

積分方程式法による数値等角写像のための Symm と Hough & Papamichael の定式化の比較

天 野 要†

与えられた Jordan 曲線の内部、外部、または、2つの Jordan 曲線で囲まれた有界な2重連結領域からそれぞれ単位円の内部、外部、または、円環領域への数値等角写像の方法として、問題を第1種 Fredholm 型の積分方程式に帰着させる方法が著名である。この方法は Symm (1966, 1967, 1969) によって提案され、Gaier (1976, 1981), Hough & Papamichael (1983) によって再定式化されている。この論文では、Symm と Hough & Papamichael の定式化を比較して次のことを示す。すなわち、問題の領域に角点が存在するか否かにかかわらず、Hough & Papamichael の定式化は、(a)計算手順の統一性だけでなく、(b)座標系からの独立性と(c)数値写像の精度においても、Symm の定式化より優れている。数値等角写像の方法として著名な第1種 Fredholm 型積分方程式法の2つの定式化の間にこのような違いが存在することは重要である。この論文では、また、数値等角写像における積分方程式法と代用電荷法を数値実験的に比較する。

A Comparison between the Formulations of Symm and Hough & Papamichael for the Numerical Conformal Mapping by the Integral Equation Method

KANAME AMANO†

The formulations of Symm (1966, 1967, 1969) and Hough & Papamichael (1983) are compared, which are well known as the integral equation method of the first kind for computing the following three conformal maps: (1) from a domain interior to a closed Jordan curve onto the interior of the unit disk, (2) from a domain exterior to a closed Jordan curve onto the exterior of the unit disk, and (3) from a doubly-connected domain bounded by two closed Jordan curves onto a circular annulus. We can see that the latter is superior to the former not only in the uniformity of computational procedures but also in the invariance to the translation of the coordinate system and in the accuracy of numerical results. Additionally, the integral equation method is numerically compared with the charge simulation method (1987, 1988 a, 1988 b, to appear), which has recently been proposed as a simple method of the numerical conformal mapping.

1. はじめに

与えられた Jordan 曲線の内部、外部、または、2つの Jordan 曲線で囲まれた有界な2重連結領域からそれぞれ単位円の内部、外部、または、円環領域への等角写像を考える。このような数値写像の方法としては Symm¹⁾⁻³⁾の積分方程式法が著名である。これは、Laplace 方程式の Dirichlet 問題の解である調和関数を1重層対数ポテンシャルで表現し、等角写像の問題を境界上のソース密度を未知量とする第1種 Fredholm 型の積分方程式に帰着させたものである。Symm はソース密度を段階関数で近似した。Symm の提案か

ら、Gaier^{4),5)}による解の存在と一意性の証明、Hayes⁶⁾の区分多項式や、Hough & Papamichael^{7),8)}のスプライン関数と角点の特異性を反映した特異関数の導入によるソース密度の近似法の改良、Henrici⁹⁾, Bernt¹⁰⁾, Reichel¹¹⁾の反復法と高速フーリエ変換の適用による計算量の低減等、多くの研究が生まれた。われわれは、特に、Gaier^{4),5)}によって提案され、Hough & Papamichael⁸⁾によって統一された Symm の積分方程式法の再定式化に注目する。なお、数値等角写像の研究の歴史と近年の展開については Gaier¹²⁾, Henrici¹³⁾, Trefethen¹⁴⁾に詳しい。

この論文の第1の目的は、数値等角写像における第1種 Fredholm 型の積分方程式法として著名な Symm¹⁾⁻³⁾の定式化と Hough & Papamichael⁸⁾の定式化を比較することである。これまでにも、Hough &

† 愛媛大学工学部情報工学科
Department of Computer Science, Faculty of
Engineering, Ehime University

Papamichael によって、ソース密度の近似法を改良して角点の特異性の問題を克服するためには、彼らの定式化がその特異性の軽減という利点を有することが指摘されていた。われわれは、問題の領域に角点が存在するかどうかにかかわらず、Hough & Papamichael の定式化が、(a) 計算手順の統一性だけでなく、(b) 座標系からの独立性と (c) 数値写像の精度においても、Symm の定式化より優れていることを指摘したい。数値等角写像の方法として著名な第 1 種 Fredholm 型積分方程式法の 2 つの定式化の間にこのような違いが存在することは重要である。

この論文の第 2 の目的は、より副次的なものではあるが、数値等角写像における積分方程式法と代用電荷法を数値実験的に比較することである。そのために、内容の記述は Symm¹⁾⁻³⁾ の定式化に対応する代用電荷法¹⁵⁾⁻¹⁷⁾ と Hough & Papamichael⁸⁾ の定式化に対応する代用電荷法¹⁸⁾ との間でなされた比較研究¹⁹⁾ と平行的に進められる。また、数値実験も同じ領域を対象に同じ条件の下に行われる。なお、内部領域の比較研究の事例²⁰⁾ はすでにあるが、外部領域と 2 重連結領域の比較研究はまだ行われていない。

2. 積分方程式法

2.1 内部等角写像

z 平面上に与えられた Jordan 曲線 C で囲まれた領域 D_I から w 平面上の単位円内部 $|w| < 1$ への等角写像 $w = f_I(z)$ を考える (図 1)。この写像は、 D_I の内部に原点 (正規化点) を取れば、正規化条件 $f_I(0) = 0, f_I'(0) > 0$ の下に一意に定まる。

内部等角写像の場合には、Symm¹⁾ と Hough & Papamichael⁸⁾ の定式化は同一で、この写像関数は

$$f_I(z) = z \exp \{g_I(z) + ih_I(z)\}, \quad (1)$$

$$g_I(z) + ih_I(z) = \int_C \sigma_I(\zeta) \{ \log |z - \zeta| + i \arg(1 - z/\zeta) \} |d\zeta| \quad (2)$$

と表現される。ここに、 $\sigma_I(\zeta), \zeta \in C$ は境界上で定義されたソース密度で、第 1 種 Fredholm 型の積分方程式

$$\int_C \sigma_I(\zeta) \log |z - \zeta| |d\zeta| = -\log |z|, z \in C \quad (3)$$

の解である。

この積分方程式は境界条件 $|f_I(z)| = 1, z \in C$ から

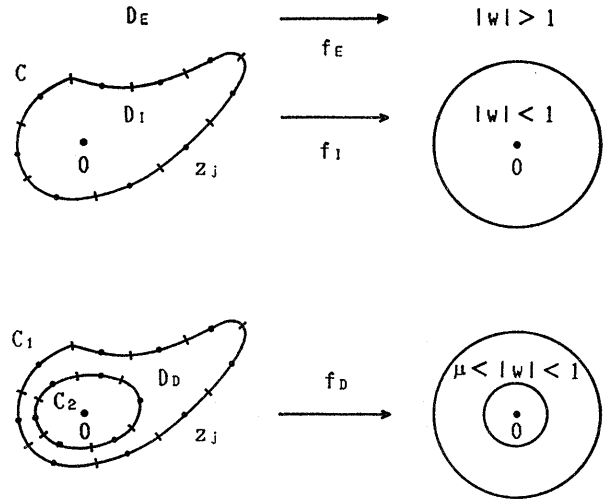


図 1 等角写像と積分方程式法
Fig. 1 Conformal mapping $w = f_I(z), f_E(z)$ and $f_D(z)$ of the interior, exterior and doubly-connected domains, respectively. z_j is the collocation point in the boundary interval I_j .

