

---

 ショートノート
 

---

## Wegmann 法に基づく数値等角写像の自動化について

宋 殷 志<sup>†</sup> 杉 浦 洋<sup>††</sup>

単位円の内部から Jordan 領域への等角写像を求めることは、境界対応関数を求めることに帰着される。われわれは、低周波フィルタで収束性を改善した Wegmann の反復法により境界対応関数を求め、それを多項式補間して、近似等角写像を構成する高速解法を示す。また、この算法を用いて、所要の精度の近似等角写像を効率的に構成するアルゴリズムを提案する。このようにして得られた近似等角写像は、単位円板上での数値的な取扱いが極めて容易である。

### Automatic Numerical Conformal Mapping Based on the Wegmann's Method

ENJEE SONG<sup>†</sup> and HIROSHI SUGIURA<sup>††</sup>

The problem of determining the conformal mapping from the unit disk onto a Jordan domain is reduced to construct the boundary correspondence function. We improved convergence of the Wegmann's method for constructing the boundary correspondence function by low-frequency filter. In this paper, we propose a fast algorithm which gives an approximate conformal mapping as the polynomial interpolation of the boundary correspondence function given by the improved Wegmann's method. The number of sample points for the Wegmann's method (which is equal to the number of interpolation points) is determined automatically to achieve the required accuracy in our algorithm. Numerical treatment of our approximate conformal mapping is very easy on the unit disk, because it is a polynomial.

#### 1. はじめに

複素平面の単位円を  $\gamma$ 、その内部を  $D$ 、原点を含む Jordan 領域を  $\Delta$ 、その境界を  $\Gamma$  とする (図 1)。単位円内部  $D$  から Jordan 領域  $\Delta$  への等角写像  $\Phi$  は正規化条件、 $\Phi(0)=0$ 、 $\Phi'(0)>0$  の下で一意に決まる。本稿では、この等角写像  $\Phi$  を自動的に求める有効な算法を示す。

領域  $\Delta$  は原点に関し星状で、Jordan 閉曲線  $\Gamma$  が  $\eta(s)=\rho(s)e^{is}$ 、 $0\leq s<2\pi$ 、 $\rho(s)>0$  と極座標表現されているものとする (図 1)。等角写像  $\Phi$  は、単位円  $\gamma$  を閉曲線  $\Gamma$  に 1:1 に写すから、

$$\Phi(e^{it})=\eta(s(t)), \quad t\in[0, 2\pi) \quad (1)$$

を満たす 1 価関数  $s(t)$  が存在する。

区間  $[0, 2\pi)$  の等間隔標本点  $\{t_\nu=2\pi\nu/N\}_{\nu=0}^{N-1}$  上で、方程式 (1) の解  $s(t)$  の近似値を求める反復法として、Wegmann の算法<sup>1)</sup>がある。ここでは、Wegmann 法の収束性を、低周波フィルタで改善した宋らの方法<sup>2)</sup>を使う。この方法は、 $\rho(s)$  が滑らかなとき、効果的である。

宋らの方法では、標本点数  $N$  を 2 の巾として、 $O(N \log N)$  の計算量で、標本点上の境界対応関数 (1) の近似値が求まる。それを、FFT を用いて  $N-1$  次多項式補間して、近似等角写像  $\Phi_N(z)$  を得る。

近似等角写像  $\Phi_N(z)$  を求め、誤差評価するという過程を、標本点数  $N$  を倍増しつつ繰り返し、要求精度に達したところで、その係数を出力する。関数  $\Phi_N(z)$  は多項式であり、計算が容易である。特に、円  $|z|=r$  上に等間隔分布する  $N$  個の点での  $\Phi_N$  の値は、FFT を用いて  $O(N \log N)$  の計算量で同時に計算できる。

<sup>†</sup> 尚志専門大学電子計算学科  
Department of Computer Science, Sang-Ji Junior  
College Attached to Sang-Ji University

<sup>††</sup> 名古屋大学工学部情報工学科  
Department of Information Engineering, School  
of Engineering, Nagoya University

2. 反復法

区間  $[0, 2\pi)$  の等間隔標本点  $\{t_\nu = 2\pi\nu/N\}_{\nu=0}^{N-1}$  上で、方程式 (1) の解  $s(t)$  の近似値を求める反復法を示す。標本点数  $N=2n$  は 2 の巾とする。

