)}^-(t) = \min_{k \neq i, j} g_k^-(t),$$

$$\bar{g}_{(1, 1)}(t) = \max \{g_{(1)}^+(t) + g_{(1)}^-(t), 0\}.$$

これらの関数のもつ意味は次の補題によって明らかになる。

補題 2. (1) ある t に対し $g_{(l)}^+(t) \neq \pm\infty (g_{(l)}^-(t))$

$\neq \pm\infty$) を実現している関数を $q_k^+(t)$ ($q_k^-(t)$) とすると、 $l_{ij}(t)$ の右(左)側にある $p_i(t)$ の内ちょうど $l-1$ 個の点が $p_i(t)$, $p_j(t)$, $p_k(t)$ を通る円の内部に含まれる。

(2) ある t に対し、 $\tilde{q}_{(m-1)}(t) > 0$ とし、 $q_{(l)}^+(t) \neq +\infty$, $q_{(m-l+1)}^-(t) \neq +\infty$ を実現している関数をそれぞれ $q_k^+(t)$, $q_k^-(t)$ とする。このとき、 $p_i(t)$, $p_j(t)$, $p_k(t)$ を通る円はちょうど $l-1$ 個の点を、 $p_i(t)$, $p_j(t)$, $p_k(t)$ を通る円はちょうど $m-l$ 個の点を内部に含む。□

関数 $q_{(l)}^+$, $q_{(l)}^-$, $\tilde{q}_{(m-1)}$ は、関数 q_k^+ , q_k^- , $q_k^+ + q_l^-$, 0 のグラフの連結部分から構成されている。これらの関数 $q_{(l)}^+$, $q_{(l)}^-$, $\tilde{q}_{(m-1)}$ の組合せの複雑度は、それを構成している連結部分の個数の最大値で定義されているので、 $q_{(l)}^+(q_{(l)}^-, \tilde{q}_{(m-1)})$ を実現する関数が十分小さな $\varepsilon > 0$ に対して $t' - \varepsilon$ と $t' + \varepsilon$ で異なるような値 t' を区分値ということにすれば、区分値の数はその関数の組合せの複雑度を表している。関数 $q_{(l)}^+$, $q_{(l)}^-$, $\tilde{q}_{(m-1)}$ の組合せの複雑度は次のようにして評価することができる。ここで、 $\lambda_s(n)$ は (n, s) Davenport-Schinzel 列の最大長を表し、ほとんど線形に近い関数である (Davenport-Schinzel 列については文献1), 3), 11)などを参照)。

補題 3. $q_{(l)}^+$, $q_{(l)}^-$ の組合せの複雑度は $O(\lambda_{s+1+3}(n))$ であり、 $q_{(l-1)}^+$, $q_{(l-1)}^-$ から $O(\lambda_{s+1+2}(n)\log n)$ の手間で構成できる。また、 $\tilde{q}_{(m-1)}$ の組合せの複雑度は $O(\lambda_{s+m+3}(n))$ であり、 $O(m\lambda_{s+m+2}(n)\log n)$ の手間で構成できる。

証明: 補題1の(1)より、 $f_i = f_j = f_k = f_l$ は高々 s 点で交わることから、 q_k^+ と q_l^- も高々 s 点で交わる。各 q_k^+ は補題1の(2)より高々定数個の点で不連続となる。一般に、互いに高々 s 点で交わるような連続関数の k 番目に小さな関数の組合せの複雑度は $O(\lambda_{s+k+1}(n))$ であるので¹⁰⁾、 $q_{(l)}^+$ の組合せの複雑度は $O(\lambda_{s+1+3}(n))$ となる。 $q_{(l)}^-$ についても同様である。 $q_{(l)}^+ + q_{(m-l+1)}^-$ と 0 をとる関数は、高々定数回しか交わらないので、 $\tilde{q}_{(m-1)}$ の組合せの複雑度は $q_{(l)}^+$ や $q_{(m-l+1)}^-$ のその定数倍にしかすぎない。 $q_{(l)}^+$ と $q_{(m-l+1)}^-$ の組合せの複雑度はそれぞれ $O(\lambda_{s+1+3}(n))$, $O(\lambda_{s+m-1+4}(n))$ であるから、 $\tilde{q}_{(m-1)}$ の組合せの複雑度は $O(\lambda_{s+m+3}(n))$ と評価できる。

