Vol. 35 No. 2　　情報処理学会論文誌　　Feb. 1994

自動証明における自然な証明生成への一つの近接

大　芝　猛†

1階述語論理における自動証明について，与えられた論理式 A_0 に対する妥当性検証手続きが肯定的に終了するとき，そのとき得られるある種の情報を guide とするならば，論理式 A_0 の LK 証明図を生成することが可能である．ここではさらにこのようにして得られた LK 証明図を人の証明に近づける変換アルゴリズムを連結し，自然な証明の生成を一貫した自動証明手続きにより行うことへの一つの近接を試みる．すなわち以下では，自動証明で得られた LK 証明図の中に潜在する‘場合分け証明に関する情報’等を顕現化することにより，排中律型公理の下で三段論法を含む自然な証明へ変換するアルゴリズムの一つが提示される．

An Approach to Human Reasoning in Automatic Theorem Proving

Takeshi Oshiba†

In human reasoning, the following deduction process 'proof by cases', often appears: under the axiom of excluded middle 'E or not E holds' and modus ponens, to show a certain statement, it is sufficient to show the statement in two cases, one when 'E' holds, and two when 'not E' holds. Usually, LK-proofs directly derived from 1st order theorem provers have neither 'proof by cases' nor modus ponens. In this paper, we present an algorithm which converts any LK-proof (but not LJ) to a proof in (LJ+Excluded middle type axiom) system, where the obtained proof scheme has, as skeleton, a tree structure of processes of 'proof by cases' with modus ponens. Thus, connecting this algorithm to a previously given LK-prover, we can arrive an approach to an automatic theorem prover which produces a humanlike proof with processes of 'proof by cases' and modus ponens.

1. はじめに

一般に自動証明であるか否かによらず，通常得られる LK 証明図は，次の3点から人にわかりやすいとはいえず，また人の自然な証明からかけはなれている．

（1） LK 証明図の要素は $A_1, \cdots, A_m \rightarrow B_1, \cdots, B_n$ ($A_1 \& \cdots \& A_m$ は $B_1 \mathrm{or} \cdots \mathrm{or} B_n$ を導くの意味をもつ）のように→の右辺にも複数個の論理式をもつ sequent であり，特に $n \geqq 2$ の場合，証明図の意味がとりにくい．

（2） 自動証明によって直接得られる LK 証明図[1),2)] は一般に cut 推論を含まず，人の証明に頻繁に現れる三段論法（LK では cut が対応する）には無縁である．

（3） さらに heuristic な着想にもとづく‘場合分けの証明’等の証明形態も現れてこない．

本研究では，一般に‘LK 証明図’を，‘右辺がたかだか一つの論理式の sequent のみからなり，しかも人の自然な証明の流れを指向する証明図’へ変換するアルゴリズムの一つを‘LK 証明図の（LJ＋排中律型公理）体系の証明図への変換’の形で提示する．そしてこの変換によって，前述の三段論法が場合分けの証明形式とともに，自然に生成されるのをみることができる．

2. 排中律・三段論法と場合分け証明の型

（1） A_0: $\exists x \forall y(p(x) \supset p(y))$ の人による証明の例をとり上げる．まず $\forall z p(z)$ (: E) なる論理式に着目する．

(case 1) $\forall z p(z)$ (: E) が成立する場合：任意の b に対し，$p(b)$ が成立する．したがって，任意の a に対し，$p(a) \supset p(b)$ 成立．したがって $\forall y(p(a) \supset p(y))$ 成立．ゆえに，当然 $\exists x \forall y(p(x) \supset p(y))$ も成立する．

(case 2) $\neg \forall z p(z)$ (: $\neg E$) が成立する場合：このとき同等な $\exists z \neg p(z)$ (: E' とかく）が成立．このような z の一つを b とおく．したがって $\neg p(b)$ 成立．したがって，任意の c に対し，$\neg p(b) \vee p(c)$ 成

† 名古屋工業大学工学部電気情報工学科
Department of Electrical and Computer Engineering, Faculty of Engineering, Nagoya Institute of Technology

立．すなわち，$\neg p(b)$ または $p(c)$ のいずれかが成立となる．そこでもし $p(b)$ を仮定すれば $p(c)$ が成立せざるを得ない．したがって $p(b) \supset p(c)$ が成立する．ゆえに，$\forall y(p(b) \supset p(y))$ 成立．したがって $\exists x \forall y(p(x) \supset p(y))$ が成立する．

以上から，E(case 1)，$\neg$E(case 2) いずれの場合にも A_0: $\exists x \forall y(p(x) \supset p(y))$ が成立．一方，排中律から，(case 1) までは (case 2) 以外の場合はないので，A_0: $\exists x \forall y(p(x) \supset p(y))$ 自体はつねに成立．(証明了)

以上の証明を整理すると，次のようになる．

“まず E: $\forall z p(z)$ なる論理式に着目し，1) $E \Rightarrow A_0$，2) $\neg E \Rightarrow A_0$ を示す．したがって，$(E \vee \neg E) \Rightarrow A_0$ が成立．

一方，排中律 $E \vee \neg E$ の成立と三段論法から，A_0 が成立する”．

この証明の主眼は，与えられた論理式 A_0: $\exists x \forall y (p(x) \supset p(y))$ に対し，場合分けの証明の条件式 E: $\forall z p(z)$ に着目したことにある．この着目により証明の糸口が得られるので，E をこの種の証明探索の“key formula”と呼ぶ．

自動証明においても，このような自然な人の証明への近接には，この key formula E を求めるアルゴリズムが問題となる．そして次の(2)における例で示唆し，後の4章で一般化されるアルゴリズムは，この問題に対する一つの解答を与える．

（2） LK 証明図の場合分け証明への変形例

まず，妥当性検証・証明図作成手続き[1),2)]，等から生成する等して，A_0: $\exists x \forall y(p(x) \supset p(y))$ に到る cut 推論なしの LK 証明図（**図1**）が与えてあるとする．すなわち，始式 $p(b) \rightarrow p(b)$（LK 型公理）から cut 以外の LK 推論を用いて‘$\rightarrow A_0$’を導く証明である．

この例で，最下の推論 I（contraction 右）の上の sequent は右辺に複数個の論理式をもつ，いわゆる非 LJ sequent である．そこで右辺の二つの A_0 のおのおのを導く推論変形をそれぞれ上へたどり，I の上部の部分証明図 $\boldsymbol{P}_1$ を，それぞれの A_0 に到る推論系統に分ける切れ目を入れる（図1の□と⬚）その上で，**図2**の□と⬚のように二つの演繹図 $\mathcal{Q}_1$ と $\mathcal{R}_1$ に分離する（このとき，一般に元の $\boldsymbol{P}_1$ の各推論は $\mathcal{Q}_1$，$\mathcal{R}_1$ のどちらかへ移る．また演繹図の定義は3(2))．ただしこの場合，図1の始式公理 $p(b) \rightarrow p(b)$ 自体も $\boxed{\rightarrow p(b)}$，$\boxed{p(b) \rightarrow}$ のように分離されるので，LK の公理（$D \rightarrow D$型）ではなくなる．そこで**図2**の最上部のように，それぞれの左端に e: $p(b)$，e': $\neg p(b)$ と（$\neg$左推論）を補い

$$e \because p(b) \boxed{\rightarrow p(b)},$$

$$e' \because \frac{p(b) \rightarrow p(b)}{\neg p(b), \boxed{p(b) \rightarrow}} (\neg 左)$$