文献1)の式(3.1)から(3.7)で定義されるWegmannの反復法を簡単に

$$s_{k+1}^N = W(s_k^N), s_k^N \in \mathbb{R}^N, k \geq 0 \tag{2}$$

とかく。1回反復に要する計算量は  $O(N \log N)$  である。ある条件のもとで上の反復法は収束し、 $s_\infty^N \approx s^N = (s(t_0), \dots, s(t_{N-1}))^T$  となる。

われわれは、Wegmann法(2)の収束性を改善した反復法<sup>2)</sup>

$$s_{k+1}^N = \hat{W}(s_k^N) := L_l(W(s_k^N) - t) + t, \tag{3}$$

$$t = (t_0, \dots, t_{N-1})^T$$

を用いる。ここで、 $L_l, l \geq 1$  は

$$L_l(e^{imt}) := \begin{cases} e^{imt} & 0 \leq |m| \leq n-l, \\ 0 & n-l < |m| \leq n, \end{cases}$$

$$e^{imt} = (e^{imt_0}, \dots, e^{imt_{N-1}})^T$$

で定義される、パラメータ  $l$  を含む低周波フィルタである。

式(3)の  $s_{k+1}^N$  は  $W(s_k^N) - t$  をFFTでFourier変換し、 $n-l+1$ 次以上のFourier係数を0として、さらにそれをFourier変換することにより高速に求める。

次にフィルタのパラメータ  $l$  の決定法について述べる。 $l$  が小さすぎると、反復法の収束が遅く、収束が得られないこともある。逆に、大きすぎると解の精度が落ちる。

$\xi(t) = \rho(t) - 1$  が小さく、領域  $\Delta$  が単位円板に近いときは、文献2)式(22)の  $D_l := 2|d_l| + 4 \sum_{k=l+1}^{\infty} |d_k|$ ,  $l > 1$  が1未満になるようにパラメータ  $l$  を決めれば反復法は収束する。ここで、 $d_k$  は  $\xi(t)$  の導関数  $\dot{\xi}$  のFourier係数である。

理論的には、一般の領域  $\Delta$  に対して、この判定条件

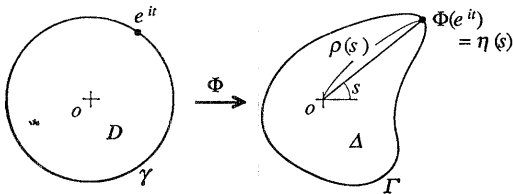


図1 単位円板  $D$  から Jordan 領域  $\Delta$  への等角写像  $\Phi$   
 Fig. 1 The conformal mapping  $\Phi$  from the unit disk  $D$  onto a Jordan domain  $\Delta$ .

を使うことはできないが、経験的には、 $D_l$  を小さく抑えることで、収束性と収束速度を確保できる。

まず、領域  $\Delta$  の大きさを単位円板程度に正規化しておく。次に、 $D_l < C \ll 1$  を満たす最小の  $l$  をフィルタのパラメータとする。5章の数値実験では、 $\rho(t)$  の最大値を1に正規化し、 $C=10^{-2}$  とした。

数値計算では、展開項数  $M=2m$  を2の巾として、FFTで  $\xi(t) \approx \sum_{\nu=-m}^m c'_\nu e^{i\nu t}$ , (ただし  $c'_{-m} = c'_m$ ) と離散型Fourier級数に展開し、 $\xi(t)$  の近似Fourier係数を  $d'_\nu = \nu c'_\nu$ , で求める。係数  $d'_\nu$  が十分な精度を達成するよう  $M$  を倍々に増やす。具体的には末尾の2つの係数が

$$|d'_m| + |d'_{m-1}| \leq \epsilon_1 \tag{4}$$

を満たすまで  $M$  を増加させる。次に  $D_l$  を

$$D_l \approx D'_l := 2|d'_l| + 4 \sum_{k=l+1}^m |d'_k|, l=1, \dots, m$$

で近似計算し  $D'_l < C$  を判定する。

パラメータ  $l$  は  $\xi$  のみに依存し、与えられた問題に対して一度計算すれば良い。

3. 等角写像の多項式近似と誤差評価

上の反復法より、標本点  $\{t_\nu\}$  上の  $s(t)$  の近似解  $s_k^N$  が得られる。 $s(t) - t$  は周期  $2\pi$  の実関数だから、それを

$$s_k^N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\mu=1}^{n-1} (a_\mu \cos \mu t + b_\mu \sin \mu t) + \frac{a_n}{2} \cos nt + t \tag{5}$$