得られ、曲線 C の容量 $\gamma \neq 1$ のときに一意的な解を持つことが知られている。

2.2 外部等角写像

前述の Jordan 曲線 C の外側の領域 D_E から w 平面上の単位円外部 $|w| > 1$ への等角写像 $w = f_E(z)$ を考える。この写像は正規化条件 $f_E(\infty) = \infty, f_E'(\infty) > 0$ の下に一意に定まる。問題の一般性を失うことなく、原点を C で囲まれた領域の内部に取ることができる。

Symm²⁾はこの写像関数を

$$f_E(z) = z/\gamma \exp \{g_E(z) + ih_E(z)\}, \quad (4)$$

$$g_E(z) + ih_E(z) = \int_C \hat{\sigma}_E(\zeta) \log |z - \zeta| |d\zeta| \quad (5)$$

と表現した。ソース密度 $\hat{\sigma}_E(\zeta), \zeta \in C$ は結合積分方程式

$$\int_C \hat{\sigma}_E(\zeta) \log |z - \zeta| |d\zeta| = \log \gamma - \log |z|, z \in C \quad (6)$$

$$\int_C \hat{\sigma}_E(\zeta) |d\zeta| = 0 \quad (7)$$

の解である。

Gaier⁴⁾ と Hough & Papamichael⁸⁾ はこれを

$$f_E(z) = 1/\gamma \exp \{g_E(z) + ih_E(z)\}, \quad (8)$$

$$g_E(z) + ih_E(z) = \log \gamma \int_C \sigma_E(\zeta) \log |z - \zeta| |d\zeta| \quad (9)$$

と表現した。ソース密度 $\sigma_E(\zeta), \zeta \in C$ は積分方程式

$$\int_C \sigma_E(\zeta) \log|z-\zeta| |d\zeta| = 1, \quad z \in C \quad (10)$$

の解で, γ との間に

$$\log \gamma \int_C \sigma_E(\zeta) |d\zeta| = 1 \quad (11)$$

が成立する.

共役な調和関数 g_E と h_E , \hat{g}_E と \hat{h}_E の間には

$$\begin{aligned} g_E(z) + ih_E(z) &= \log z + \hat{g}_E(z) + i\hat{h}_E(z), \\ \lim_{z \rightarrow \infty} \{\hat{g}_E(z) + i\hat{h}_E(z)\} &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

なる関係がある. ソース密度と容量の関係式(6), (7), (10), (11)は, 境界条件 $|f_E(z)|=1, z \in C$ と無限遠点における関係式(12)から得られる. 積分方程式(10)は $\gamma \neq 1$ のときに一意的な解を持ち, 結合積分方程式(6), (7)は $\gamma=1$ でも一意的な解を持つことが知られている.

2.3 2重連結領域等角写像

z 平面上に与えられた Jordan 曲線 C_1 と C_2 で囲まれた有界な2重連結領域 D_D から w 平面上の円環領域 $\mu < |w| < 1$ への等角写像 $w=f_D(z)$ を考える. ここに, C_1 と C_2 は D_D の外側と内側の境界で, それぞれ同心円 $|w|=1$ と $|w|=\mu$ に移るとする. この写像は, 円環の内部半径 μ (逆数 μ^{-1} はモジュラスと呼ばれる) の値とともに, 回転の任意性を除いて一意的に定まる. 問題の一般性を失うことなく, 原点を C_2 で囲まれた領域の内側に取ることができる.

Symm²⁹⁾はこの写像関数を

$$f_D(z) = z \exp\{\hat{g}_D(z) + i\hat{h}_D(z)\}, \quad (13)$$

$$\hat{g}_D(z) + i\hat{h}_D(z) = \int_C \hat{\sigma}_D(\zeta) \log(z-\zeta) |d\zeta| \quad (14)$$

と表現した. ソース密度 $\hat{\sigma}_D(\zeta), \zeta \in C=C_1 \cup C_2$ は結合積分方程式

$$\int_C \hat{\sigma}_D(\zeta) \log|z-\zeta| |d\zeta| = -\log|z|, \quad z \in C_1, \quad (15)$$

$$= \log \mu - \log|z|, \quad z \in C_2, \quad (16)$$

$$\int_{C_2} \hat{\sigma}_D(\zeta) |d\zeta| = 0 \quad (17)$$

の解である.

Gaier⁵⁾ と Hough & Papamichael⁸⁾はこれを

$$f_D(z) = \exp\{g_D(z) + ih_D(z)\}, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} g_D(z) + ih_D(z) &= \log \mu \int_C \sigma_D(\zeta) \log(z-\zeta) |d\zeta| \\ & \quad (19) \end{aligned}$$

と表現した. ソース密度 $\sigma_D(\zeta), \zeta \in C$ は積分方程式

$$\int_C \sigma_D(\zeta) \log|z-\zeta| |d\zeta| = 0, \quad z \in C_1 \quad (20)$$

$$= 1, \quad z \in C_2 \quad (21)$$

の解で, μ との間に

$$\log \mu \int_{C_2} \sigma_D(\zeta) |d\zeta| = 1 \quad (22)$$

が成立する.

共役な調和関数 g_D と h_D , \hat{g}_D と \hat{h}_D の間には

$$g_D(z) + ih_D(z) = \log z + \hat{g}_D(z) + i\hat{h}_D(z) \quad (23)$$

なる関係があり, $\hat{h}_D(z)$ は D_D で1価でなければならぬ. ソース密度と円環の内部半径の関係式(15)~(17), (20)~(22)は境界条件 $|f_D(z)|=1, z \in C_1$ と $|f_D(z)|=\mu, z \in C_2$ および $\hat{h}_D(z)$ の一価性から得られる. 積分方程式(20), (21)と結合積分方程式(15)~(17)はいずれも C_1 の容量 $\gamma_1 \neq 1$ のときに一意的な解を持つことが知られている.