のように公理式とする．その上で付加した1対の論理式 e, e' を下方に向かって，それぞれの演繹図の sequent の左端に補い付記していく．このとき元の証明図図1の # の位置のように，自由変数 b（任意の b を表す）を束縛する（$\forall$右）推論があれば，“図2の $\mathcal{Q}_1$，$\mathcal{R}_1$ の対応する位置 #1，#2 に関して，（$\forall$右）推論が移った方の $\mathcal{Q}_1$ の #1 の位置においては，その直前に（$\forall$左）推論を挿入し，e: $p(b)$ を E: $\forall z p(z)$ に変形する*．

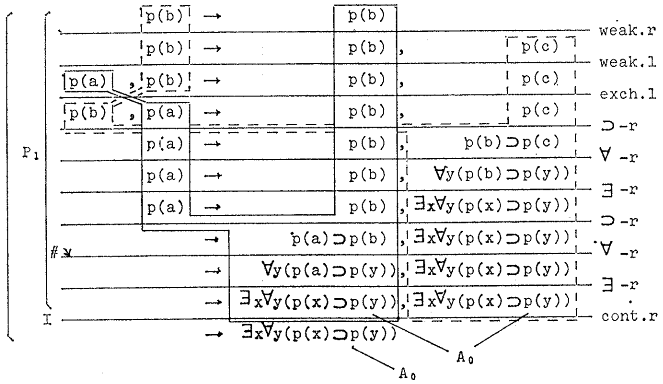


図1 contraction 右推論をもつ A_0: $\exists x \forall y(p(x) \supset p(y))$ の LK 証明図 P_0
Fig. 1 P_0: an LK-proof of A_0: $\exists x \forall y(p(x) \supset p(y))$, with a contraction right inference.

* $p(b)$ に対する変形推論（$\forall$左）の挿入はその直後の（$\forall$右）推論の変数条件（$\forall$右推論の下の sequent に b は残っていてはならない）から必要である．

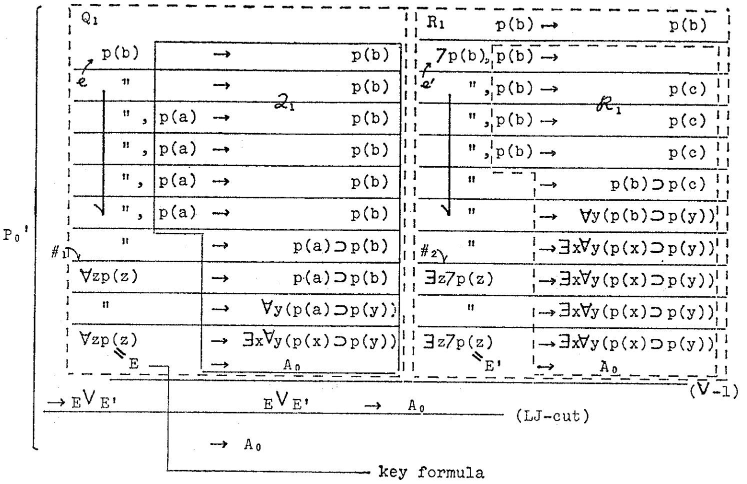


図 2 LK-証明図 $\boldsymbol{P}_0$ の中の contraction 右推論を消去して得られる (LJ+排中律型公理) 証明図 $\boldsymbol{P}_0'$
Fig. 2 An (LJ+Extended middle type axiom)-proof $\boldsymbol{P}_0'$ obtained by eliminating the contraction right inference in $\boldsymbol{P}_0$ (Fig. 1).

また元の（∀右）推論が移らない方の $\mathcal{R}_1$ の #2 の位置には（∃左）推論（（∀左）推論の dual）を挿入し，e'：$\neg p(b)$ は E'：$\exists z \neg p(z)$（$\equiv \neg E$）に変形する"等の定まった変形中手続きを実行する．

このようにして，図1の非 LJ 推論の contraction 右 I は消去され，元の$\to A, A$ にいたる部分証明図 $\boldsymbol{P}_1$ は $E \to A_0$，$E' \to A_0$ にいたる二つの LJ 証明図 $\boldsymbol{Q}_1$，$\boldsymbol{R}_1$ に分離される．これは，前項(1)の人による証明の (case 1) $E \Rightarrow A_0$ (case 2) $E' \Rightarrow A_0$ の証明が生成されたことに対応する．

したがって，図2において，場合分け情報である key-formula E：$\forall z p(z)$ 自体も生成されたことになる．そこで，あとは定形の再構成パターンとして，図2のように（∨左）推論による $E \vee E' \to A_0$ の導出，排中律型公理$\to E \vee E'$ と (LJ-cut) を用い$\to A_0$ の導出を終わる．

3. LJ＋(排中律型公理) 体系

LK 証明図の自然な証明図への変換過程で一般に用いる体系等，の定義を準備として述べる．

（1） 論理式の二つの有限列を→の左右におく式 sequent $A_1, \cdots, A_m \to B_1, \cdots, B_n$ $(m, n \geq 0)$ を $\Gamma \to \Delta$ 等で表す（ここに，Γ，Δ Π，Λ 等は論理式の有限列を表す）．

（2） LK 演繹図とは最上部（仮定）の $\Gamma_i \to \Delta i$ $(i=1, \cdots, k)$ なる sequent から LK 推論[3] によって最下の sequent $\Gamma \to \Delta$ にいたる sequent の樹状の堆積図 $\boldsymbol{P}$ をいい，次のように模式的にかく（図2の Q_1，$\mathcal{R}_1$ 等は演繹図である）．

$$\boldsymbol{P}\left\{\begin{array}{c}\Gamma_1 \to \Delta_1 \quad \Gamma_k \to \Delta_k \\ \cdot\,\vdots\,\cdot \\ \hline \Gamma \to \Delta\end{array}\right.$$

（3） LK 証明図とは $\Gamma \to \Delta$ を導く LK 演繹図 $\boldsymbol{P}$ で，特に最上部の sequent が $A_i \to A_i$ $(i=1, \cdots, k)$ なる形（LK 公理という）のものをいう．これを模式的に次のようにかく．

$$\boldsymbol{P}\left\{\begin{array}{c}\cdot\,\vdots\,\cdot \\ \Gamma \to \Delta\end{array}\right., \qquad \boldsymbol{P}[\Gamma \to \Delta]$$

（4） LJ-sequent とは $A_1, \cdots, A_m \to B$ または $A_1, \cdots, A_m \to$ のように右辺がたかだか一つの論理式の sequent をいう．