で補間して  $s(t)$  の近似関数が構成できる。係数  $a_\mu, b_\mu$  はFFTにより求める。これを用いて境界対応関数(1)の近似  $\eta(s_k^N(t)) \approx \eta(s(t))$  を得る。また補間条件

$$\Phi_N(e^{i t_\nu}) := \sum_{j=0}^{N-1} c_j e^{i j t_\nu} = \eta(s_k^N(t_\nu)), 0 \leq \nu < N, \tag{6}$$

より  $\Phi(z)$  の近似  $N-1$  次多項式

$$\Phi_N(z) = \sum_{j=0}^{N-1} c_j z^j \tag{7}$$

を得る。係数  $\{c_j\}$  はFFTにより高速に求まる。

誤差の評価は、最大値原理により単位円上で行えば十分である。誤差

$$\epsilon_N = \max_{0 \leq t < 2\pi} |\Phi_N(e^{it}) - \Phi(e^{it})|$$

の近似として、 $\Phi_N(e^{it})$  と  $\Gamma$  の距離  $\text{dist}(\Phi_N(e^{it}), \Gamma)$  の最大値を採用する。 $\eta(s_k^N(t))$  は  $\Gamma$  上に拘束されるから

$$\epsilon_N \approx \max_{0 \leq t < 2\pi} \text{dist}(\Phi_N(e^{it}), \bar{\Gamma}) \leq \max_{0 \leq t < 2\pi} |\Phi_N(e^{it}) - \eta(s_k^N(t))|.$$

この式の最右辺を、標本点数を  $2N$  として、

$$\tilde{\epsilon}_N := \max_{0 \leq \nu < 2N} |\Phi_N(e^{i\tilde{z}_\nu}) - \eta(s_{k+1}^N(\tilde{z}_\nu))|, \tilde{z}_\nu = \pi\nu/N \tag{8}$$

で見積もり、誤差の評価値とする。 $\tilde{z}_\nu$  上の  $\Phi_N, s_k^N$  の値の計算も FFT により高速に行える。

#### 4. 標本数 $N$ の自動決定

要求精度を  $\epsilon$  とし、等角写像  $\Phi(z)$  の  $N-1$  次多項式近似  $\Phi_N(z)$  を自動的に求めるアルゴリズムを示す。

まず、フィルタのパラメータを、2章に述べた方法で決定する。その際、 $\xi$  のフーリエ展開係数  $M$  は、式(4)で  $\epsilon_1 = \epsilon/2$  として決める。この展開係数  $M$  を初期標本数  $N=M$  として用い、初期値は  $s_0^N = t$  とする。修正量が要求精度  $\epsilon$  より小さくなるまで2章の反復法を行う。反復過程で求めた離散解  $s_k^N$  の誤差を式(8)に基づいて評価し  $\tilde{\epsilon}_N < \epsilon$  を満たすかどうかを判断する。満たしたら、式(7)の  $\Phi_N$  を近似等角写像として採用する。この条件を満たさなかったら標本数を倍増し、再度2章の反復法を行う。その初期値に、前の反復法の最終結果  $s_k^N$  を使う。すなわち、誤差評価式(8)で用いた  $\{\tilde{z}_\nu\}$  上での  $s_k^N(t)$  の値を再利用して、

$$s_0^{2N} \leftarrow s_k^N = (s_k^N(\tilde{z}_0), \dots, s_k^N(\tilde{z}_{2N-1}))^T$$

とする。この初期値設定法は、精度の良い初期値を与え、反復回数を大幅に減少させる。

#### 5. 数値実験

数値例として、問題領域が Cassini の楕形の場合を扱う。

(例) Cassini の楕形

境界:  $\eta(s) = \rho(s)e^{is}$

$$\rho(s) = \sqrt{\frac{R^2 \cos 2s + \sqrt{1 - R^4 \sin^2 2s}}{R^2 + 1}}, \quad 0 \leq R < 1$$