2.4 表現の統一

Hough & Papamichael⁸⁾は, 上記の3種の等角写像の写像関数を, 回転の任意性を除いて,

$$f(z) = \alpha(z) \exp\left\{\beta \int_C \sigma(\zeta) \log(z-\zeta) |d\zeta|\right\}, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} (1) \quad \alpha(z) &= z, & \beta &= 1, \\ (2) \quad \alpha(z) &= 1/\gamma, & \beta &= \log \gamma, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\gamma = \exp\left\{\int_C \sigma(\zeta) |d\zeta|\right\}^{-1},$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \alpha(z) &= 1, & \beta &= \log \mu, \\ & & \mu &= \exp\left\{\int_{C_2} \sigma(\zeta) |d\zeta|\right\}^{-1} \end{aligned}$$

と表現した. 式の前の(1), (2), (3)はそれぞれ内部領域, 外部領域, 2重連結領域の場合であることを示す. 境界上のソース密度は積分方程式

$$\int_C \sigma(\zeta) \log|z-\zeta| |d\zeta| = \delta(z), \quad z \in C, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} (1) \quad \delta(z) &= -\log|z|, \\ (2) \quad \delta(z) &= 1, \\ (3) \quad \delta(z) &= 0, \quad z \in C_1, \\ &= 1, \quad z \in C_2 \end{aligned} \quad (27)$$

の解である.

3. 比較

内部領域の場合には Symm の定式化と Hough & Papamichael の定式化は同一で, 両者の違いは外部領域と2重連結領域の場合に現れる. 次のことが知られている¹⁾⁻⁸⁾.

積分方程式の構造: Symm の定式化では, 内部領域

の問題は $\sigma_i(\zeta)$ を未知量とする積分方程式に、外部領域と2重連結領域の問題はそれぞれ $\hat{\sigma}_E(\zeta)$, γ と $\hat{\sigma}_D(\zeta)$, μ を未知量とする結合積分方程式に帰着される。Hough & Papamichael の定式化では、いずれの問題も内部領域の場合と同じ形の積分方程式に帰着され、 γ と μ はソース密度から求まる。したがって、後者では、3種の等角写像のより統一的な計算が可能になる。

解の存在の一意性：これらの方程式は、Symm の定式化の外部領域の場合を除いて、いずれも $\gamma \neq 1$ または $\gamma_1 \neq 1$ のときに一意的な解を持つ。外部領域の場合に $\gamma = 1$ でも一意的な解を持つことは Symm の定式化の長所である。しかし、問題の領域を適当に拡大または縮小してから積分方程式を適用すれば、これらの方程式は常に一意的な解を持つ。このとき、Jordan 曲線 C の容量 γ の次の性質を利用することができる： C に囲まれる最大の円の半径を r_1 , C を囲む最小の円の半径を r_2 とするとき、 $r_1 \leq \gamma \leq r_2$ が成り立つ¹³⁾。円の容量は半径に等しい。したがって、このような解の存在と一意性の問題の克服は数値計算上も容易である。

ソース密度の特異性：問題の領域が内角 $\alpha\pi$ ($0 < \alpha < 2$) の角点を持つとする。その境界を $\zeta = \zeta(t)$ と実数 t でパラメータ表現し、 $\sigma^{(q)} = d^q \sigma / d\zeta^q$ と記す。このとき、Hough & Papamichael の定式化では、ソース密度は角点で次のような特異性を持つ。

- (a) $1 < \alpha < 2$ のとき、 σ が有限でなくなる。
- (b) $1/(q+1) < \alpha < 1/q$, $q \geq 1$ が整数のとき、 $\sigma^{(q)}$ が有限でなくなる。
- (c) $\alpha = 1/q$, $q \geq 1$ が整数のとき、 $\sigma^{(q-1)}$ が不連続になり、 $\sigma^{(2q-1)}$ が有限でなくなる。

一方、Symm の定式化では、外部領域の角点または2重連結領域の C_2 上の角点でソース密度 $\hat{\sigma}_E$ と $\hat{\sigma}_D$ が $\alpha \neq 1$ のいかなる値に対しても有界でなくなる。すなわち、角点が凹型でなくても、ソース密度は強い特異性を持つ。

このように、Hough & Papamichael は、角点のソース密度をその特異性を反映した特異関数で近似するために、彼らの定式化が特異性の軽減という利点を有することを指摘した。われわれは、問題の領域に角点が存在するか否かにかかわらず、Hough & Papamichael の定式化が Symm の定式化に比較して次のような特徴を持つことを指摘したい。

調和関数の境界値：Symm の定式化では、調和関数

$g_I(z)$, $\hat{g}_E(z)$, $\hat{g}_D(z)$ の境界値はいずれも $\log|z|$ 型である。Hough & Papamichael の定式化では、外部領域と2重連結領域の場合の $g_E(z)$ と $g_D(z)$ の境界値が定数型になる。前者では、原点が境界に近ければ、問題の領域の外部にあっても、 $\log|z|$ の特異性が調和関数の1重層対数ポテンシャル表現に基づく積分方程式法の数値解の精度に影響すると予測される。この違いは、写像関数が原点を原点に対応させる形で変数 z を含んでいるか否かに起因し、Hough & Papamichael の定式化が Symm の定式化より高い計算精度を与える可能性を示唆している。

座標形からの独立性：さらに、積分方程式の解であるソース密度が原点の取り方に依存するか否かという意味で、Symm の定式化は座標系の平行移動に対して可変であり、Hough & Papamichael の定式化は不変である。そもそも、外部領域と2重連結領域の場合の原点は等角写像の問題には意味を持たない。この点で、Symm の定式化は不自然であり、Hough & Papamichael の定式化は自然である。

以上を整理して、問題の領域に角点が存在するか否かにかかわらず、Hough & Papamichael の定式化は Symm の定式化より次のような点で優れていると考えられる。

- (a) 計算手順の統一性：積分方程式の構造が同じで、3種の等角写像をより統一的な手順で計算することができる。
- (b) 座標系からの独立性：外部領域と2重連結領域の場合に、座標系の平行移動に対して不変であり、原点の取り方に依存しない計算結果を得ることができる。
- (c) 数値写像の精度：しかも、数値解が $\log|z|$ の特異性の影響を受けることなく、より高い計算精度を期待することができる。

Symm の定式化では、写像関数 $f_I(z)$, $f_E(z)$, $f_D(z)$ はすべて原点を原点に対応させる形で変数 z を含み、共役な調和関数 $g_I(z)$ と $h_I(z)$, $\hat{g}_E(z)$ と $\hat{h}_E(z)$, $\hat{g}_D(z)$ と $\hat{h}_D(z)$ はいずれも絶対値の拡大率 $|w/z|$ と偏角の回転 $\arg(w/z) = \arg w - \arg z$ に関係している。これらの諸量が幾何学的に同じ意味を持つことは Symm の定式化の長所である。Symm がこのような形式で積分方程式法を提案した理由もここにあると思われる。しかし、外部領域と2重連結領域の場合に原点間の対応という条件を付加すべき必然性は存在しないのである。

4. 離散化

最も簡単な離散化の方法は, Symm¹³⁻¹⁵⁾のように, ソース密度を階段関数で近似し, 数値積分に近似的な Simpson 則を用いることである. この方法を Hough & Papamichael の定式化に適用した場合を以下に記す.