LJ 推論，LJ 演繹図，LJ 証明図とはそれぞれ，その中のすべての sequent が LJ sequent である LK 推論，LK 演繹図，LK 証明図をいう（図2の Q_1，$\mathcal{R}_1$ は LJ 演繹図でもある．$\boldsymbol{Q}_1$，$\boldsymbol{R}_1$ は LJ 証明図である）．

（5） $LJ^{\oplus}$＝(LJ＋排中律) 体系の証明図とは最上部として $A_i \to A_i$ または $\to B_j \vee \neg B_j$ なる形の sequent のみ許す LJ 演繹図をいう．$\to B \vee \neg B$を $LJ^{\oplus}$ の排中律公理とよぶ．

（6） 排中律型公理：'論理式 E' と '$F \equiv \neg E$ なる論理式 F' による sequent$\to E \vee F$ を一般に排中律型公理とよぶ．特に以下では，次に定義する '否定 dual な対' E, E' $(\equiv \neg E)$ による $\to E \vee E'$ を排中律型公理として用いる．

（i） 任意の論理式Aに対し,
〈1〉 $(E, E')=(A, \neg A)$ は否定 dual.
〈2〉 $(E, E')=(\neg A, A)$ は否定 dual.
（ii） すでに(E_i, E_i')が否定dual$(i=1, 2)$のとき,
〈1〉 $(E, E')=(E_1\wedge E_2, E_1'\vee E_2')$ は否定 dual.
〈2〉 $(E, E')=(E_1\vee E_2, E_1'\wedge E_2')$ は否定 dual.
（iii） すでに $(E(a), E'(a))$ が否定 dual のとき,
〈1〉 $(E, E')=(\forall zE(z), \exists zE'(z))$ は否定 dual.
〈2〉 $(E, E')=(\exists zE(z), \forall zE'(z))$ は否定 dual.
[意味の上から，帰納的に $\neg E\equiv E'$ は示される．また $\rightarrow E\vee E'$, $\rightarrow\neg E\equiv E'$ もLKまたはLJ$^{\oplus}$で証明可能].

（7） LJ*=(LJ+(排中律型公理)) 体系の証明図とは上端の sequent として $A_i\rightarrow A_i$ または $\rightarrow E_j\vee E_j'$ なる形のみ許す LJ 演繹図として定義する.

（8） LK*=(LK+(排中律型公理)) 体系の証明図とは前定義(7)のLJをLKにおきかえ定義される.
[sequent'$\rightarrow A$' の証明能力では LJ$^{\oplus}$, LJ*, LK, LK* は同等]

4. 分離再構成過程を用いる LK 証明図の（LJ+(排中律型公理)）証明図への変換

（1） 非 LJ 証明図における非 LJ 型推論

論理式 A_0 に対し '$\rightarrow A_0$' に到る LK 証明図 $\boldsymbol{P}_0$ が与えられたとき，これが非 LJ 証明図ならば，右辺に複数個の論理式をもつ非 LJ sequent を含む．そして，その原因は最下の右辺論理式一つの sequent '$\rightarrow A_0$' との間に，右辺複数個の論理式を減少させる可能性のある次の四つの型の非 LJ 推論のいずれかが少なくとも一つあることによる.

（i） contraction 右

$$\frac{\Gamma\rightarrow\Delta, B, B}{\Gamma\rightarrow\Delta, B}\quad(|\Delta|\geqq 0)$$

（ii） $\neg$左 (非 LJ)

$$\frac{\Gamma\rightarrow\Delta, B}{\neg B, \Gamma\rightarrow\Delta}\quad(|\Delta|\geqq 1)$$

（iii） $\supset$左 (非 LJ)

$$\frac{\Gamma\rightarrow\Delta, B\quad C, \Pi\rightarrow\Lambda}{B\supset C, \Gamma, \Pi\rightarrow\Delta, \Lambda}\quad(|\Delta|\geqq 1)$$

（iv） cut (非LJ)

$$\frac{\Gamma\rightarrow\Delta, B\quad B, \Pi\rightarrow\Lambda}{\Gamma, \Pi\rightarrow\Delta, \Lambda}\quad(|\Delta|\geqq 1)$$

(ただし $|\Delta|$ は Δ の論理式の個数を表す)

これら四つの非 LJ 推論を非 LJ 型推論とよぶ.

本4章の目的は，与えられた '$\rightarrow A_0$' の LK 証明図 $\boldsymbol{P}_0$ の中から，非 LJ 性の原因となりうるこれら非 LJ 型推論をすべて除き，代わりに排中律型公理と場合分け証明の型をもつ同じく '$\rightarrow A_0$' にいたる LJ* 証明図 $\boldsymbol{P}_0'$ へ変換するアルゴリズムを与えることにある.

（2） sequent 分離に対する証明図分離アルゴリズム

sequent 分離：$\Phi\subseteq\Gamma, \Psi\subseteq\Delta$；$\Theta=\Gamma-\Phi, \Sigma=\Delta-\Psi$ のとき，sequent の対 '$\Phi\rightarrow\Psi$；$\Theta\rightarrow\Sigma$' を sequent $\Gamma\rightarrow\Delta$ の一つの分離とよび，$\Gamma\rightarrow\Delta=(\Phi\rightarrow\Psi；\Theta\rightarrow\Sigma)$ とかく (ただし，$\Phi\subseteq\Gamma$ は Φ が Γ の部分列を，$\Gamma-\Phi$ は Γ から Φ の要素を除いてうる列を表す).

Lemma LK* 証明図 $\boldsymbol{P}[\Gamma\rightarrow\Delta]$ に対し，最下の sequent $\Gamma\rightarrow\Delta$ の任意の分離 $\Gamma\rightarrow\Delta=(\Phi\rightarrow\Psi；\Theta\rightarrow\Sigma)$ (☆) を与えたとき，次のような二つの LK* 証明図 $\boldsymbol{Q}[E, \Phi\rightarrow\Psi]$, $\boldsymbol{R}[E', \Theta\rightarrow\Sigma]$ を求めるアルゴリズムを与えうる.

ただし E, E' は互いに否定 dual な論理式で，分離 (☆) によって一意に定まる．また次の性質 (♮) が成立する.

(♮) 変換 $\boldsymbol{P}\Rightarrow(\boldsymbol{Q}；\boldsymbol{R})$ (証明図分離とよぶ) において，非 LJ 型推論の個数は増加しない.　』

Lemma の証明としての変換アルゴリズム自体は付録1に記述する.

（3） 非 LJ 型推論消去のメインアルゴリズム

与えられた '$\rightarrow A_0$' に到る LK 証明図 $\boldsymbol{P}_0$ が非 LJ 証明図で，非 LJ 型推論が $N\ (\geqq 1)$ 個あるとき，これらを消去して，'$\rightarrow A_0$ にいたる LJ* 証明図' をうる変形の大綱は次のとおり.

まず，LK 証明図 $\boldsymbol{P}_0$ 自体 (排中律型公理0個をもつ) LK* 証明図であることに注意し，LK* 証明図 $\boldsymbol{P}_0$ から，同じく $\rightarrow A_0$ にいたる LK* 証明図で非 LJ 型推論の個数が減少していく証明図の系列 $\boldsymbol{P}_0^{(1)}$, $\boldsymbol{P}_0^{(2)}$, … を順次構成し，たかだか N ステップで目的の LJ* 証明図 $\boldsymbol{P}_0^*$ をうるようにする.

