ファジィ構造モデリングにおけるファジィ推移的具象化の理論とアルゴリズム

三田村　保[†]　大内　東[†]

ファジィ構造モデリング「FISM/fuzzy」は対象とするシステムを構成要素集合上のファジィ擬順序関係として捉え，ファジィ可到達行列としてモデル化し，分類，整理するものである．ファジィ推移的具象化はモデル生成者の対象システムに対するあいまいな認識を関係の推移的性質を利用して具象化する過程である．本論文ではファジィ推移的具象化を柔軟かつ効率よく実行するために，ファジィ部分可到達行列および含意アルゴリズムを提案する．ファジィ部分可到達行列はファジィ可到達行列の拡張であり，これを用いることによってモデル生成者が柔軟にかつ矛盾なくモデリングを行うことが可能になる．含意アルゴリズムはファジィ部分可到達行列の効率的な更新を実現し，利用者のモデリングに対する負担を軽減する．FISM/fuzzy は，従来の構造モデリングに比べて現実の多元的価値が錯綜する複雑であいまいなシステム解析に適している．本論文の成果は，著者らの提案している FISM/fuzzy の中心的な役割を担っている．

Implication Theory and Algorithm for Fuzzy Transitive Embedding in Fuzzy Structural Modeling

TAMOTSU MITAMURA[†] and AZUMA OHUCHI[†]

Fuzzy Flexible Interpretive Structural Modeling (FISM/fuzzy) is a fuzzy version of Flexible Interpretive Structural Modeling (FISM). The fuzzy transitive embedding is a problem of how to efficiently fill the fuzzy reachability matrix. In this paper an implication theory and an algorithm for fuzzy transitive embedding of FISM/fuzzy are proposed. A fuzzy partially filled reachability matrix is proposed, which is an extension of a fuzzy reachability matrix and has great utility in the process of developing a fuzzy reachability matrix. The algorithm for the determining all of the implied values of unknown elements of the fuzzy partially filled reachability matrix derived from the supplied value is proposed. The algorithm requires $O(n^2)$ computer time and $\theta(n^2)$ storage, where n is the number of the system elements. Use of the algorithm makes it possible to do a flexible and an efficient modeling for complex and fuzzy systems.

1. はじめに

現在の情報システムに対する要求はますます多様化してきており，これらの要求を満足するためにシステムは大規模，複雑，多目的なものとなってきている．これらのシステムを計画，設計，構築，運用するためには従来の動的モデリングに加えて，構造モデリングが必要となる[1]．

構造モデリングとは，システムの構成要素集合とその上に定義される二項関係に注目し，システムの構造を有向グラフ等を用いて解析する手法である．その代表的手法の一つとして，J. N. Warfield 氏らが提案した ISM (Interpretive Structural Modeling) がある[2]．

大内らは従来の ISM の拡張として，柔軟な ISM (Flexible ISM),「FISM」を提案している[3),4]．FISM は部分可到達行列および含意理論を用いて推移的具象化 (Transitive embedding) を行うものである．部分可到達行列を用いたモデリングは人間の思考過程の機能を取り入れたものであり，対話による構造モデリングに適していると考えられる．しかし FISM の利用上の経験より，ユーザからは現実の多元的価値が錯綜する複雑であいまいなシステムを柔軟に解析するために，人間の思考のあいまい性を考慮した機能を有する FISM に対する強い要求がある．

あいまい性を考慮した構造モデリングとして，田崎氏らは Fuzzy Structural Modeling「FSM」を提案し

† 北海道大学工学部情報工学科
Department of Information Engineering, Faculty of Engineering, Hokkaido University

ている[5]．FSM は構成要素間の従属関係を示すあいまい従属行列を作成し，構造化を行う．しかし，あいまい従属行列自体はファジィ推移性を必ずしも満たすものではない．

著者らはこれまで FISM を拡張し，あいまい性を加味した柔軟かつ効率のよい構造モデリングとして Fuzzy Flexible Interpretive Structural Modeling「FISM/fuzzy」を提案している[6),7]．FISM/fuzzy は対象とするシステムを構成要素集合上のファジィ擬順序関係として捉え，ファジィ可到達行列としてモデル化し，分類，整理するものである．

本論文はその一環として，ファジィ部分可到達行列を用いたファジィ推移的具象化アルゴリズムを提案する．ファジィ推移的具象化はモデル生成者の対象システムに対するあいまいな認識を関係の推移的性質を利用して具象化する過程である．本論文の成果を利用することによって柔軟にかつ論理的に矛盾のないファジィ構造モデリングが可能となる．

2. ファジィ部分可到達行列

2.1 諸記号，諸定義

本論文で使用する主な記号と定義について記述する．さらに必要なものについてはその都度定義する．I は単位行列を表す．

- $N=\{1, 2, \cdots, n\}$：システム要素に対する添字集合，$J=N\times N$ とする．

まずクリスプな行列に関して部分可到達行列を定義する（部分可到達行列は，文献[3]を参照）．演算は二値ブール代数である．

定義 2.1 可到達行列

可到達行列とは以下の条件を満たす正方二値行列 M である．

$$M+I=M, \tag{1}$$

$$M^2=M. \tag{2}$$

定義 2.2 部分的既知な二値行列

部分的既知な二値行列とは，その要素が $\{1, 0\}$，またはブール変数 x である行列である．値が 1 または 0 であるとき既知要素，それ以外を未知要素と呼ぶ．