まず, 境界 C を N 個の区間 $I_i, i=1, \dots, N$ に分割し, ソース密度を $\sigma(\zeta)=\sigma_i, \zeta \in I_i$ なる階段関数で近似する. さらに, N 個の拘束点 $z_j \in I_j, j=1, \dots, N$ を取って, 積分方程式 (26) から連立 1 次方程式

$$\sum_{i=1}^N \left(\int_{I_i} \log|z_j - \zeta| |d\zeta| \right) \sigma_i = \delta(z_j), \quad j=1, \dots, N \tag{28}$$

が得られる. これを解いて σ_i が求まれば, 近似写像関数 (24) の値を各点ごとに

$$F(z) = \alpha(z) \exp \left\{ \beta \sum_{i=1}^N \left(\int_{I_i} \log(z - \zeta) |d\zeta| \right) \sigma_i \right\} \tag{29}$$

で計算することができる. このとき, (25) 式の容量 γ と内部半径 μ の近似値はそれぞれ

$$\Gamma = \exp \left\{ \sum_{i=1}^N \left(\int_{I_i} |d\zeta| \right) \sigma_i \right\}^{-1}, \tag{30}$$

$$M = \exp \left\{ \sum_{i=1}^{N_2} \left(\int_{I_i} |d\zeta| \right) \sigma_i \right\}^{-1} \tag{31}$$

である. $\sum_{i=1}^{N_2}$ は C_2 上の区間に関する和を表す.

連立 1 次方程式 (28) の係数行列と近似写像関数 (29) の計算には, 次の近似積分,

$z \in DUC - I_i$ のとき,

$$\int_{I_i} \log(z - \zeta) |d\zeta| = h_i/6 \{ \log(z - z_{i-1/2}) + 4 \log(z - z_i) + \log(z - z_{i+1/2}) \}, \tag{32}$$

$$h_i = |z_{i+1/2} - z_i| + |z_i - z_{i-1/2}|, \tag{33}$$

$z (\neq z_{i\pm 1/2}) \in I_i$ のとき,

$$\begin{aligned} \int_{I_i} \log(z - \zeta) |d\zeta| &= |z - z_{i-1/2}| (\log|z - z_{i-1/2}| - 1) \\ &+ |z - z_{i+1/2}| (\log|z - z_{i+1/2}| - 1) \\ &+ i \{ h_{i-1/2} \arg(z - z_{i-1/4}) \\ &+ h_{i+1/2} \arg(z - z_{i+1/4}) \}, \end{aligned} \tag{34}$$

$$h_{i\pm 1/2} = |z_{i\pm 1/2} - z_{i\pm 1/4}| + |z_{i\pm 1/4} - z|, \tag{35}$$

$z = z_{i\pm 1/2}$ のとき,

$$\int_{I_i} \log(z - \zeta) |d\zeta|$$

$$\begin{aligned} &= |z_{i+1/2} - z_{i-1/2}| (\log|z_{i+1/2} - z_{i-1/2}| - 1) \\ &+ i h_i \arg(z - z_i), \end{aligned} \tag{36}$$

を用いることができる. ここに, $z_{i\pm 1/2}$ は区間 I_i の端点であり, $z_{i\pm 1/4}$ は半区間 $[z_{i\pm 1/2}, z]$, $z (\neq z_{i\pm 1/2}) \in I_i$ 内の点である. 点 z_i を区間 I_i の中点に取れば, (32), (33) 式は近似的な Simpson 則になる. なお, 連立 1 次方程式の係数行列の計算に用いられるのは $z = z_j, j \neq i$ の場合の (32) 式の実部と $z = z_i$ の場合の (34) 式の実部である. 特異積分 (34), (35) で $z \rightarrow z_{i\pm 1/2}$ の極限をとれば特異積分 (36) に一致する. しかし, そのままプログラムすると \log と \arg の引数に 0 が現れる. また, (30), (31) 式はそれぞれ

$$\Gamma = \exp \left\{ \sum_{i=1}^N h_i \sigma_i \right\}^{-1}, \tag{37}$$

$$M = \exp \left\{ \sum_{i=1}^{N_2} h_i \sigma_i \right\}^{-1} \tag{38}$$

となる.

同じ離散化を Symm の定式化に適用すれば, (1) 内部領域, (2) 外部領域, (3) 2 重連結領域の場合に, それぞれ, (1) σ_i の N 元, (2) δ_{z_i} と $\log \Gamma$ の $N+1$ 元, (3) δ_{D_i} と $\log M$ の $N+1$ 元を未知量として, 構造の異なる係数行列

$$(1) \{a_{ji}\}, \quad a_{ji} = \int_{I_i} \log|z_j - \zeta| |d\zeta|,$$

$$(2) \begin{bmatrix} & -1 \\ a_{ij} & \vdots \\ & -1 \\ h_1 \cdots h_N & 0 \end{bmatrix},$$

$$(3) \begin{bmatrix} & 0 \\ & \vdots \\ & 0 \\ & a_{ji} & -1 \\ & \vdots \\ & -1 \\ 0 \cdots 0 & h_{N+1} \cdots h_N & 0 \end{bmatrix}$$

を持った連立 1 次方程式が得られる. Hough & Papamichael の定式化では, これらが内部領域の場合と同じ構造に統一されている.

5. 数値実験と考察

Symm の定式化と Hough & Papamichael の定式化を数値実験的に比較する. ソース密度の近似と数値積分には前節の方法を用いる. 問題の領域としては, 代用電荷法の計算結果¹⁹⁾と比較できるように, 楕円と Cassini の楕形を取り上げる.