互いに高々 s 点で交わり、高々定数個の点で不連続であるような $n-2$ 個の関数 q_k^+ から $q_{(l)}^+$ を構成するのは $O(\lambda_{s+1}(n)\log n)$ で行える⁶⁾。 $q_{(l)}^+$ を求めるには $q_{(l-1)}^+$ を用いて、 $O(\lambda_{s+1+2}(n)\log n)$ で行える。 $q_{(l)}^-$ についても同様である。 $\tilde{q}_{(m-1)}$ を構成するのは $O(m\lambda_{s+m+2}(n))$

$\times \log n$) で行える。□

定理 1. 1つのパラメータで動く点に対する動的 Voronoi 図の組合せの複雑度は $O(n^2\lambda_{s+m+3}(n))$ であり、この動的 Voronoi 図は $O(n^2m\lambda_{s+m+2}(n)\log n)$ 時間で求めることができる。

証明: E^4 内の曲面 $f_i = f_j$ 上にある m 次値図の頂点には、 $m-1$ 次値図にすでに現れていた頂点と、新しく m 次値図で現れた頂点の2種類がある。いま、 m 次値図で新しく現れた頂点の1つをとる。それが f_i , f_j , f_k , f_l の交点であるとし、そのときの t の値を t' とすると、 $p_i(t')$, $p_j(t')$, $p_k(t')$, $p_l(t')$ の4点は同一円周上にあり、ちょうど $m-1$ 個の点を除き他の点はすべてその円の内部に含まれない。4点 $p_i(t')$, $p_j(t')$, $p_k(t')$, $p_l(t')$ の位置関係は次の3通りの場合がある。

- (a) $p_k(t')$ と $p_l(t')$ が共に有向直線 $l_{ij}(t')$ の右側にある。
- (b) $p_k(t')$ と $p_l(t')$ が共に有向直線 $l_{ij}(t')$ の左側にある。
- (c) $p_k(t')$ と $p_l(t')$ のうちどちらか一方が有向直線 $l_{ij}(t')$ の右側にあり、もう一方が左側にある。

この(a), (b), (c)の3つの場合、 t' はそれぞれ $q_{(m)}^+$, $q_{(m)}^-$, $\tilde{q}_{(m-1)}$ の区分値である(とくに、(c)は $q_{(l)}^+ + q_{(m-l+1)}^- = 0$ の解に対応している)。したがって、 $f_i = f_j$ 上にある m 次値図上の $m-1$ 次値図には現れていなかった頂点は、 $q_{(m)}^+$, $q_{(m)}^-$ の区分値か $q_{(l)}^+ + q_{(m-l+1)}^- = 0$ の解に対応する。

m 次値図の頂点の内、すでに $m-1$ 次値図に現れていた頂点を取ると、そのような頂点は、 $q_{(m-1)}^+$, $q_{(m-1)}^-$, $\tilde{q}_{(m-1)}$ ($l=1, 2, \dots, m-1$) の区分値に対応していることが、まったく同様の議論からわかる。

逆に、区分値は m 次値図上の頂点と対応している。このことと補題3より、動的 Voronoi 図の組合せの複雑度は $O(n^2\lambda_{s+m+3}(n))$ である。

m 次値図上のすべての頂点は、すべての $p_i(t)$ と $p_j(t)$ の組に対して $q_{(m)}^+$, $q_{(m)}^-$, $\tilde{q}_{(m-1)}$ を構成することにより、補題3を用いて $O(n^2m\lambda_{s+m+2}(n)\log n)$ の手間で求められる。□

ここで注意しなければならないことは、 m 次の Voronoi 図において、 $m-1$ 次の Voronoi 図にすでに現れていた頂点によってもたらされる位相変化についてである。 $m-1$ 次の Voronoi 図における Voronoi 辺がなくなる瞬間、つまり、 $m-1$ 次の Voronoi 図の2つの Voronoi 頂点が1点になるときは、 m 次の4つの Voronoi 辺がなくなってしまう。 m 次の Vo-

ronoi 図で現れた Voronoi 頂点同士, または, m 次の Voronoi 図で現れた Voronoi 頂点と $m-1$ 次の Voronoi 図で現れていた Voronoi 頂点とが一致するときは, 消滅する Voronoi 辺は 1 つだけである.