定義 2.3 部分可到達行列

部分可到達行列 M は，部分的既知な二値行列であり，以下の反射性，無矛盾性および極大性を満たす．

反射性：行列 M の対角要素が既知要素でかつ値が 1 である．

無矛盾性：行列 M が無矛盾であるとは

$$M(i, j)=0, M(i, k)=1, M(k, j)=1, \tag{3}$$

を満たす (i, j, k) が存在しないことをいう．

極大性：行列 M が極大であるとは未知要素 (i, j) に対して

$$M(i, j)=x, M(i, k)=1, M(k, j)=1, \tag{4}$$

$$M(i, k)=0, M(i, j)=x, M(j, k)=1, \tag{5}$$

$$M(k, j)=0, M(k, i)=1, M(i, j)=x, \tag{6}$$

のいずれの条件を満たす要素の三組 (i, j, k) が存在しないことをいう．

部分可到達行列の全要素が既知要素であるとき，部分可到達行列は可到達行列となる．よって部分可到達行列は可到達行列の拡張であることがいえる[3]．

次にファジィ行列に関してファジィ部分可到達行列を定義する．

- $R=\{(i, j)\mid i, j\in N\}\subseteq J$：$N$ 上の反射的かつ推移的ファジィ二項関係（ファジィ擬順序関係またはファジィ前順序関係）．
- ファジィ行列：ファジィ擬順序関係 R への帰属度を表す数値を要素とする行列である．行列 F の (i, j) 要素を f_{ij} と書く．ただし，$0\leq f_{ij}\leq 1$ である．すなわち

$$F(i, j)=[f_{ij}]. \tag{7}$$

- ファジィ行列 A, B に対して次の演算を定義する．

$$(A+B)_{ij}=\max(a_{ij}, b_{ij}), \tag{8}$$

$$(AB)_{ij}=\max_k[\min(a_{ik}, b_{kj})]. \tag{9}$$

定義 2.4 ファジィ可到達行列とは以下の条件を満たす正方ファジィ行列 F である．

$$F+I=F, \tag{10}$$

$$F^2=F. \tag{11}$$

定義 2.5 部分的既知なファジィ行列

部分的既知なファジィ行列とは，その行列の要素が最大値と最小値をもつ行列である．行列 F の (i, j) 要素の最大値を $\bar{f}_{ij}$，最小値を $\underline{f}_{ij}$ と書く，ただし．$0\leq\underline{f}_{ij}\leq\bar{f}_{ij}\leq 1$ である．すなわち

$$F(i, j)=[\underline{f}_{ij}, \bar{f}_{ij}]. \tag{12}$$

部分的既知なファジィ行列に対して要素を未知要素と既知要素に分ける．ただし未知要素と既知要素を以下で定義する．

$$F(i, j)=\begin{cases}\text{未知要素：} \underline{f}_{ij}<\bar{f}_{ij} \text{ のとき}\\ \text{既知要素：} \underline{f}_{ij}=\bar{f}_{ij} \text{ のとき.}\end{cases} \tag{13}$$

部分的既知なファジィ行列を用いると，ファジィ擬順序関係 R の帰属度を柔軟に表現することが可能である．(i, j) 要素が既知要素であるとき，その要素の値は，従来のファジィ行列と同様にファジィ擬順序関

係 iRj の帰属度を示す．一方 (i, j) 要素が未知要素であるときは，iRj の帰属度が $[\underline{f}_{ij}, \bar{f}_{ij}]$ で一意に決定することができない状態を示す．これは，区間真理値（可能性理論的解釈）に相当する．本論文では，FISM の部分的既知な二値行列の拡張として，部分的既知なファジィ行列と呼ぶ．

定義 2.6 ファジィ部分可到達行列

ファジィ部分可到達行列とは，部分的既知なファジィ行列でかつ以下のファジィ反射性とファジィ部分可到達性を満たす行列 F である．

ファジィ反射性：行列 F の対角要素が既知要素でかつ値が 1 である．

ファジィ部分可到達性：行列 F の (i, j) 要素について

$$\underline{f}_{ij} < \min(\underline{f}_{ik}, \underline{f}_{kj}), \tag{14}$$

$$\bar{f}_{ik} < \min(\bar{f}_{ij}, \underline{f}_{jk}), \tag{15}$$

$$\bar{f}_{kj} < \min(\underline{f}_{ki}, \bar{f}_{ij}), \tag{16}$$

のいずれかの条件を満たす要素の三組 (i, j, k) が存在しないことをいう．

［例］

図 1 の F', F'', F''', F'''' はすべて部分的既知なファジィ行列でかつファジィ反射性を満たす．ただし，最大値と最小値が等しい既知要素は値を一つのみ表示する．F' はファジィ部分可到達性を満たす．F'' は式(14)よりファジィ部分可到達性を満たさない（$\underline{f}''_{12}=0.5$, $\underline{f}''_{23}=0.3$ より $\underline{f}''_{13} \geq 0.3$ でなければならない）．F''' は式(15)よりファジィ部分可到達性を満たさない（$\bar{f}'''_{31}=0.3$, $\underline{f}'''_{21}=0.5$ より $\bar{f}'''_{32} \leq 0.3$ でなければならない）．F'''' は式(16)よりファジィ部分可到達性を満たさない（$\bar{f}''''_{31}=0.3$, $\underline{f}''''_{32}=0.4$ より $\bar{f}''''_{21} \leq 0.3$ でなければならない）．よって F' のみファジィ部分可到達行列である．