そこで，一般に LK* 証明図 $\boldsymbol{P}$ の degree を

deg($\boldsymbol{P}$)=$\boldsymbol{P}$ 内の非 LJ 型推論の個数

とおけば，問題は deg($\boldsymbol{P}$)>0 なる '$\rightarrow A_0$' にいたる LK* 証明図 $\boldsymbol{P}$ に対し，1ステップ変換 $T(\boldsymbol{P})=\boldsymbol{P}'$ で deg($\boldsymbol{P}'$)<deg($\boldsymbol{P}$) なるものを定義することに帰着される.

1ステップ変換 T の実現は $\boldsymbol{P}$ の中の最も下の非 LJ 型推論 (それより下に非 LJ 型推論はないの意味) のうち最も左の枝にあるもの I に着目し，消去する方法をとる.

そしてこの T の特質は① I の上部を Lemma アル

ゴリズムにより場合分け証明に分離し，②排中律型公理，三段論法により再構成することにある．

以下Tの変換をIの種類別に記述する．

(case 1) Iが contraction 右のとき：$\boldsymbol{P}[\to A_0]$ は下のように表される．

$$\boldsymbol{P}\left\{\begin{array}{c} \boldsymbol{P}_1\left\{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma\to\Delta,B,B\end{array}\right.\\ \hline I\quad \Gamma\to\Delta,B\\ \vdots\\ \to A_0\end{array}\right.$$

このとき，Δ は empty である．なぜなら $|\Delta|\geqq 1$ ならば，Iの下 sequent から最下の $\to A_0$ にいたる途中に右辺減少推論 I' (非 LJ 型推論) があることになり，I が最下の非 LJ 型推論であることに反する．したがって，$\boldsymbol{P}$は次の形をしている。

$$\boldsymbol{P}\left\{\begin{array}{c} \boldsymbol{P}_1\left\{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma\to B,B\end{array}\right.\\ \hline I\quad \Gamma\to B\\ \vdots\\ \to A_0\end{array}\right.$$

そこで，このような contraction 右推論については，上 sequent $\Gamma\to B,B$ の分離をつねに $\Gamma\to B,\ B=(\to B;\ \Gamma\to B)$ と設定する．その上で，Iの上部の LK* 証明図 $\boldsymbol{P}_1$ に Lemma の証明図分離アルゴリズムを適用すれば，$\boldsymbol{P}_1$ は二つの LK* 証明図 $\boldsymbol{Q}_1[E\to B]$ と $\boldsymbol{R}_1[E',\Gamma\to B]$ に分離される．

$$\boldsymbol{P}_1\Rightarrow\left(\boldsymbol{Q}_1\left\{\begin{array}{c}\vdots\\ E\to B\end{array}\right\};\ \boldsymbol{R}_1\left\{\begin{array}{c}\vdots\\ E',\Gamma\to B\end{array}\right\}\right);$$

(E, E' は互いに否定 dual)

そこで，この二つの LK* 証明図 $\boldsymbol{Q}_1$, $\boldsymbol{R}_1$ を用いて，次のように $\boldsymbol{P}'$ を構成する．

$$\boldsymbol{P}'\left\{\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \begin{array}{c}\boldsymbol{Q}_1\left\{\begin{array}{c}\vdots\\ E\to B\end{array}\right\}\\ \hline\hline \binom{\text{weak.左}}{\text{exch.左}}\cdots\ E,\Gamma\to B\end{array}, & \boldsymbol{R}_1\left\{\begin{array}{c}\vdots\\ E',\Gamma\to B\end{array}\right\}\end{array}\\ \hline (\vee\text{左})\quad E\vee E',\Gamma\to B\\ \to E\vee E' \qquad \downarrow\\ \hline \Gamma\to B \quad \text{(LJ cut)}\\ \vdots\\ \to A_0\end{array}\right.$$

lemma の (†) なる性質から，変換 $\boldsymbol{P}_1\Rightarrow(\boldsymbol{Q}_1;\ \boldsymbol{R}_1)$ において非 LJ 型推論の増加はなく，全体としては非 LJ 型推論Iは少なくとも一つ消去され，$\deg(\boldsymbol{P}')<\deg(\boldsymbol{P})$ となる．

(case 2) Iが (非 LJ) $\neg$左推論のとき：Iが$\boldsymbol{P}$内の最下の非 LJ 型推論故，前 case と同様下のように記述される (Dは一つの論理式)．

$$\boldsymbol{P}\left\{\begin{array}{c} \boldsymbol{P}_1\left\{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma\to D,B\end{array}\right\}\\ \hline I\quad \neg B,\Gamma\to D\\ \vdots\\ \to A_0\end{array}\right.$$

このような (非 LJ) $\neg$左推論 I については，上 sequent $\Gamma\to D,B$ の分離をつねに

$\Gamma\to D,\ B=(\to B;\ \Gamma\to D)$

と設定した上で，Iの上部 $\boldsymbol{P}_1$ に lemma のアルゴリズムを適用し，証明図の分離 $\boldsymbol{P}_1\Rightarrow(\boldsymbol{Q}_1[E\to B];\ \boldsymbol{R}_1[E',\Gamma\to D])$ を行う．その上で $\boldsymbol{P}'$ を次のように構成する．

$$\boldsymbol{P}'\left\{\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \begin{array}{c}\boldsymbol{Q}_1\left\{\begin{array}{c}\vdots\\ E\to B\end{array}\right.\\ \hline \neg B,E\to \quad \text{(LJ 型}\neg\text{左)}\\ \hline\hline E,\neg B,\Gamma\to D\end{array} & \cdots\binom{\text{weak.左, 右}}{\text{exch.左}}\cdots & \begin{array}{c}\boldsymbol{R}_1\left\{\begin{array}{c}\vdots\\ E',\Gamma\to D\end{array}\right.\\ \hline\hline E',\neg B,\Gamma\to D\end{array}\end{array}\\ \hline E\vee E',\neg B,\Gamma\to D \quad (\vee\text{左})\\ \to E\vee E' \qquad \downarrow\\ \hline \neg B,\Gamma\to D \quad \text{(LJ cut)}\\ \vdots\\ \to A_0\end{array}\right.$$

変換 $\boldsymbol{P}_1\Rightarrow(\boldsymbol{Q}_1;\ \boldsymbol{R}_1)$について，lemma の (†) から非 LJ 推論の増加なく，Iの除去により$\deg(\boldsymbol{P}')<\deg(\boldsymbol{P})$.