近似写像関数 $F(z)$ の誤差の評価には正則関数の最大値の原理を利用することができる. ここでは次のよ

うな方法を採用する。真の写像関数が知られていなければ、 $|F(z)|$ の誤差を、単連結領域の場合には

$$E_m = \max_j |F(z_{j+1/2})| - 1, \tag{39}$$

で、2重連結領域の場合には

$$E_m = \max \{ \max_{1j} |F(z_{j+1/2})| - 1, \max_{2j} |F(z_{j+1/2})| - M \} \tag{40}$$

で計算する。ここに、 \max_{1j} と \max_{2j} は C_1 と C_2 上での値であることを意味する。真の写像関数が知られていれば、 $F(z)$ の誤差を

$$E_f = \max_j \{ |F(z_j) - f(z_j)|, |F(z_{j+1/2}) - f(z_{j+1/2})| \} \tag{41}$$

で計算する。この場合には(40)式の M を μ で置き換える。

以下の例では、 N は境界線の分割数を表し、2重連結領域の場合には $N_1 = N_2 = N$ であるとする。

数値実験には愛媛大学情報処理センターのFACOM M-770/6 システムを用いた。計算は倍精度で、その有効数字は16進14桁である。

5.1 数値例

例1 楕円

$$C: x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$$

領域1 $a=1.25, b=1$

2 $a=2.5, b=1$

3 $a=5, b=1$

4 $a=10, b=1$

5 $a=20, b=1$

6 $a_1=7, b_1=5, a_2=5, b_2=1$

内部領域と外部領域1~5, 2重連結領域1~6を計算する。2重連結領域1~5では $a_1=a, b_1=b, a_2=a_1/2, b_2=b_1/2$ である。外部領域の解析解は

$$f_E(z) = \{z + (z^2 - a^2 + b^2)^{1/2}\} / (a+b), \gamma = (a+b)/2,$$

2重連結領域の解析解は、 $a_1^2 - b_1^2 = a_2^2 - b_2^2$, すなわち、2つの楕円が共焦点のとき、

$$f_D(z) = \{z + (z^2 - a_1^2 + b_1^2)^{1/2}\} / (a_1 + b_1),$$

$$\mu = (a_2 + b_2) / (a_1 + b_1),$$

である。領域6がその例である。

境界の分割は次のように行う。すなわち、楕円C上に(a)離心角、(b)長さ、または、(c)偏角で等間隔になるよう、 $2N$ 個の点

(a) $z_k = (a \cos \theta_k, b \sin \theta_k),$

(b) $|z_k - z_{k-1}| \doteq 1/2N \int_C |dz|, z_1 = (a, 0)$

(c) $z_k = (R_k \cos \theta_k, R_k \sin \theta_k),$
 $R_k = (\cos^2 \theta_k / a^2 + \sin^2 \theta_k / b^2)^{-1/2},$
 $\theta_k = \pi(k-1)/N, k=1, \dots, 2N$

を取り、奇数番目の z_k, z_{k+2} を区間 $I_j, j=(k+1)/2$ の端点 $z_{j-1/2}, z_{j+1/2}$ とし、偶数番目の z_k を拘束点 $z_j, j=k/2$ として採用する。分割の密度は長軸付近と単軸付近で、(a) $a:b$, (b) $1:1$, (c) $b:a$ となる。

表1に Symm と Hough & Papamichael の定式化による数値写像の誤差を示す。内部領域では偏角による分割で、外部領域と2重連結領域では Hough & Papamichael の定式化の離心角による分割で良い精度が得られている。表2は表1に対応する外部領域の容量 Γ と2重連結領域の円環の内部半径 M の誤差 $E_f = \Gamma - \gamma$ と $E_m = M - \mu$ である。解析解が知られていない2重連結領域1~5については、境界の分割数を $N=128$ に倍増した値との差で E_m を評価した。推定値 μ^* は $N=128$ とした Hough & Papamichael の定式化で異なる分割(a), (b)を用いて一致した範囲の値である。

表1の数値写像に関しては、いずれの場合にも

表1 数値写像の精度 (楕円, $N=64$)
 Table 1 Errors of the numerical mapping of elliptic domains obtained by the formulations of Symm (1966, 1967, 1969) and Hough & Papamichael (1983).

	Hough & Papamichael			Symm		
	離心角	長さ	偏角	離心角	長さ	偏角
内部3 E_m	1			1.6E-4	1.4E-4	1.3E-4
	2			1.0E-3	4.9E-4	1.9E-4
	3	同	右	7.9E-3	2.6E-3	3.9E-4
	4			5.2E-2	1.7E-2	5.6E-4
	5			2.1E-1	9.3E-2	6.2E-4
外部3 E_f	1	1.3E-4	1.6E-4	2.0E-4	3.2E-4	3.0E-4
	2	6.1E-4	1.5E-3	3.2E-3	2.4E-3	1.5E-3
	3	1.3E-3	1.3E-2	3.8E-2	9.8E-3	1.3E-2
	4	3.9E-3	3.8E-2	1.8E-1	5.2E-2	3.8E-2
	5	8.7E-3	6.7E-2	4.9E-1	2.1E-1	9.3E-2
2重3 E_m	1	1.3E-4	1.1E-4	1.1E-4	1.3E-4	1.1E-4
	2	2.3E-4	6.6E-4	1.4E-3	5.6E-4	6.5E-4
	3	5.2E-4	5.2E-3	1.4E-2	5.8E-3	5.2E-3
	4	1.9E-3	1.2E-2	4.3E-2	4.5E-2	1.4E-2
	5	5.4E-3	1.5E-2	2.7E-2	2.0E-1	8.6E-2
6 E_f	6.7E-4	6.6E-3	1.9E-2	4.9E-3	6.7E-3	1.9E-2

表 2 容量と円環の内部半径の精度 (楕円, $N=64$)

Table 2 Errors of the capacity and the inner radius of the annulus corresponding to Table 1, together with their exact values. The values* are obtained with $N=128$ intervals.

	Hough & Papamichael			Symm			r, μ
	離心角	長さ	偏角	離心角	長さ	偏角	
1	-1.0E-4	-1.0E-4	-1.1E-4	3.6E-7	-1.9E-6	-7.3E-6	1.125
2	-1.5E-4	-1.5E-4	-2.8E-4	9.9E-6	-1.8E-5	-2.0E-4	1.75
外部 3 E_r	-2.3E-4	2.8E-4	-6.6E-4	5.3E-5	4.7E-4	-6.9E-4	3
4	-3.0E-4	4.1E-3	-8.0E-2	5.0E-4	4.5E-3	-8.0E-2	5.5
5	-1.9E-4	7.5E-3	-1.3E+0	1.4E-2	9.6E-3	-1.3E+0	10.5
1	4.9E-5	4.8E-5	4.7E-5	2.5E-5	2.5E-5	2.5E-5	0.507332*
2	9.0E-5	7.2E-5	6.7E-5	5.1E-5	4.2E-5	5.2E-5	0.6047*
2重 3 E_M	1.6E-4	8.0E-5	9.7E-5	9.5E-5	4.1E-5	1.1E-4	0.7401*
4	2.6E-4	8.1E-5	5.3E-3	2.4E-4	3.6E-5	5.3E-3	0.8493*
5	8.3E-4	2.8E-4	9.8E-3	2.3E-3	4.1E-4	9.8E-3	0.9187*
6 E_M	-8.4E-5	2.7E-7	-1.6E-4	-3.7E-5	3.2E-5	-1.6E-4	0.5

Hough & Papamichael の定式化による計算精度は Symm の定式化による計算精度と同等またはそれ以上である。この精度の向上は、分割 (a), (b), (c) (最後の場合にはほとんど同精度) の順に、かつアスペクト比 ($\infty a/b$) の大きな領域で著しい。なお、2重連結領域 6 の場合には、誤差はアスペクト比の大きな内部の楕円上で最大値を取っている。