$F' =$

	1	2	3
1	1	0.5	[0.2,0.5]
2	[0.3,1]	1	[0.2,0.7]
3	[0,0.3]	[0,0.4]	1

$F'' =$

	1	2	3
1	1	0.5	[0.2,0.5]
2	[0.3,1]	1	[0.3,0.7]
3	[0,0.3]	[0,0.4]	1

$F''' =$

	1	2	3
1	1	0.5	[0.2,0.5]
2	[0.5,1]	1	[0.2,0.7]
3	[0,0.3]	[0,0.4]	1

$F'''' =$

	1	2	3
1	1	0.5	[0.2,0.5]
2	[0.3,1]	1	[0.2,0.7]
3	0.3	[0.4,0.5]	1

図 1 部分的既知なファジィ行列
Fig. 1 Fuzzy partially filled matrices.

ファジィ可到達性を満たすためには，ファジィ部分可到達行列の各要素はその上下限値内に制限される．ファジィ部分可到達行列の未知要素数は，対角要素以外はすべて未知要素であるとき最大で $n(n-1)$，すべての要素が既知要素のとき最小でゼロである．

次の定理はファジィ部分可到達行列がファジィ可到達行列の拡張であることを示している．

定理 2.1 ファジィ部分可到達行列 F のすべての要素が既知要素であるとき F はファジィ可到達行列である．

証　明

ファジィ部分可到達行列 F のすべての要素が既知要素であるとき，任意の (i, j) 要素の値は一つとなり

$$\underline{f}_{ij}=\bar{f}_{ij}=f_{ij}, \tag{17}$$

とおくことができる．定義 2.6 のファジィ反射性より F の対角要素は

$$f_{ii}=1, \tag{18}$$

であるから定義 2.4 の式(10)を満足する．

また定義 2.6 のファジィ部分可到達性は，任意の (i, j) 要素について

$$f_{ij} < \min(f_{ik}, f_{kj}), \tag{19}$$

$$f_{ik} < \min(f_{ij}, f_{jk}), \tag{20}$$

$$f_{kj} < \min(f_{ki}, f_{ij}), \tag{21}$$

のいずれかの条件を満たす要素の三組 (i, j, k) が存在しないこととなる．これら三式は添字が違うだけで

$$f_{ij} < \min(f_{ik}, f_{kj}), \tag{22}$$

にまとめられる．これは定義 2.4 の式(11)が満たされない場合である．よってすべての要素が既知であるファジィ部分可到達行列はファジィ可到達行列である．（証明終）

ファジィ可到達行列は通常のクリスプな可到達行列の拡張であることが知られている[8]．

ファジィ可到達行列の値が $\{0, 1\}$ のみからなる場合，定義 2.1 を満たすクリスプな可到達行列となる．

またファジィ可到達行列を F とし，$\alpha \in [0, 1]$ に対

して，その α-レベル行列を F_α を

$$F_\alpha(i,j)=\begin{cases}1: f_{ij}\geq\alpha\\ 0: f_{ij}<\alpha,\end{cases} \tag{23}$$

と定義すると，F_α はクリスプな可到達行列である．

次の諸定理は部分的既知な二値行列 M の未知要素 x を部分的既知なファジィ行列 F の未知要素 $[0,1]$ に対応させると，ファジィ部分可到達行列が部分可到達行列の拡張であることを示す．

定理 2.2 行列 M が部分可到達行列とする．その (i,j) 要素の値を以下のように行列 F に対応させると，行列 F はファジィ部分可到達行列となる．

$$F(i,j)=\begin{cases}[1,1]: M(i,j)=1 \text{ のとき}\\ [0,0]: M(i,j)=0 \text{ のとき}\\ [0,1]: M(i,j)=x \text{ のとき．}\end{cases} \tag{24}$$

証　明

行列 M が部分可到達行列であるとき，無矛盾・極大性より (i,j) 要素について

$$M(i,j)=x\vee 0, M(i,k)=1, M(k,j)=1, \tag{25}$$

$$M(i,k)=0, M(i,j)=x\vee 1, M(j,k)=1, \tag{26}$$

$$M(k,j)=0, M(k,i)=1, M(i,j)=x\vee 1, \tag{27}$$

のいずれかの条件を満たす要素の三組 (i,j,k) が存在しない．行列 F に対応されると，(i,j) 要素に対して

$$F(i,j)=[0,1]\vee[0,0], F(i,k)=[1,1], F(k,j)=[1,1], \tag{28}$$

$$F(i,k)=[0,0], F(i,j)=[0,1]\vee[1,1], F(j,k)=[1,1], \tag{29}$$

$$F(k,j)=[0,0], F(k,i)=[1,1], F(i,j)=[0,1]\vee[1,1], \tag{30}$$

のいずれかの条件を満たす要素の三組 (i,j,k) が存在しないことになる．これは定義 2.6 のファジィ部分可到達性を満たす．また部分可到達性の反射性は，ファジィ可到達性のファジィ反射性を満たす．よって行列 F はファジィ部分可到達行列である．（証明終）