(case 3) Iが (非 LJ) $\supset$左推論のとき：I より下に非 LJ 型推論がないことから，$\boldsymbol{P}$と I とは次のように記述される．

$$\boldsymbol{P}\left\{\begin{array}{c} \boldsymbol{P}_1\left\{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma\to D,B\end{array}\right\},\ \boldsymbol{P}_2\left\{\begin{array}{c}\vdots\\ C,\Pi\to\end{array}\right\}\\ \hline I\quad B\supset C,\Gamma,\Pi\to D\\ \vdots\\ \to A_0\end{array}\right.$$

Iの左上の sequent について，つねに次の型の分離を設定する．

$\Gamma\to D,\ B=(\to B;\ \Gamma\to D)$

その上で $\boldsymbol{P}_1$ に lemma による分離を適用する．

$\boldsymbol{P}_1\Rightarrow(\boldsymbol{Q}_1[E\to B];\ \boldsymbol{R}_1[E',\Gamma\to D])$

これらの結果の LK* 証明図を用い，次の $\boldsymbol{P}'$ を構成する．

$$P'\left\{\begin{array}{c}
\dfrac{\to E\vee E' \qquad (\vee 左)\dfrac{\dfrac{(\mathrm{LJ}\supset 左)\dfrac{Q_1\left\{\begin{array}{c}\vdots\\ E\to B\end{array}\right. ,\quad P_2\left\{\begin{array}{c}\vdots\\ C,\Pi\to\end{array}\right.}{B\supset C, E, \Pi\to}}{E, B\supset C, \Gamma, \Pi\to D}\cdots\left(\begin{array}{l}\text{weak. 左, 右}\\ \text{exch. 左}\end{array}\right)\cdots\dfrac{R_1\left\{\begin{array}{c}\vdots\\ E', \Gamma\to D\end{array}\right.}{E', B\supset C, \Gamma, \Pi\to D}}{E\vee E', B\supset C, \Gamma, \Pi\to D \atop \downarrow}}{B\supset C, \Gamma, \Pi\to D}(\mathrm{LJ\ cut})\\
\vdots\\
\to A_0
\end{array}\right.$$

(case 4) I が非 LJ cut 推論のとき：I より下に非 LJ 推論はないので，$\boldsymbol{P}$内の I は次の形をとる．

$$\boldsymbol{P}\left\{\begin{array}{c}
I\dfrac{P_1\left\{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma\to D, B\end{array}\right. \quad P_2\left\{\begin{array}{c}\vdots\\ B, \Pi\to\end{array}\right.}{\Gamma, \Pi\to D}\\
\vdots\\
\to A_0
\end{array}\right.$$

この非 LJ cut 推論に対しては，I の左上の sequent について，つねに，$\Gamma\to D, B=(\to B\,;\,\Gamma\to D)$ なる型の分離を設定の上 lemma を適用し証明図 $\boldsymbol{P}_1$ の分離を次のように求める．

$\boldsymbol{P}_1\Rightarrow(\boldsymbol{Q}_1[E\to B],\ \boldsymbol{R}_1[E', \Gamma\to D])$.

その上で，$\boldsymbol{Q}_1$, $\boldsymbol{R}_1$ と $\boldsymbol{P}_2$ を用いて，$\boldsymbol{P}'$ を構成する．

$$\boldsymbol{P}'\left\{\begin{array}{c}
\dfrac{\to E\vee E' \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{Q_1\left\{\begin{array}{c}\vdots\\ E\to B\end{array}\right. \quad P_2\left\{\begin{array}{c}\vdots\\ B, \Pi\to\end{array}\right.}{E, \Pi\to}(\mathrm{LJ\ cut})}{E, \Gamma, \Pi\to D}\cdots\left(\begin{array}{l}\text{weak. 左, 右}\\ \text{exch. 左}\end{array}\right)\cdots\dfrac{R_1\left\{\begin{array}{c}\vdots\\ E'\Gamma\to D\end{array}\right.}{E', \Gamma, \Pi\to D}}{E\vee E', \Gamma, \Pi\to D \atop \downarrow}}{\Gamma, \Pi\to D}(\mathrm{LJ\ cut})\\
\vdots\\
\to A_0
\end{array}\right.$$

$\boldsymbol{P}\Rightarrow\boldsymbol{P}'$ における degree の減少も他の case 同様示される．

5. おわりに

以上で，自動証明であるか否かによらず，ある論理式 A_0 の LK 証明図が与えられたとき，この中の非 LJ 型推論を下方より逐次消去して，A_0 の LJ* 証明図へ変換するアルゴリズムの一つを提示したが，得られた LJ* 証明図は排中律，三段論法を併用する場合分け証明の連鎖によって記述され，かつすべての sequent は $A_1, \cdots, A_m\to(B)$ のように結論が 1 以下の形式のため逐一の推論も自然に読取りうる．そして当初述べたように，すでにある妥当性検証・証明図作成手続き[1),2)] に本アルゴリズムを連結し，さらに sequent 形式の LJ 型証明形式を自然演繹法形式の NK 型証明図への変換を連結するならば，より自然な証明生成への一つの近接を一貫したプログラムによって行うことが可能といえる．

参 考 文 献

1) Oshiba, T.: A Method for Obtaining Proof Figures in First Order Predicate Calculus, *Comm. Math. Univ. St. Pauli*, Vol. 30, No. 1, pp. 49-62 (1981).
2) 大芝 猛：guide 情報を利用する証明のプログラム，数理科学，No. 270, pp. 56-68 (1985).
3) 竹内外史，八杉満利子：証明論入門，共立出版 (1988).

付録1 LK*証明図分離の Lemma の証明

LK* 証明図 $\boldsymbol{P}$ の最下の sequent $\Gamma\to\Delta$ の分離 $\Gamma\to\Delta=(\Phi\to\Psi\,;\,\Theta\to\Sigma)$ に対し，$\boldsymbol{P}$ 自体を二つの LK* 証明図 $\boldsymbol{Q}[E, \Phi\to\Psi]$；$\boldsymbol{R}[E', \Theta\to\Sigma]$ に非 LJ 型推論の増加なく…(＊)分離しうる．

(証明) (＊)なる性質の分離アルゴリズムの提示による．

(I) まず $\Gamma\to\Delta$ にいたる LK* 証明図 $\boldsymbol{P}$ のすべての推論 I に番号 i を対応させ，コード (i, I) を付記する．またそのすぐ下の sequent を $\Gamma_i\to\Delta_i$ で引用する（番号の順は問題としない，位置が特定できればよい）．下のような模式図を用いるが，I が非分岐推論のとき，右上 $(\Gamma_k\to\Delta_k)$ はないことを表す．

$$\boldsymbol{P}\left\{\begin{array}{c}
(i, I)\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\quad\ \ \vdots\\ \Gamma_j\to\Delta_j(\Gamma_k\to\Delta_k)\end{array}}{\Gamma_i\to\Delta_i}\\
\vdots\\
\Gamma_0\to\Delta_0(=\Gamma\to\Delta)
\end{array}\right.$$

（II） 次に，最下の sequent の分離 $\Gamma\to\Delta=(\Phi\to\Psi;\ \Theta\to\Sigma)$ に対応して，$\boldsymbol{P}$内における Φ と Ψ の論理式およびその先祖の論理式のすべてにアンダーライン‘—’を付記し，$\boldsymbol{P}$を次のように二つの演繹図$\mathcal{Q}$，$\mathcal{R}$ に分離する（論理式の先祖の定義は付録 2 に記述する）.