表 2 の容量 Γ に関しては、アスペクト比の小さな領域では Symm の定式化の精度が高く、アスペクト比が大きくなると Hough & Papamichael の定式化の精度が高くなる。しかし、次のような理由で、これらの Γ の精度は表 1 の数値写像の精度に比べていずれの場合にも十分に高い値であると考えることができる。

正則関数の最大値の原理により、外部領域の近似写像関数の誤差は境界上または無限遠点で最大値を取る。厳密には、表 1 の E_r は境界上の誤差 (ここでは絶対誤差と相対誤差は等しい) の指標であるにすぎない。一方、近似写像関数の形から、Symm の定式化と Hough & Papamichael の定式化のいずれの場合にも、

$$\lim_{z \rightarrow \infty} |F(z)/f(z) - 1| = |e^{\log \Gamma - \log r} - 1|$$

$$\approx |\log \Gamma - \log r|$$

となって、 $E_{\log r} = |\log \Gamma - \log r|$ が無限遠点の相対誤差の指標であることがわかる。そして、表 1 と表 2 のすべての場合に $E_{\log r} < (\text{多くの場合, } \ll) E_r$ なる関係の成立していることを確認することができる。したがって、外部領域の場合にも E_r は数値写像の (正

確には、相対) 誤差の良い指標になっている。

円環の内部半径 M に関しても例外なく $E_M < (\text{多くの場合, } \ll) E_m$ (領域 6 では E_r) なる関係が成立している。これは誤差の評価式 (40) で μ の代わりに M を用いることの妥当性を支持している。

図 2 と図 3 は、それぞれ外部領域 2 と 2重連結領域 2 で、楕円の長軸と短軸に沿って原点すなわち (x_0, y_0) を移動させた場合の数値写像の誤差である。図から、Symm の定式化の精度は原点の取り方に依存し、原点が境界に近づくほど低下すること、その低下は近づく方向の境界の分割の密度が小さいほど大きいこと、等がわかる。数値写像の精度の低下に伴って Γ と M の精度も低下する。したがって、表 1 と表 2 の値は、図 2 と図 3 の左端の値に対応し、Symm の定式化にとって最も条件の良い比較であったといえる。また、外部領域と 2重連結領域ではよく似た結果が得られている。

Symm の定式化で原点が境界に近づく場合に生じる計算精度の低下は調和関数の境界値 $\log |z|$ が領域外に持つ特異点の影響である。したがって、外部領域と 2重連結領域の問題に Symm の定式化を適用する場合には、原点は境界曲線で囲まれた領域の「中心」に取るべきである。また、表 1 の外部領域と 2重連結領域の場合に、Hough & Papamichael の定式化では境界の分割 (a), (b), (c) の順に良い精度に得られているのに対して、Symm の定式化ではアスペクト比が大きくなると良い精度の得られる分割が (b) また

は(c)の方にずれている。その理由も $\log|z|$ の特異性の影響として同様に理解することが可能である。

例2 Cassini の楕形

$C: |z^2 - b^2| = a^2 \quad (a > b)$

領域1 $a=1.8, b=1$

2 $a=1.06, b=1$

3 $a=1.02^{1/2}, b=1$

4 $a_1=2(14)^{1/2}, b_1=7, a_2=2, b_2=1$

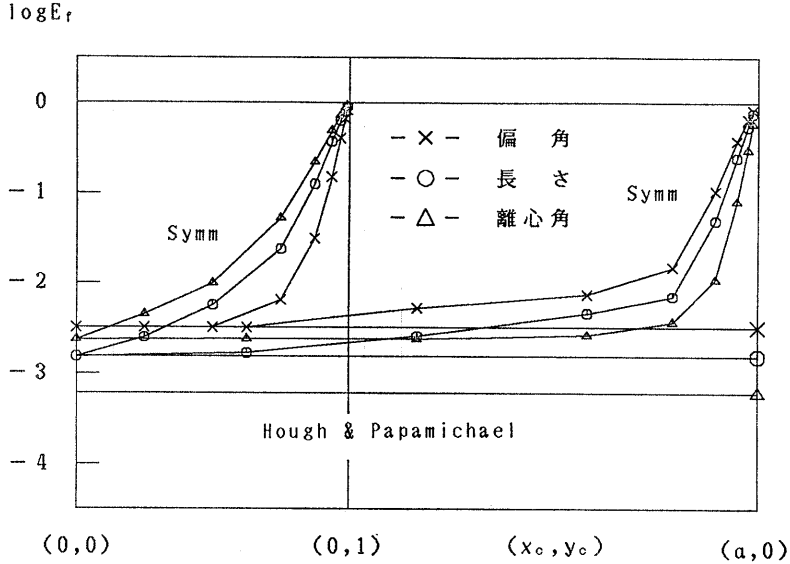


図2 原点の移動と数値写像の精度 (楕円外部領域, $a=2.5, N=64$)
 Fig. 2 Error diagram of the numerical mapping of an exterior elliptic domain $(x-x_c)^2/a^2 + (y-y_c)^2 > 1$. The point (x_c, y_c) moves on the two axes of symmetry.

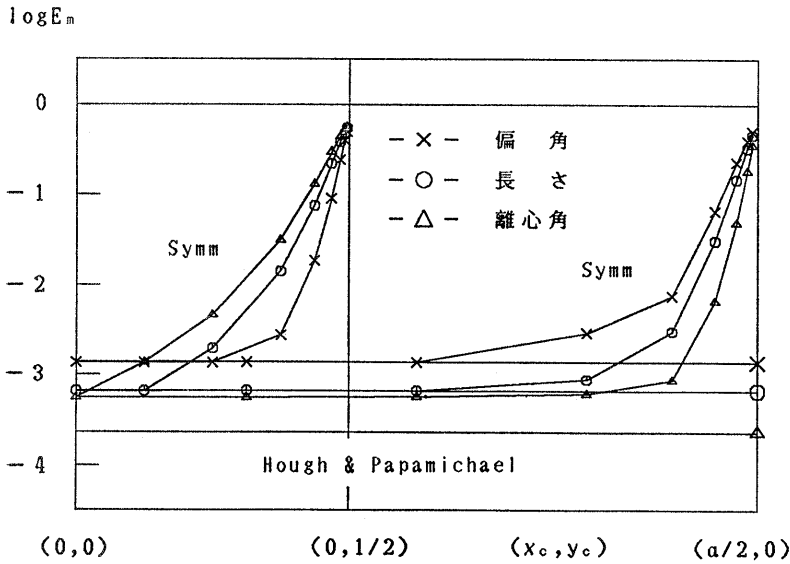


図3 原点の移動と数値写像の精度 (楕円2重連結領域, $a=2.5, N=64$)
 Fig. 3 Error diagram of the numerical mapping of a doubly-connected elliptic domain $(x-x_c)^2/a^2 + (y-y_c)^2 < 1, (x-x_c)^2/a^2 + (y-y_c)^2 > (1/2)^2$. The point (x_c, y_c) moves on the two axes of symmetry.