定理 2.3 ファジィ部分可到達行列 F の α-レベル行列 F_α を

$$F_\alpha(i,j)=\begin{cases}1: \underline{f}_{ij}\geq\alpha\\ x: \underline{f}_{ij}<\alpha\leq\bar{f}_{ij}\\ 0: \bar{f}_{ij}<\alpha,\end{cases} \tag{31}$$

とするとき，α-レベル行列 F_α は部分可到達行列である．

証　明

ファジィ部分可到達行列の α-レベル行列 F_α が無矛盾性と極大性を満たさないと仮定する．定義 2.3 をまとめると，任意の F_α が極大かつ無矛盾であるとき，任意の (i,j) 要素に対して

$$F_\alpha(i,j)=x\vee 0,\ F_\alpha(i,k)=1,\ F_\alpha(k,j)=1, \tag{32}$$

$$F_\alpha(i,k)=0,\ F_\alpha(i,j)=x\vee 1,\ F_\alpha(j,k)=1, \tag{33}$$

$$F_\alpha(k,j)=0,\ F_\alpha(k,i)=1,\ F_\alpha(i,j)=x\vee 1, \tag{34}$$

を満たす (i,j,k) が存在することになる．これを α を用いると

$$\underline{f}_{ij}<\alpha\leq\min(\underline{f}_{ik},\underline{f}_{kj}) \tag{35}$$

$$\bar{f}_{ik}<\alpha\leq\min(\bar{f}_{ij},\underline{f}_{jk}) \tag{36}$$

$$\bar{f}_{kj}<\alpha\leq\min(\underline{f}_{ki},\bar{f}_{ij}) \tag{37}$$

となる．よって展開すると以下の式が導かれる．

$$\underline{f}_{ij}<\min(\underline{f}_{ik},\underline{f}_{kj}) \tag{38}$$

$$\bar{f}_{ik}<\min(\bar{f}_{ij},\underline{f}_{jk}) \tag{39}$$

$$\bar{f}_{kj}<\min(\underline{f}_{ki},\bar{f}_{ij}) \tag{40}$$

上記の三式は定義 2.6 のファジィ部分可到達性を満たさない (i,j,k) の三組が存在することになる．これは行列 F がファジィ部分可到達行列である仮定に反する．また F_α が反射性を満たさなければ，行列 F はファジィ反射性を満たさない．ゆえにファジィ部分可到達行列 F の α-レベル行列 F_α は部分可到達行列である．（証明終）

以上の諸定理からファジィ部分可到達行列は，ファジィ可到達行列，部分可到達行列，可到達行列のある種の拡張であることがいえる（**図 2**）．

3. 含意アルゴリズム

本章ではファジィ部分可到達行列の更新を目的とした含意アルゴリズムについて述べる．

定義 3.1 添字対集合 W

未知要素である (i,j) 要素の値に依存して決定される要素を表す添字の二項対集合で，以下のように与えられる．

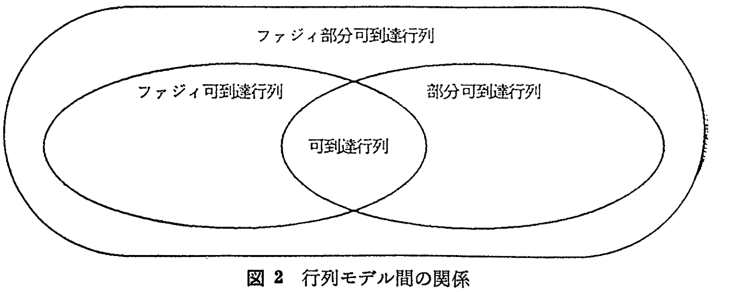

図 2 行列モデル間の関係
Fig. 2 Relationships of four matrix models.

$$W_1(i, j)=\{(l, m) \mid \underline{f}_{lm}<\min(\underline{f}_{ij}, \underline{f}_{li}, \underline{f}_{jm})\} \tag{41}$$

$$W_2(i, j)=\{(l, m) \mid \bar{f}_{im}<\min(\bar{f}_{lm}, \underline{f}_{ij}, \underline{f}_{jl})\} \tag{42}$$

$$W_3(i, j)=\{(l, m) \mid \bar{f}_{lj}<\min(\bar{f}_{lm}, \underline{f}_{ij}, \underline{f}_{mi})\} \tag{43}$$

$$W_4(i, j)=\{(l, m) \mid \bar{f}_{ij}<\min(\bar{f}_{lm}, \underline{f}_{il}, \underline{f}_{mj})\} \tag{44}$$

以上の諸集合は簡単のため W_1, W_2, W_3, W_4 と記す.

上述の添字対集合 W は後で示すように含意規則によって値が変更対象となる未知要素を示すものである. 含意規則とは, ファジィ部分可到達行列の未知要素に値を与えたときに新たな行列が再びファジィ部分可到達性を満たすために他の未知要素の値を決定する規則である.