4. 高次の動的 Voronoi 図の応用

本稿では, 高次の Voronoi 図の動的変化の解析を行ってきた. 最遠点 Voronoi 図も高次の Voronoi 図 ($m=n-1$) であるが, 関数 g_i^+ , g_i^- などを少し修正する (\min を \max にするなど) ことによって, 動的な最遠点 Voronoi 図を 1 次の動的 Voronoi 図と同様の手段で求めることができる. 動的な最遠点 Voronoi 図を用いて, ピングリッドアレイ型 LSI をロボットによってプリント基板に自動実装するときに現れるような 2 つの点集合の幾何的最適当てはめを求める問題を解くことができた⁸⁾. この問題では, 対応の与えられている 2 つの n 点からなる集合を, 対応する 2 点間の距離の最大値が最小になるような位置を見つけることが目的である. プリント基板に同一半径の円のパターンがプリントされている場合の問題を文献 8) においては, 次のように定式化し, 動的な最遠点 Voronoi 図を用いて, 動的な最小包含円問題に帰着させて解いた. ピンを点 s_j に, パターンの円の中心を点 t_j とし, 2 つの点集合を考える. このようにして, 平面上に与えられた n 点から成る 2 つの点集合 $S = \{s_j = (x_j, y_j) | j=1, \dots, n\}$ と $T = \{t_j = (u_j, v_j) | j=1, \dots, n\}$ に対し, 点 s_j と t_j が対応すると仮定する. このとき, S を θ 回転し, 平行移動することによって, 対応する点同士の距離の最大値が最小になるような位置を求めたい. s_j, t_j を複素平面上の点 $x_i + iy_i, u_i + iv_i$ と同一視すると, 次のようなミニマックス型の最適化問題となる.

$$\min_{z, 0 \leq \theta < 2\pi} \max_{j=1, \dots, n} \|s_j e^{i\theta} - t_j - z\|.$$

ここで, 原点を $z = x + iy$ に平行移動するとし, $\|\cdot\|$ は Euclid 距離を表している. $p_j(\theta) = s_j e^{i\theta} - t_j$ とおくと,

$$\min_{0 \leq \theta < 2\pi} (\min_z \max_{j=1, \dots, n} \|p_j(\theta) - z\|)$$

と書き直せる. この式から, θ を固定すると, $p_j(\theta)$ をすべて含む円の中心を z とすればよいことがわかり, 最小包含円問題に帰着できる. 最小包含円問題は, 最遠点 Voronoi 図を用いて解くことができるので, パラメータ θ によって動いている点 $p_j(\theta)$ に対する動的な最遠点 Voronoi 図が求まれば, この幾何的最適当てはめ

問題は解ける.

LSI 自動実装において LSI のピンが 1 本だけ大きく曲がっていると, 最遠点 Voronoi 図のみを用いて解くと, 最適な位置は曲がっているピンの影響を大きく受けることになる. このように, 1 つの点対だけが離れていて, そのような点対を無視して残りの点対で問題を解けば, 対応する 2 点間の距離の最大値の最小がかなり小さくできる場合が考えられる. 最遠点 Voronoi 図において, Voronoi 点を中心にしてその Voronoi 点からその点を定める母点への距離を半径として円を描くと, すべての母点が円周上または円の内部にある. 同じことを 2 次の最遠点 Voronoi 図において行くと, 今度は 1 点のみが円の外にあるか, またはすべてが円周上か内部にあるかのどちらかが成り立つ. このように, 2 次の最遠点 Voronoi 図 ($n-2$ 次の Voronoi 図) を用いることによって対応する点対間の距離が最大のものを無視して問題を解くということが可能になる. 一般に, m 次の最遠点 Voronoi 図 ($n-m$ 次の Voronoi 図) を用いると, 離れている $m-1$ 個の点対を無視して残りの点対に対して幾何的最適当てはめ問題を解くことができる. このように, 高次の動的 Voronoi 図を用いることによって, プリント基板にプリントされた円に, すべての点を入れられないときに入れられない点の数をできるだけ小さくするという問題に対する解法が得られる.

5. まとめ

本稿では, 1 つのパラメータをもつ動的な点に対する m 次の Voronoi 図の組合せの複雑度を求め, それらの動的 Voronoi 図を構成する問題を 3 変数関数の m 次値図を求める問題に変換し, さらに 1 変数関数の l ($l=1, 2, \dots, m$) 番目に小さな値をとる関数を求める問題に帰着して, Davenport-Schinzel 列の理論をもとに解くというアルゴリズムを与えた.