$$\begin{cases}\boldsymbol{P}\text{内の}\ \underline{\ \ }\ \text{マークのない論理式を除去し，}\mathcal{Q}\text{とする.}\\ \boldsymbol{P}\text{内の}\ \underline{\ \ }\ \text{マーク付論理式を除去し，}\mathcal{R}\text{とする.}\end{cases}$$

$\boldsymbol{P}$の (i, I) に対応する推論を次のように indicate する.

$$\mathcal{Q}\begin{cases}\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots\\ (i, J)\dfrac{\underline{\Phi}_j\to\underline{\Psi}_j(\underline{\Phi}_k\to\underline{\Psi}_k)}{\underline{\Phi}_i\to\underline{\Psi}_i}\\ \qquad\qquad\vdots\\ \qquad\quad\underline{\Phi}\to\underline{\Psi}\end{cases}$$

$$\mathcal{R}\begin{cases}\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots\\ (i, K)\dfrac{\Theta_j\to\Sigma_j(\Theta_k\to\Sigma_k)}{\Theta_i\to\Sigma_i}\\ \qquad\qquad\vdots\\ \qquad\quad\Theta\to\Sigma\end{cases}$$

（1） $\boldsymbol{P}$の (i, I) が cut 以外の推論のとき，対応する位置の$\mathcal{Q}$の推論 (i, J)，$\mathcal{R}$の推論 (i, K)については，J，K の一方の推論は I 自体であり，他方は dummy 推論となる（$\langle I\rangle$ とかく）

① $\boldsymbol{P}$の推論の主，副論理式（推論で操作または変形される論理式）が$\mathcal{Q}$に移り（$\mathcal{R}$に移らない）ならば，

$$(i, J)=(i, I),\ (i, K)=(i, \langle I\rangle)$$
$$\vdots\cdots\text{dummy}$$

② $\boldsymbol{P}$の推論の主，副論理式が$\mathcal{R}$に移るならば，

$$(i, J)=(i, \langle I\rangle),\ (i, K)=(i, I)$$

(dummy 推論とは，下の sequent が上の sequent 自身か，その weakening : exchange 適用で得られる推論)

（2） $\boldsymbol{P}$の (i, I) が cut 推論のときは，$\mathcal{R}$に cut が移る．すなわち

$$\underset{\text{cut}}{\underset{\shortparallel}{(i, I)}}\frac{\Gamma_j\to\Delta_j{}^*, D\quad D, \Gamma_k{}^*\to\Delta_k}{\Gamma_j, \Gamma_k{}^*\to\Delta_j{}^*, \Delta_k}=\Gamma_i\to\Delta_i$$

について，下 sequent $\Gamma_i\to\Delta_i$ に現れる Γ_j，$\Gamma_k{}^*$，$\Delta_j{}^*$ Δ_k 内の論理式でマーク‘—’付の部分をそれぞれ $\underline{\Phi}_j$，$\underline{\Phi}_k{}^*$，$\underline{\Psi}_j{}^*$，$\underline{\Psi}_k$とし，残りをΘ_j，$\Theta_k{}^*$，$\Sigma_j{}^*$，Σ_k とする.

このとき，マーク付論理式を残した$\mathcal{Q}$のこの位置に cut はなく，次の（dummy に準ずる）形をとる（これも $\langle I\rangle$）とかく）.

$$\circledast_1(i, \langle I\rangle)\frac{\underline{\Phi}_j\to\underline{\Psi}_j{}^*\quad\underline{\Phi}_k{}^*\to\underline{\Psi}_k}{\underline{\Phi}_j, \underline{\Phi}_k{}^*\to\underline{\Psi}_j{}^*, \underline{\Psi}_k}=\Phi_i\to\Psi_i$$

$\mathcal{R}$の対応する位置には次の cut が残る.

$$\circledast_2\underset{\text{cut}}{\underset{\shortparallel}{(i, I)}}\frac{\Theta_j\to\Sigma_j{}^*, D\quad D, \Theta_k{}^*\to\Sigma_k}{\Theta_j, \Theta_k{}^*\to\Sigma_j{}^*, \Sigma_k}=\Theta i\to\Sigma_k$$

（III） 次にIIで得られた演繹図$\mathcal{Q}$，$\mathcal{R}$を修飾し，目的の分離証明図 $\boldsymbol{Q}$，$\boldsymbol{R}$ を作る.

$\boldsymbol{P}$の各 Sequent $\Gamma_i\to\Delta_i$ に対応する$\mathcal{Q}$，$\mathcal{R}$内の sequent $\underline{\Phi}_i\to\underline{\Psi}_i$; $\Theta_i\to\Sigma_i$ のそれぞれの左端に，互いに否定 dual な E_i，E_i' を次の方法で，上部から下部に向かって順次補い，$E_i, \underline{\Phi}_i\to\underline{\Psi}_i$; $E_i', \Theta_i\to\Sigma_i$ なる形とし，結果として，$E, \underline{\Phi}\to\underline{\Psi}$ にいたる証明図 $\boldsymbol{Q}$ と，$E', \Theta\to\Sigma$ にいたる証明図 $\boldsymbol{R}$ を構成する.

（III-1） $\boldsymbol{P}$の始式 $\Gamma_i\to\Delta_i$ は $A\to A$ 形式または $\to E\vee E'$形式のいずれかであるが，$\boldsymbol{P}$の演繹図$\mathcal{Q}$，$\mathcal{R}$ への分離に対応して，次の**表 1** の六つの場合がある．それぞれに対応して，互いに否定 dual な E, E' を補い，若干修飾して，証明図 $\boldsymbol{Q}$; $\boldsymbol{R}$ の上端部 $E_i, \underline{\Phi}_i\to\underline{\Psi}_i$; $E_i', \Theta_i\to\Sigma_i$ を構成する.

ここに t は $A'\vee\neg A$，f は $\neg A\wedge A$ を表すとしてよい.

また表 1 の＊の箇所は下のように LJ 型証明を補う

表 1 $\boldsymbol{P}$の中の始式の分離パターンに対する$\boldsymbol{Q}$，$\boldsymbol{R}$の中の始式

Table 1 The corresponding pairs of beginning sequents in $\boldsymbol{Q}$ and $\boldsymbol{R}$ for separation types of any beginning sequent in $\boldsymbol{P}$.

	Beginning sequent in $\boldsymbol{P}$: $\Gamma\to\Delta$	Separation type: $(\Phi\to\Psi;\ \Theta\to\Sigma)$	Beginning sequent in $\boldsymbol{Q}$: $E, \Phi\to\Psi$	Beginning sequent in $\boldsymbol{R}$: $E', \Theta\to\Sigma$
1	$A\to A$	$(A\to A;\ \to)$	$t, A\to A$	$f\to{}^*$
2	〃	$(A\to;\ \to A)$	$\neg A, A\to$	$A\to A$
3	〃	$(\to A;\ A\to)$	$A\to A$	$\neg A\to A$
4	〃	$(\to;\ A\to A)$	$f\to$	$t, A\to A$
5	$\to E\vee E'$	$(\to E\vee E';\ \to)$	$t\to E\vee E'$	$f\to$
6	〃	$(\to;\ \to E\vee E')$	$f\to$	$t\to E\vee E'$

ことができる.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A\to A}}{\neg A, A\to}}{\neg A\wedge A, A\to}}{A, \neg A\wedge A\to}}{\neg A\wedge A, \neg A\wedge A\to}}{\neg A\wedge A\to}$$

(しかし, 図 $\boldsymbol{Q}$; $\boldsymbol{R}$ の中で記述を省略する.)