定義 3.2 含意規則

未知要素 $F(i, j)$ の値 $[\underline{f}_{ij}, \bar{f}_{ij}]$ を $[\underline{f}'_{ij}, \bar{f}'_{ij}]$ としたとき, 以下の4通りの規則を適用すれば, (l, m) 要素の値 $[\underline{f}_{lm}, \bar{f}_{lm}]$ は新たな値 $[\underline{f}'_{lm}, \bar{f}'_{lm}]$ となる. ただし, $0 \leq \underline{f}_{ij} \leq \underline{f}'_{ij} \leq \bar{f}'_{ij} \leq \bar{f}_{ij} \leq 1$ とする.

規則 1 : $if\ \underline{f}_{ij}<\underline{f}'_{ij}\ then$

$$\underline{f}'_{lm}=\min(\underline{f}'_{ij}, \underline{f}_{li}, \underline{f}_{jm})\ \forall(l, m) \in W_1$$

規則 2 : $if\ \underline{f}_{ij}<\underline{f}'_{ij}\ then$

$$\bar{f}'_{lm}=\bar{f}_{im} \qquad \forall(l, m) \in W_2$$

規則 3 : $if\ \underline{f}_{ij}<\underline{f}'_{ij}\ then$

$$\bar{f}'_{lm}=\bar{f}_{lj} \qquad \forall(l, m) \in W_3$$

規則 4 : $if\ \bar{f}'_{ij}<\bar{f}_{ij}\ then$

$$\bar{f}'_{lm}=\bar{f}'_{ij} \qquad \forall(l, m) \in W_4$$

3.1 含意規則の諸性質

含意規則をファジィ部分可到達行列に適用した結果, 既知要素の値が変更されることはない. 規則の適用によって得られる未知要素 (l, m) の値は適用前後で

$$0 \leq \underline{f}_{lm} \leq \underline{f}'_{lm} \leq \bar{f}'_{lm} \leq \bar{f}_{lm} \leq 1$$

となる.

またファジィ部分可到達行列の含意された値は, 各規則の適用順序に依存することはない. 次の定理は, これらの含意規則により更新された行列 F は再びファジィ部分可到達行列となることを保証するものである.

定理 3.1 含意規則を用いて更新された新たな行列 F は再びファジィ部分可到達行列となる.

証 明

付録を参照.

以上の定理よりファジィ部分可到達行列の未知要素に値を与えて, この規則を繰り返し適用すれば, ファジィ部分可到達行列の要素全体が既知であるファジィ可到達行列が得られることが可能である. 未知要素に与える値は, 一般的には区間値であるが, 特殊な場合として上下限値が等しい場合, すなわち一定値でも許される. 規則の計算量は, 任意の (l, m) 要素の値が (i, j) 要素における添字対集合に含まれていれば, それぞれ最小値, 最大値を変更するので $O(n^2)$ である. またファジィ部分可到達行列の必要記憶容量も $\theta(n^2)$ である.

4. ファジィ推移的具象化

ファジィ推移的具象化とは, システムの構成要素間のファジィ擬順序関係の帰属度を決定することである. 帰属度を表す行列を F とする. F の未知要素の値を決定し, その値から含意規則によって推論される他の未知要素の値を決定することを繰り返す. 結果として, F は全体が既知要素であるファジィ可到達行列になる.

この過程にファジィ部分可到達行列および含意規則を用いるとファジィ推移的具象化過程は以下のようになる.

1. 前処理
   (a) 構成要素集合 N の決定.
   (b) ファジィ擬順序関係 R の決定.
   (c) ファジィ部分可到達行列 F の初期化.
2. モデル生成 (モデル生成者が満足するモデルとなるまで以下を繰り返す.)
   (a) 関係 iRj の帰属度の入力.
   (b) 含意規則を用いた F の更新.

```
begin
    if (f_ij < f'_ij)
        f'_lm = min(f'_ij, f_li, f_jm)
                        ∀(l, m) ∈ W1 : 規則 1
        f̄'_lm = f̄_im    ∀(l, m) ∈ W2 : 規則 2
        f̄'_lm = f̄_lj    ∀(l, m) ∈ W3 : 規則 3
    if (f̄'_ij < f̄_ij)
        f̄'_lm = f̄'_ij   ∀(l, m) ∈ W4 : 規則 4
end
```

5. 応　用　例

ファジィ推移的具象化の例として"学生の就職に対する意思決定"を取り上げる. 学生が就職するにあた

り“どのような情報を重要視するか”という観点から学生の就職に対するあいまいな認識をモデル化する．ある学生に関しては，以下のようになった．

1. 前処理

構成要素集合 N の要素は“学生が就職に関して重要視している情報”とする．構成要素の抽出はブレーンストーミング，KJ 法などによる．本例では，

$N=\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$

s_1：安定性のある企業に入る．

s_2：高収入な職につく．

s_3：福利厚生のよい企業に入る．

s_4：地方に住む．

とする．関係 R は，構成要素間を比較するものとして“〜は〜より重要である”とする．ファジィ部分可到達行列 F

$$F(i,j)=[\underline{f}_{ij}, \bar{f}_{ij}]$$

の要素 $[\underline{f}_{ij}, \bar{f}_{ij}]$ は“s_i は s_j より重要である”ことの帰属度を表すものである．初期化として対角要素を既知で値を 1，それ以外の要素を未知とし，最小値を 0，最大値を 1 とする．前処理後の行列 F は**図 3** となる．