内部領域と外部領域 1~3, 2重連結領域 1~4 を計算する。2重連結領域 1~3 では $a_1=a, b_1=b, a_2=a_1/2, b_2=b_1/2$ である。内部領域の解析解は

$$f_i(z) = az / (b^2 z^2 + a^4 - b^4)^{1/2},$$

外部領域の解析解は

$$f_E(z) = (z^2 - b^2)^{1/2} / a,$$

$$\gamma = a,$$

2重連結領域の解析解は, $(a_1^4 - b_1^4) / b_1^2 = (a_2^4 - b_2^4) / b_2^2$ のとき,

$$f_D(z) = a_1 z / (b_1^2 z^2 + a_1^4 - b_1^4)^{1/2},$$

$$\mu = a_1 b_2 / a_2 b_1$$

である。領域 4 がその例である。

境界の分割は次のように行う。すなわち、楕形 C 上に (a) 長さ, または, (b) 偏角で等間隔になるよう、 $2N$ 個の点

$$(a) \quad |z_k - z_{k-1}| \doteq 1/2N \int_C |dz|,$$

$$z_1 = ((a^2 + b^2)^{1/2}, 0),$$

$$(b) \quad z_k = (R_k \cos \theta_k, R_k \sin \theta_k),$$

$$R_k = \{b^2 \cos 2\theta_k + (b^4 \cos^2 2\theta_k + a^4 - b^4)^{1/2}\}^{1/2},$$

$$\theta_k = \pi(k-1)/N, k=1, \dots, 2N$$

を取り、奇数番目の z_k, z_{k+2} を区間 $I_j, j=(k+1)/2$ の端点 $z_{j-1/2}, z_{j+1/2}$ とし、偶数番目の z_k を拘束点 $z_j, j=k/2$ として採用する。後者の分割の密度は短軸 (y 軸) 付近 ($a < 2^{1/2}b$ のとき、楕形の凹部) で密になる。

表 3 に数値写像の誤差を、表 4 に外部領域の容量と 2重連結領域の円環の内部半径の誤差を示す。Symm の定式化では原点に近い凹部で密になる偏角による分割で良い精度が得られている。また、2重連結領域 4 の場合には、誤差は凹型である外側の境界上で最大値を取っている。

表 3 の数値写像に関しては、いずれの場合にも Hough & Papamichael の定式化による計算精度は Symm の定式化による計算精度と同等またはそれ以上である。この精度の向上は、分割 (a), (b) の順に、かつ楕形の凹みの大きな領域で著しい。表 4 の容量 Γ と円環の内部半径 M に関しては、楕形が凸型の場合には Symm の定式化の精度が高く、楕形が凹型になると Hough & Papamichael の定式化の精度が高くなる。楕円の場合と同様に、外部領域のすべての場合に $E_{\log r} < (\text{多くの場合, } \ll) E_f$ なる関係が、

表 3 数値写像の精度 (Cassini の楕形, $N=64$)
Table 3 Errors of the numerical mapping of Cassini's oval domains obtained by the formulations of Symm (1966, 1967, 1969) and Hough & Papamichael (1983).

	Hough & Papamichael		Symm	
	長さ	偏角	長さ	偏角
1			4.6E-4	3.9E-4
内部 2 E_f	同	右	1.0E-2	3.3E-3
3			7.0E-2	8.1E-3
1	2.5E-4	2.4E-4	4.5E-4	4.5E-4
外部 2 E_f	1.1E-3	1.3E-3	1.0E-2	3.0E-3
3	1.5E-3	2.9E-3	7.0E-2	7.6E-3
1	1.7E-4	1.2E-4	1.7E-4	1.2E-4
2重 2 E_m	1.7E-3	7.7E-4	6.2E-3	7.7E-4
3	6.8E-3	1.3E-2	6.1E-1	1.3E-2
4 E_f	8.8E-3	3.0E-3	8.8E-3	3.0E-3

表 4 容量と円環の内部半径の精度 (Cassini の楕形, $N=64$)
Table 4 Errors of the capacity and the inner radius of the annulus corresponding to Table 3, together with their exact values. The values* are obtained with $N=128$ intervals.

	Hough & Papamichael		Symm		Γ, μ
	長さ	偏角	長さ	偏角	
1	-1.7E-4	-1.8E-4	-1.6E-5	-2.3E-5	1.8
外部 2 E_f	-1.3E-4	-1.8E-4	-1.6E-4	-1.6E-4	1.06
3	-1.3E-4	-2.1E-4	-3.6E-4	-2.7E-4	1.02 ^{1/2}
1	4.8E-5	4.9E-5	2.6E-5	2.6E-5	0.514948*
2重 2 E_m	2.3E-5	1.0E-4	9.3E-5	1.0E-4	0.71480*
3	1.8E-4	1.7E-3	1.2E-3	1.8E-3	0.8629*
4 E_m	1.3E-4	-9.4E-5	1.9E-4	-4.4E-5	(2/7) ^{1/2}

2重連結領域のすべての場合に $E_m < (\text{多くの場合, } \ll) E_f$ (領域 4 では E_f) なる関係が成立している。

5.2 代用電荷法との比較

上記の積分方程式法の計算結果と同じ問題に適用された代用電荷法の計算結果¹⁹⁾とを比較する。

(1) 数値写像の精度に関する Hough & Papamichael の定式化の Symm の定式化に対する優位性については代用電荷法における新定式化¹⁹⁾の旧定式化¹⁵⁾⁻¹⁷⁾に対する優位性の場合とよく似た結果が得られた。

(2) 積分方程式法の境界の分割と代用電荷法の拘束点の配置は計算の精度に大きく影響している。したがって、境界の自動分割と拘束点の自動配置はいずれの方法にも共通する研究課題である。このような問題

も、座標系の平行移動に対して不変な Hough & Papamichael の定式化と代用電荷の新定式化において、より簡単になるであろうと考えられる。

(3) 代用電荷法と積分方程式法による数値写像の誤差の比は、楕円の場合には $10^0 \sim 10^{-12}$ 、Cassini の楕円の場合には $10^{-1} \sim 10^{-10}$ の範囲であった。すなわち、代用電荷法は積分方程式法より簡単な計算で高い精度を得ることができる。しかし、外部領域と 2 重連結領域の場合には、内部領域の場合と異なって、領域の形が扁平になるに従って電荷配置のパラメータを大きく取ることができなくなる。実際、楕円の外部領域と 2 重連結領域の場合には、アスペクト比が大きくなると計算精度が逆転する例も見られる。この傾向は容量 Γ と円環の内部半径 M の精度にはより顕著に現れている。