(Ⅲ-2) $\boldsymbol{P}$の途中の推論

$(i, I)\dfrac{\Gamma_j\to\varDelta_j(\Gamma_k\to\varDelta_k)}{\Gamma_i\to\varDelta_i}$ に対応して,

$$\begin{cases} Q\text{ の推論が } (i, J)\dfrac{\Phi_j\to\Psi_j(\Phi_k\to\Psi_k)}{\phi_i\to\Psi_i};\ J=I \text{ or } \langle I\rangle \\ \mathfrak{R}\text{の推論が } (i, K)\dfrac{\Theta_j\to\Sigma_j(\Theta_k\to\Gamma_k)}{\Theta_i\to\Sigma_i};\ K=\langle I\rangle \text{ or } I \end{cases}$$

なるとき [ただし or は同順], 新たに構成すべき

$$\begin{cases} \boldsymbol{Q}\text{の推論 } (i, \boldsymbol{J})\dfrac{E_j, \Phi_j\to\Psi_j(E_k, \Phi_k\to\Psi_k)}{E_i, \Phi_i\to\Psi_i} \\ \boldsymbol{R}\text{の推論 } (i, \boldsymbol{K})\dfrac{E_j', \Theta_j\to\Sigma_j(E_k', \Theta_k\to\Sigma_k)}{E_i', \Theta_i\to\Sigma_i} \end{cases}$$

について,

$\begin{cases} E_j(E_k) \text{ から } E_i \text{ の定め方, および } \boldsymbol{J} \text{ の内容} \\ E_j'(E_k') \text{ から } E_i' \text{ の定め方, および } \boldsymbol{K} \text{ の内容} \end{cases}$

は次のようにする.

(1) Iが非分岐型で∀右, ∃右推論でないとき:

$E_i=E_j$; $E_i'=E_j'$; $\boldsymbol{J}=J$, $\boldsymbol{K}=K$

とする.

(2) Iが∀右または∃左推論で固有変数αのとき,

(a) E_j, E_j' が固有変数 α を含まないとき:

$E_i=E_j$, $E_i'=E_j'$, $\boldsymbol{J}=J$, $\boldsymbol{K}=K$

とする.

(b) E_j, E_j' が固有変数 α を含むとき:

すなわち $E_j=E_j(\alpha)$, $E_j'=E_j'(\alpha)$ のとき

(i) $J=I$, $K=\langle I\rangle$ の場合.

$E_i=\forall z_iE_j(z_i)$, $E_i'=\exists z_iE_j'(z_i)$

とし $\boldsymbol{J}$は (∀左実行後, I実行); $\boldsymbol{K}$は (∃左実行)

とする.

(ii) $J=\langle I\rangle$, $K=I$ の場合.

$E_i=\exists z_iE_j(z_i)$, $E_i'=\forall z_iE_j'(z_i)$

とし

$\boldsymbol{J}$は (∃左実行) とし, $\boldsymbol{K}$は (∀左実行後, I実行)

とする.

『たとえば, I: ∀右で(b)(i)$J=\boldsymbol{I}$, $K=\langle I\rangle$の場合:

$\boldsymbol{P}$内の推論

$$(i, I)\dfrac{\Gamma\to\varDelta^*, A(\alpha)\quad =\Gamma_j\to\varDelta_j}{\Gamma\to\varDelta^*, \forall xA(x)=\Gamma_i\to\varDelta_i}$$

に対し, Q, $\mathfrak{R}$内の対応する推論は次のようになる.

$$\underset{\overset{\parallel}{I}}{(i, J)}\dfrac{\underline{\Phi}\to\underline{\Psi}^*, \underline{A(\alpha)}}{\underline{\Phi}\to\underline{\Psi}^*, \underline{\forall xA(x)}}(\forall\text{右}),$$

$$\underset{\overset{\parallel}{\langle I\rangle}}{(i, K)}\dfrac{\Theta\to\Sigma}{\Theta\to\Sigma}(\text{dummy})$$

そこで, $\boldsymbol{Q}$; $\boldsymbol{R}$内の対応する推論 $(i, \boldsymbol{J})$; $(i, \boldsymbol{K})$ の構成は上 sequent 内のすでにきまっている $E_j(\alpha)$, $E_j'(\alpha)$ を用いて, 次のようにする.

$$(i, \boldsymbol{J})\begin{cases} (\forall\text{左})\dfrac{E_j(\alpha), \underline{\Phi}\to\underline{\Psi}^*, \underline{A(\alpha)}}{\forall z_iE_j(z_i), \underline{\Phi}\to\underline{\Psi}^*, \underline{A(\alpha)}} \\ I\dfrac{\forall z_iE_j(z_i), \underline{\Phi}\to\underline{\Psi}^*, \underline{A(\alpha)}}{\underbrace{\forall z_iE_j(z_i)}_{E_i}, \underline{\Phi}\to\underline{\Psi}^*, \underline{\forall xA(x)}}(\forall\text{右}) \end{cases}$$

$$\underset{\overset{\parallel}{\exists\text{左}}}{(i, \boldsymbol{K})}\dfrac{E_j'(\alpha), \Theta\to\Sigma}{\underbrace{\exists z_iE_j'(z_i)}_{E_i'}, \Theta\to\Sigma}$$

』

(3) Iが分岐型推論で cut 以外のとき:

(3-1) $J=I$, $K=\langle I\rangle$ のとき: $E_i=E_j\wedge E_k$, $E_i'=E_j'\vee E_k'$ とし, $\boldsymbol{J}$は ((∧左) 実行後, Iを実行), $\boldsymbol{K}$は ((∨左) 実行) とする.

(3-2) $J=\langle I\rangle$, $K=I$のとき: $E_i=E_j\vee E_k$, $E_i'=E_j'\wedge E_k'$ とし, $\boldsymbol{J}$は ((∨左) 実行), $\boldsymbol{K}$は ((∧左) 実行後, Iを実行) とする.

ただし, weakening 左, 右, exchange 左, 右, contraction 左推論 (非 LJ 型推論ではない) の補助的挿入を伴う.

『例として, I: ⊃左で, (3-1) $J=I$, $K=\langle I\rangle$ の場合.