解:  $\Phi(z) = z \sqrt{\frac{R^2 - 1}{z^2 R^2 - 1}}$

初期値を  $s_0^N = t + \alpha$  とし、要求精度は  $\epsilon = 10^{-7}$  とした。ここで、 $\alpha$  は収束特性に初期値依存性が現われることを防ぐために入れたノルムの小さい乱数ベクトルである。

計算結果の提示に用いた記号は次の通りである。

$R$ : 形状パラメータ,  $N$ : 標本点数,

$k$ : 反復回数,  $s$ : 解,  $l$ : フィルタのパラメータ,

表 1 反復法の標本点数と誤差評価 (Cassini の楕形)

Table 1 The number of sample points  $N$ , the correction  $CRR$ , the exact error  $ERR$  and the estimation error  $EST$  in our algorithm for the conformal mapping onto a Cassini's oval domain.

$R=0.6 \quad \epsilon=10^{-7}$		$N=64 \quad (l=10)$	
$k$	$CRR$	$ERR$	$EST$
1	0.258D+00		
2	0.328D-01		
3	0.461D-03		
4	0.844D-07	0.820D-06	0.891D-06
$N=128$			
1	0.828D-06		
2	0.357D-12	0.302D-13	0.342D-13
$R=0.95 \quad \epsilon=10^{-7}$		$N=256 \quad (l=42)$	
$k$	$CRR$	$ERR$	$EST$
1	0.713D+00		
2	0.389D+00		
3	0.205D+00		
4	0.419D-01		
5	0.147D-02		
6	0.408D-05		
7	0.153D-07	0.106D-02	0.122D-02
$N=512$			
1	0.114D-03		
2	0.878D-06		
3	0.100D-10	0.630D-06	0.767D-06
$N=1024$			
1	0.756D-06		
2	0.341D-12	0.747D-12	0.812D-12

$CRR := \max_{0 \leq \nu < N} |s_{k+1}(t_\nu) - s_k(t_\nu)|$ : 修正量,

$ERR := \max_{0 \leq \nu < N} |\Phi(e^{it_\nu}) - \Phi_N(e^{it_\nu})|$ : 誤差,

$EST := \tilde{\epsilon}_N$ : (8)式の推定誤差.

実験には、名古屋大学大型計算機センターの FACOM M-780 を用い FORTRAN 77 の倍精度で計算した。

前述のアルゴリズムによる数値実験の結果を表1に示す。ここで扱う例は、解がわかっているため最終回においてのみ誤差  $ERR$  と推定誤差  $EST$  を比較してみた。この結果よりわれわれの推定誤差が妥当であることがわかる。また、標本数を増やして反復を行うときに、前の反復で得た離散解を初期値とすることにより、非常に速い収束が得られることがわかる。

#### 参考文献

1) Wegmann, R.: Discretized Versions of Newton Type Iterative Methods for Conformal

Mapping, *J. Comput. Appl. Math.*, Vol. 29, No. 2, pp. 207-224 (1990).

- 2) 宋 殷志, 杉浦 洋, 桜井鉄也: 等角写像に関する Wegmann の方法の不安定性の解析とその安定化, 情報処理学会論文誌, Vol. 32, No. 2, pp. 126-132 (1991).

(平成 4 年 7 月 6 日受付)

(平成 5 年 11 月 11 日採録)



宋 殷志 (正会員)

1961 年生. 1984 年韓国淑明女子大学数学科卒業. 1988 年名古屋大学大学院工学研究科情報工学専攻修士課程修了. 1991 年名古屋大学大学院工学研究科情報工学専攻博士課程修了. 工学博士. 現在韓国尚志専門大学電子計算学科専任講師. 等角写像に関する数値解析に興味を持つ.



杉浦 洋 (正会員)

1952 年生. 1975 年名古屋大学理学部数学科卒業. 1978 年名古屋大学大学院理学研究科修士課程数学専攻修了. 1981 年名古屋大学大学院工学研究科博士課程情報工学専攻満了. 工学博士. 現在名古屋大学工学部情報工学科助教授. 数値積分法, 代数方程式, 積分方程式, 微分方程式の数値解法を持つ.