2. モデル生成

(a) 関係の帰属度の入力は，選択された要素対に対してモデル生成者が解答する．要素対の選択は生成者が任意に指定して入力してもよいし，計算機が適当な要素対を選択して，その要素対の関係の帰属度を質問してきてもよい．後者の場合，モデル生成者は質問に対し，解答を保留して次の質問を促すことが可能である．この場合計算機が次の要素対を選択し，質問する．

質問に対して，モデル生成者は要素間の重要度を**図 4** の 5 段階から区間値内の値を選択して入力する．例えば

計算機：“s_i は s_j より重要ですか？”

モデル生成者：“少し (0.2)”

この場合，行列 F には (i,j) 要素に 0.2 を入力する．行列 F を入力された (i,j) の値より含意規則を用いて再び行列 F がファジィ部分可到達行列となるように更新する．この過程はモデル生成者にとって満足するモデルになるまで繰り返す．本例では，以下の 9 ステップとなる．

ステップ 1〜3

モデル生成者が $F(1,2)=0.2$, $F(2,1)=0$, $F(4,3)=0.5$ の情報を順次入力し，含意規則を適用した時点で行列は**図 5** の F' になり，ファジィ部分可到達行列である．この場合含意規則によって新たに値が変更になった未知要素は存在しない．

ステップ 4

$F(2,3)=0.7$ の情報を入力すると，以下の未知要素の値が決定される．

$\underline{f}_{13}=0.2$ $(W_1(2,3)=\{(1,3)\})$

$F=$

	s_1	s_2	s_3	s_4
s_1	1	[0,1]	[0,1]	[0,1]
s_2	[0,1]	1	[0,1]	[0,1]
s_3	[0,1]	[0,1]	1	[0,1]
s_4	[0,1]	[0,1]	[0,1]	1

図 3 前処理
Fig. 3 Startup matrix.

極めて	かなり	ある程度	少　し	全くない
1.0	0.7	0.5	0.2	0

図 4 関係の帰属度
Fig. 4 The grade of relation.

$F'=$

	s_1	s_2	s_3	s_4
s_1	1	0.2	[0,1]	[0,1]
s_2	0	1	[0,1]	[0,1]
s_3	[0,1]	[0,1]	1	[0,1]
s_4	[0,1]	[0,1]	0.5	1

$F''=$

	s_1	s_2	s_3	s_4
s_1	1	0.2	[0.2,1]	[0,1]
s_2	0	1	0.7	[0,1]
s_3	0	[0,1]	1	[0,1]
s_4	[0,1]	[0,0.5]	0.5	1

$F'''=$

	s_1	s_2	s_3	s_4
s_1	1	0.2	[0.2,1]	[0.2,1]
s_2	0	1	0.7	[0.2,0.5]
s_3	0	[0,1]	1	[0,0.5]
s_4	0	[0,0.5]	0.5	1

$F''''=$

	s_1	s_2	s_3	s_4
s_1	1	0.2	0.5	1
s_2	0	1	0.7	0.2
s_3	0	0.2	1	0.2
s_4	0	0.2	0.5	1

図 5 行列 F の更新
Fig. 5 Updating F.

$\bar{f}_{31}=0$ $(W_2(2,3)=\{(3,1)\})$

$\bar{f}_{42}=0.5$ $(W_3(2,3)=\{(4,2)\})$

新たな F は F'' の通りであり，ファジィ部分可到達行列である．

ステップ5

次に $F(2,4)=[0.2, 0.5]$ の区間値を入力すると，以下の未知要素の値が決定される．

$\underline{f}_{14}=0.2$ $(W_1(2,4)=\{(1,4)\})$

$\bar{f}_{41}=0$ $(W_2(2,4)=\{(4,1)\})$

$\bar{f}_{34}=0.5$ $(W_4(2,4)=\{(3,4)\})$

新たな F は F''' の通りであり，ファジィ部分可到達行列である．

ステップ 6〜9

さらに $F(4,2)=0.2$, $F(1,4)=1$, $F(1,3)=0.5$, $F(3,2)=0.2$, $F(2,3)=0.2$ を順次入力し，含意規則を適用し行列 F を更新すると，最終的に行列は F'''' となりファジィ可到達行列が生成される．この行列を解析することによって学生の個々の情報間に対する重要性が明確になる．

6. むすび

本論文ではファジィ構造モデリングである「FISM/fuzzy」の推移的具象化アルゴリズムを提案した．柔軟な推移的具象化を行うためにファジィ部分可到達行列を提案し，含意規則を用いた更新理論を提案した．これによって関係のあいまい性を取り入れた構造モデリングがマン・マシン・インタフェースの点でより柔軟に行うことが可能となった．