(4) 解析解が知られている場合の誤差の比 E_m/E_f は、積分方程式法で $1 \sim 0.18$ 、代用電荷法で $1 \sim 0.82$ の範囲であった。したがって、代用電荷法の E_m は数値写像の誤差のよい指標であると考えられるのに対して、積分方程式法の E_m は真の誤差を数分の 1 に低く見積もっている可能性がある。これは (34)、(36) 式の偏角の数値積分の近似の粗さに起因すると考えられる。

なお、これらの比較は積分方程式法と代用電荷法の択一的な優劣の判定を意図したものではない。なぜなら、代用電荷法には薄い領域の外部問題と凹型の角点を持つ領域を除けば簡単な計算で非常に高い精度が得られるという長所があり、積分方程式法には、計算は複雑になるが、ソース密度の近似法を改良して精度を上げ、凹型の角点の特異性の問題をも克服できるという長所があるからである。数値等角写像の方法として、これらの特徴はいずれも重要である。

6. おわりに

数値等角写像における第 1 種 Fredholm 型の積分方程式法として著名な Symm¹⁷⁻³¹⁾ の定式化と Hough & Papamichael⁸⁾ の定式化を比較した。その結果、Hough & Papamichael の定式化は、(a) 計算手順の統一性だけでなく、(b) 座標系からの独立性と (c) 数値写像の精度においても、Symm の定式化より優れていることがわかった。これまでにも、Hough & Papamichael によって、彼らの定式化が角点におけるソース密度の特異性の軽減という利点を有することが指摘されていた。しかし、上記の比較は問題の領域に

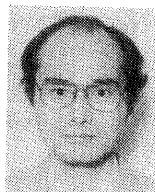
角点が存在するか否かに依存しない。数値等角写像の方法として著名な第 1 種 Fredholm 型積分方程式法の 2 つの定式化の間にこのような違いが存在することは重要である。

なお、外部領域の容量と 2 重連結領域の円環の内部半径については、Hough & Papamichael の定式化によって、計算精度の向上する場合と低下する場合があった。しかし、数値写像の誤差の最大値を境界上の計算値で評価できるという意味では、これらの精度はいずれの場合も十分な値である。

参考文献

- 1) Symm, G. T.: An Integral Equation Method in Conformal Mapping, *Numer. Math.*, Vol. 9, pp. 250-258 (1966).
- 2) Symm, G. T.: Numerical Mapping of Exterior Domains, *Numer. Math.*, Vol. 10, pp. 437-445 (1967).
- 3) Symm, G. T.: Conformal Mapping of Doubly-Connected Domains, *Numer. Math.*, Vol. 13, pp. 448-457 (1969).
- 4) Gaier, D.: Integralgleichungen erster Art und konforme Abbildung, *Math. Z.*, Vol. 147, pp. 113-129 (1976).
- 5) Gaier, D.: Das Logarithmische Potential und die konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender Gebiete, *E. B. Christoffel, The Influence of His Work on Mathematics and the Physical Sciences* (Butzer, P. L. and Fehér, F. eds.), pp. 290-303, Birkhäuser, Basel (1981).
- 6) Hayes, J. K., Kahaner, D. K. and Kellner, R. G.: An Improved Method for Numerical Conformal Mapping, *Math. Comput.*, Vol. 26, No. 118, pp. 327-334 (1972).
- 7) Hough, D. M. and Papamichael, N.: The Use of Splines and Singular Functions in an Integral Equation Method for Conformal Mapping, *Numer. Math.*, Vol. 37, pp. 133-147 (1981).
- 8) Hough, D. M. and Papamichael, N.: An Integral Equation Method for the Numerical Conformal Mapping of Interior, Exterior and Doubly-Connected Domains, *Numer. Math.*, Vol. 41, pp. 287-307 (1983).
- 9) Henrici, P.: Fast Fourier Methods in Computational Complex Analysis, *SIAM Rev.*, Vol. 21, No. 4, pp. 481-527 (1979).
- 10) Berrut, J.-P.: A Fredholm Integral Equation of the Second Kind for Conformal Mapping, *J. Comput. Appl. Math.*, Vol. 14, No. 1 & 2, pp. 99-110 (1986).
- 11) Reichel, L.: A Fast Method for Solving Certain Integral Equations of the First Kind with

- Application to Conformal Mapping, *J. Comput. Appl. Math.*, Vol. 14, No. 1 & 2, pp. 125-142, 1986.
- 12) Gaier, D.: *Konstruktive Methoden der konformen Abbildung*, p. 294, Springer-Verlag, Berlin (1964).
- 13) Henrici, P.: *Applied and Computational Complex Analysis*, Vol. 3, pp. 323-570, John Wiley & Sons, New York (1986).
- 14) Trefethen, L. N. (ed.): *Numerical Conformal Mapping*, 269 pp., North-Holland, Amsterdam (1986); reprinted from *J. Comput. Appl. Math.*, Vol. 14, No. 1 & 2 (1986).
- 15) 天野 要: 代用電荷法に基づく等角写像の数値計算法, 情報処理学会論文誌, Vol. 28, No. 7, pp. 697-704 (1987).
- 16) 天野 要: 代用電荷法に基づく外部等角写像の数値計算法, 情報処理学会論文誌, Vol. 29, No. 1, pp. 62-72 (1988).
- 17) 天野 要: 代用電荷法に基づく2重連結領域等角写像の数値計算法, 情報処理学会論文誌, Vol. 29, No. 10, pp. 914-924 (1988).
- 18) Amano, K.: A Charge Simulation Method for the Numerical Conformal Mapping of Interior, Exterior and Doubly-Connected Domains, *J. Comput. Appl. Math.* (to appear).
- 19) 天野 要: 代用電荷法による数値等角写像のための2つの定式化の比較 (投稿中).
- 20) 天野 要, 日野 究: 数値等角写像における代用電荷法と積分方程式法の比較, 情報処理学会論文誌, Vol. 33, No. 4, pp. 428-437 (1992).
(平成5年7月19日受付)
(平成5年10月14日採録)



天野 要 (正会員)

1948年生. 1971年京都大学工学部電子工学科卒業. 1978年北海道大学大学院工学研究科電気工学専攻博士課程修了. 工学博士. 同年北海道大学大型計算機センター助手. 現在愛媛大学工学部情報工学科助教授. 研究分野は数値解析と数理情報学, 特に数値複素解析とパターン認識等. 情報処理学会創立30周年記念論文賞受賞. 日本数学会, 日本応用数理学会, 電子情報通信学会, 日本心理学会, ACM 各会員.