ここでは, 点に対する m 次の動的 Voronoi 図について議論を進めた. 最近では, 様々な種類の Voronoi 図に対して, その動的 Voronoi 図を構成する問題やそれを用いて解くことができるような問題が現れてきている^{2), 8)}. Voronoi 図に限らず, 動的な対象物を扱う動的計算幾何学の研究が盛んに行われている⁹⁾. 今後このような動的計算幾何学の研究がますます進むと思われるが, その中で, 一般の m 次の動的 Voronoi 図の役割も重要となってくるだろう.

謝辞 本研究の一部は文部省科学研究費補助金の援

助を受けた。

参 考 文 献

- 1) Agarwal, P. K., Sharir, M. and Shor, P.: Sharp Upper and Lower Bounds for the Length of General Davenport-Schinzel Sequences, *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, Vol. 52, pp. 228-274 (1989).
- 2) Aonuma, H., Imai, H., Imai K. and Tokuyama, T.: Maximin Location of Convex Objects in a Polygon and Related Dynamic Voronoi Diagrams, *Proceedings of the 6th Annual ACM Symposium on Computational Geometry*, pp. 225-234 (1990).
- 3) Atallah, M. J.: Some Dynamic Computational Geometry Problems, *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 11, pp. 1171-1181 (1985).
- 4) Chew, L. P. and Kedem, K.: Placing the Largest Similar Copy of a Convex Polygon, *Proceedings of the 5th Annual ACM Symposium on Computational Geometry*, pp. 167-174 (1989).
- 5) Edelsbrunner, H., Pach, J., Schwartz, J. T. and Sharir, M.: On the Lower Envelope of Bivariate Functions and Its Applications, *Proceedings of the 28th IEEE Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, pp. 27-37 (1987).
- 6) Hershehrger, J.: Finding the Upper Envelope of n Line Segments in $O(n \log n)$ Time, *Information Processing Letters*, Vol. 33, pp. 169-174 (1989).
- 7) 今井桂子: 動的な点に対する Voronoi 図とその応用について, 日本応用数学会論文誌, Vol. 1, pp. 127-134 (1991).
- 8) Imai, K., Sumino, S. and Imai, H.: Geometric Fitting of Two Corresponding Sets of Points, *Proceedings of the 5th Annual ACM Symposium on Computational Geometry*, pp. 266-275 (1989).
- 9) Preparata, F. P. and Shamos, M. I.: *Computational Geometry: An Introduction*, Springer-

Verlag, New York (1985).

- 10) Schqartz, J. T. and Sharir, M.: On the Two-Dimensional Davenport-Schinzel Problem, *Journal of Symbolic Computation*, Vol. 10, pp. 371-393 (1990).
- 11) Szemerédi, E.: On a Problem by Davenport and Schinzel, *Acta Arithmetica*, Vol. 25, pp. 213-224 (1974).

(平成 5 年 3 月 8 日受付)

(平成 5 年 9 月 8 日採録)



今井 桂子 (正会員)

1958年生。1980年津田塾大学学芸学部数学科卒業。1982年同大学院理学部研究科数学専攻修士課程修了。1985年同大学院理学研究科数学専攻博士課程単位取得退学。理学博士。東京大学工学部計数工学科教務職員、助手、九州工業大学情報科学センター助手、津田塾大学数学科助手を経て、1992年4月より中央大学理工学部情報工学科助教授となり、現在に至る。アルゴリズム理論特に計算幾何学に興味を持つ。電子情報通信学会、日本応用数理学会、日本数学会各会員。



今井 浩 (正会員)

1958年生。1981年東京大学工学部計数工学科卒業。1983, 1986年東京大学大学院工学系研究科情報工学専門課程修士、博士課程修了、工学博士取得。1986~1990年、九州大学工学部情報工学科助教授、1990年より現在、東京大学理学部情報科学科助教授。1987年冬カナダ McGill 大学訪問副教授、1988年秋 IBM T. J. Watson 研究所訪問研究員。アルゴリズム論、計算幾何学、最適化、学習理論の研究に従事。電子情報通信学会、日本 OR 学会、ソフトウェア科学会、人工知能学会、日本応用数理学会、数学会、ACM、IEEE 各会員。