今後の課題としては，「FISM/fuzzy」の推移的具象化に続く構造化過程に関する研究などが残されている．

謝辞 なお，本研究は文部省科学研究費補助金（特別研究員奨励費）により一部援助をいただいた．

参 考 文 献

1) 大内，河野：システム計画構築技法の新展開，電気学会雑誌，Vol. 108, No. 1, pp. 21-28 (1988).
2) Warfield, J. N.: *Societal Systems-Planning, Policy and Complexity*, John Wiley & Sons (1976).
3) Ohuchi, A., Kurihara, M. and Kaji, I.: Implication Theory and Algorithm for Reachability Matrix Model, *IEEE Trans. SMC*, Vol. SMC-16, No. 8, pp. 610-616 (1986).
4) Ohuchi, A. and Kaji, I.: Correction Procedures for Flexible Interpretive Structural Modeling, *IEEE Trans. SMC*, Vol. SMC-19, No. 1, pp. 85-94 (1989).
5) Tazaki, E., Amagasa, M.: Structural Modeling in a Class of Systems Using Fuzzy Sets Theory, *International Journal for Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 2, No. 1, pp. 1-17 (1979).
6) 若林，大内：ファジィシステム構造行列の推移的結合，情報処理学会論文誌，Vol. 33, No. 5, p. 620 (1992).
7) 三田村，大内：ファジィ部分可到達行列の更新アルゴリズム，第 45 回情報処理学会全国大会論文集 (1992).
8) 水本：ファジィ理論とその応用，サイエンス社 (1989).

付 録

定理 3.1 含意規則を用いて更新された新たな行列 F は再びファジィ部分可到達行列となる．

証 明

含意規則により $F(i,j)$ から含意される添字対集合 W

$W=W_1\cup W_2\cup W_3\cup W_4$

とすると，W に含まれていない対集合 (p,r), (r,p), (q,r), (r,q) に対する関係においてファジィ部分可到達性に矛盾したと仮定する．

（1）規則1によって (p,q) 要素の値が得られたとき，(p,q,r) の組で矛盾していると仮定すると，以下の場合が存在する．

（a） $\underline{f}_{rq} < \min(\underline{f}_{rp}, \underline{f}'_{pq})$

（b） $\underline{f}_{pr} < \min(\underline{f}'_{pq}, \underline{f}_{qr})$

（c） $\bar{f}_{rq} < \min(\bar{f}_{rp}, \underline{f}'_{pq})$

（d） $\bar{f}_{pr} < \min(\underline{f}'_{pq}, \bar{f}_{qr})$

$\underline{f}'_{pq}=\min(\underline{f}_{pi}, \underline{f}'_{ij}, \underline{f}_{jq})$ を代入して

（a） $\underline{f}_{rq} < \min(\underline{f}_{rp}, \underline{f}_{pi}, \underline{f}'_{ij}, \underline{f}_{jq})$

（b） $\underline{f}_{pr} < \min(\underline{f}_{pi}, \underline{f}'_{ij}, \underline{f}_{jq}, \underline{f}_{qr})$

（c） $\bar{f}_{rq} < \min(\bar{f}_{rp}, \underline{f}_{pi}, \underline{f}'_{ij}, \underline{f}_{jq})$

（d） $\bar{f}_{pr} < \min(\underline{f}_{pi}, \underline{f}'_{ij}, \underline{f}_{jq}, \bar{f}_{qr})$

ファジィ部分可到達性より，各条件において

（a） $\underline{f}_{ri} \geq \min(\underline{f}_{rp}, \underline{f}_{pi})$

（b） $\underline{f}_{jr} \geq \min(\underline{f}_{jq}, \underline{f}_{qr})$

（c） $\bar{f}_{rj} < \bar{f}_{rp}$ $(\bar{f}_{rq}<\underline{f}_{jq})$

（d） $\bar{f}_{ir} < \bar{f}_{pr}$ $(\bar{f}_{ir}<\underline{f}_{ii}$ より）

が成立する．これより以下の式が導かれる．

（a） $\underline{f}_{rq} < \min(\underline{f}_{ri}, \underline{f}'_{ij}, \underline{f}_{jq})$

（b） $\underline{f}_{pr} < \min(\underline{f}_{pi}, \underline{f}'_{ij}, \underline{f}_{jr})$

（c） $\bar{f}_{rj} < \min(\bar{f}_{rp}, \underline{f}'_{ij}, \underline{f}_{pi})$

（d） $\bar{f}_{ir} < \min(\bar{f}_{qr}, \underline{f}'_{ij}, \underline{f}_{jm})$

上記の4通りはそれぞれ（a）$(r,q)\in W_1$,（b）$(p,$

$r)\in W_1$, (c) $(r,p)\in W_3$, (d) $(q,r)\in W_2$ となり，それぞれ規則1, 2, 3が適用されており，ファジィ部分可到達性が満たされる値が与えられている．よって規則1を適用してもファジィ部分可到達性を満たさない (p,q,r) の組は存在しない．

(2) 規則2も規則1と同様に，(p,q) 要素の値が得られたとき，(p,q,r) の組で矛盾していると仮定すると，以下の場合が存在する．

(a) $\bar{f}'_{pq} < \min(\underline{f}_{pr}, \bar{f}_{rq})$

(b) $\bar{f}'_{pq} < \min(\bar{f}_{pr}, \underline{f}_{rq})$

$\bar{f}'_{pq}=\bar{f}_{iq}$ を代入して

(a) $\bar{f}_{iq} < \min(\underline{f}_{pr}, \bar{f}_{rq})$

(b) $\bar{f}_{iq} < \min(\bar{f}_{pr}, \underline{f}_{rq})$

ファジィ部分可到達性より，各条件のもとで

(a) $\underline{f}_{jr} \geq \min(\underline{f}_{jp}, \underline{f}_{pr})$

(b) $\bar{f}_{ir} < \bar{f}_{iq}$ 　　　　($\bar{f}_{iq}<\underline{f}_{rq}$ より)

が成立する．これより以下の式が導かれる．

(a) $\bar{f}_{iq} < \min(\bar{f}_{rq}, \underline{f}'_{ij}, \underline{f}_{jr})$

(b) $\bar{f}_{ir} < \min(\bar{f}_{pr}, \underline{f}'_{ij}, \underline{f}_{jp})$

上記の2通りはそれぞれ(a) $(r,q)\in W_2$, (b) $(p,r)\in W_2$ となるので，規則2によって値が得られており，ファジィ部分可到達性を満たさない条件は存在しない．

(3) 規則3の場合，(p,q,r) の組で矛盾していると仮定すると，以下の場合が存在する．

(a) $\bar{f}'_{pq} < \min(\underline{f}_{pr}, \bar{f}_{rq})$

(b) $\bar{f}'_{pq} < \min(\bar{f}_{pr}, \underline{f}_{rq})$

$\bar{f}'_{pq}=\bar{f}_{pj}$ を代入して

(a) $\bar{f}_{pj} < \min(\underline{f}_{pr}, \bar{f}_{rq})$

(b) $\bar{f}_{pj} < \min(\bar{f}_{pr}, \underline{f}_{rq})$

ファジィ部分可到達性より，各条件において

(a) $\bar{f}_{rj} < \bar{f}_{pj}$ 　　　　($\bar{f}_{pj}<\underline{f}_{pr}$ より)

(b) $\underline{f}_{ri} \geq \min(\underline{f}_{rq}, \underline{f}_{qi})$

が成立する．これより以下の式が導かれる．

(a) $\bar{f}_{rj} < \min(\bar{f}_{rq}, \underline{f}'_{ij}, \underline{f}_{qi})$

(b) $\bar{f}_{pr} < \min(\bar{f}_{pr}, \underline{f}'_{ij}, \underline{f}_{ri})$

上記の2通りはそれぞれ(a) $(r,q)\in W_3$, (b) $(p,r)\in W_3$ となるので，規則3によって値が決定されており，ファジィ部分可到達性を満たさない条件は存在しない．

(4) 規則4の場合，矛盾していると仮定すると，以下の場合が存在する．

(a) $\bar{f}'_{pq} < \min(\underline{f}_{pr}, \bar{f}_{rq})$

(b) $\bar{f}'_{pq} < \min(\bar{f}_{pr}, \underline{f}_{rq})$

$\bar{f}'_{pq}=\bar{f}'_{ij}$ を代入して

(a) $\bar{f}'_{ij} < \min(\underline{f}_{pr}, \bar{f}_{rq})$

(b) $\bar{f}'_{ij} < \min(\bar{f}_{pr}, \underline{f}_{rq})$

ファジィ部分可到達性より

(a) $\underline{f}_{ir} \geq \min(\underline{f}_{ip}, \underline{f}_{pr})$

(b) $\underline{f}_{rj} \geq \min(\underline{f}_{rq}, \underline{f}_{qj})$

が成立する．これより以下の式が導かれる．

(a) $\bar{f}'_{ij} < \min(\bar{f}_{rq}, \underline{f}_{ir}, \underline{f}_{qj})$

(b) $\bar{f}'_{ij} < \min(\bar{f}_{pr}, \underline{f}_{ip}, \underline{f}_{rj})$

上記の2通りはそれぞれ(a) $(r,q)\in W_4$, (b) $(p,r)\in W_4$ となるので，含意規則によって値が決定されており，ファジィ部分可到達性を満たさない条件は存在しない．

(1), (2), (3), (4)より更新された行列 F において矛盾が仮定される (p,q,r) の組は存在せず，よって更新後の行列 F はファジィ部分可到達行列である．(証明終)

(平成4年11月20日受付)
(平成5年11月11日採録)

三田村　保（正会員）

昭和41年生．平成2年北海道大学工学部電気工学科卒業．平成4年北海道大学大学院工学研究科電気工学専攻修士課程修了．現在，北海道大学大学院工学研究科情報工学専攻博士課程在学中．システム工学の研究に従事．人工知能学会，日本ファジィ学会各会員．日本学術振興会特別研究員．

大内　東（正会員）

昭和20年生．昭和49年北海道大学大学院工学研究科博士課程修了．工学博士．北海道大学工学部情報工学科教授．システム情報工学，応用人工知能システム，医療システムの研究に従事．人工知能学会，電気学会，電子情報通信学会，計測自動制御学会，日本OR学会，医療情報学会，病院管理学会，IEEE-SMC各会員．