$\boldsymbol{P}$の内の推論

$$(i, I)\dfrac{\Gamma_j\to\overbrace{\varDelta_j^*}^{\varDelta_j}, B\quad \overbrace{C, \Gamma_k^*}^{\Gamma_k}\to\varDelta_k}{B\supset C, \Gamma_j, \Gamma_k^*\to\varDelta_j^*, \varDelta_k=\Gamma_i\to\varDelta_i}$$

に対し, Q, $\mathfrak{R}$内の対応する推論は次のようになる.

$$\underset{\overset{\parallel}{I}}{(i, J)}\dfrac{\underline{\Phi}_j\to\overbrace{\underline{\Psi}_j^*}^{\bar{\Phi}_j}, \underline{B}\quad \overbrace{\underline{C}, \underline{\Phi}_k^*}^{\bar{\Phi}_k}\to\underline{\Psi}_k}{\underline{B\supset C}, \underline{\Phi}_j, \underline{\Phi}_k^*\to\underline{\Psi}_j^*, \underline{\Psi}_k=\underline{\Phi}_i\to\underline{\Psi}_i}$$

$$\underset{\overset{\parallel}{\langle I\rangle}}{(i, K)}\dfrac{\Theta_j\to\Sigma_j\quad \Theta_k\to\Sigma_k}{\Theta_j, \Theta_k\to\Sigma_j, \Sigma_k=\Theta_i\to\Sigma_i}$$

そこで, $\boldsymbol{Q}$; $\boldsymbol{R}$内の対応する推論 $(i, \boldsymbol{J})$; $(i, \boldsymbol{K})$ の構成は上 sequent ですでにきまっている E_j, E_k, E_j', E_k' を用いて次のようにする:

$$\boldsymbol{Q}\ (i,\boldsymbol{J})\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{E_j, \underline{\Phi_j}\to\underline{\Psi_j}^*, \underline{B}}}{E_j\wedge E_k, \underline{\Phi_j}\to\underline{\Psi_j}^*, \underline{B}}(\wedge 左) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{E_k, \underline{C}, \underline{\Phi_k}^*\to\underline{\Psi_k}}}{E_j\wedge E_k, \underline{C}, \underline{\Phi_k}^*\to\underline{\Psi_k}}(\wedge 左)}{\underline{C}, E_j\wedge E_k, \underline{\Phi_k}^*\to\underline{\Psi_k}}(\text{exch. 左})}{\dfrac{\underline{B\supset C}, E_j\wedge E_k, \underline{\Phi_j}, E_j\wedge E_k, \underline{\Phi_k}^*\to\underline{\Psi_j}^*, \underline{\Psi_k}}{\dfrac{E_j\wedge E_k, E_j\wedge E_k, \underline{B\supset C}, \underline{\Phi_j}, \underline{\Phi_k}^*\to\underline{\Psi_j}^*, \underline{\Psi_k}}{\underbrace{E_j\wedge E_k}_{E_i}, \underline{B\supset C}, \underline{\Phi_j}, \underline{\Phi_k}^*\to\underline{\Psi_j}^*, \underline{\Psi_k}}(\text{cont. 左})}(\text{exch. 左})}I(\supset 左)$$

$$\boldsymbol{R}\ (i,\boldsymbol{K})\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{E_j', \Theta_j\to\Sigma_j}}{E_j', \Theta_j, \Theta_k\to\Sigma_j, \Sigma_k}\cdots\left(\begin{matrix}\text{weak. 左, 右}\\ \text{exch. 左, 右}\end{matrix}\right)\cdots\dfrac{\dfrac{\vdots}{E_k', \Theta_k\to\Sigma_k}}{E_k', \Theta_j, \Theta_k\to\Sigma_j, \Sigma_k}}{\underbrace{E_j'\vee E_k'}_{E_i}, \Theta_j, \Theta_k\to\Sigma_j, \Sigma_k}(\vee 左)$$

Iが（⊃左）で (3-2)：$J=\langle I\rangle$，$K=I$ の場合も同様であり，Iが∧右，∨左の場合もより容易に対応する$\boldsymbol{Q}$；$\boldsymbol{R}$内での $(i, \boldsymbol{J})$，$(i, \boldsymbol{K})$ の構成を行いうる．

（4） Iが cut のとき：すでにII(2)で構成ずみの分離演繹図$\mathcal{Q}$，$\mathcal{R}$の対応する位置の推論：↗

↘ $\mathcal{Q}$の中の $(i, \langle I\rangle)=(i, \text{dummy})$…(II(2)⊛1式)
$\mathcal{R}$の中の $(i, I)=(i, \text{cut})$…(II(2)⊛2式)

に対し，さらに$\boldsymbol{Q}$；$\boldsymbol{R}$内の対応する推論を次のように構成する：↙

$$\boldsymbol{Q}\ (i,\boldsymbol{J})\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{E_j, \underline{\Phi_j}\to\underline{\Psi_j}^*}}{E_j, \underline{\Phi_j}, \underline{\Phi_k}^*\to\underline{\Psi_j}^*, \underline{\Psi_k}}\leftarrow\left(\begin{matrix}\text{weak. 左, 右}\\ \text{exch. 左, 右}\end{matrix}\right)\rightarrow\dfrac{\dfrac{\vdots}{E_k, \underline{\Phi_k}^*\to\underline{\Psi_k}}}{E_k, \underline{\Phi_j}, \underline{\Phi_k}^*\to\underline{\Psi_j}^*, \underline{\Psi_k}}}{\underbrace{E_j\vee E_k}_{E_i}, \underline{\Phi_j}, \underline{\Phi_k}^*\to\underline{\Psi_j}^*, \underline{\Psi_k}}(\vee 左)$$

$$\boldsymbol{R}\ (i,\boldsymbol{K})\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{E_j', \Theta_j\to\Sigma_j^*, D}}{E_j'\wedge E_k', \Theta_j\to\Sigma_j^*, D}(\wedge 左) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{E_k', D, \Theta_k^*\to\Sigma_k}}{E_j'\wedge E_k', D, \Theta_k^*\to\Sigma_k}(\wedge 左)}{D, E_j'\wedge E_k', \Theta_k^*\to\Sigma_k}(\text{exch. 左})}{\dfrac{E_j'\wedge E_k', \Theta_j, E_j'\wedge E_k', \Theta_k^*\to\Sigma_j^*, \Sigma_k}{\dfrac{E_j'\wedge E_k', E_j'\wedge E_k', \Theta_j, \Theta_k^*\to\Sigma_j^*, \Sigma_k}{\underbrace{E_j'\wedge E_k'}_{E_i'}, \Theta_j, \Theta_k^*\to\Sigma_j^*, \Sigma_k}(\text{cont. 左})}(\text{exch. 左})}I(\text{cut})$$

(IV) 各分離，修飾ステップII，IIIで4種の非 LJ 型推論の増加がないことの確認は容易である．したがって，$\boldsymbol{P}\Rightarrow(\boldsymbol{Q};\ \boldsymbol{R})$ なる変換において，性質 (⫲) が成立する．

付録2 LK 証明図内での論理式の先祖

(I) LK 推論における論理式の親子関係

LK の各推論は一つの下 sequent S に対し，一つまたは二つの sequent $S_1(, S_2)$ を上におく形式で表され，Gentzen の体系として 21 個の inference scheme からなる[3]．

LK の cut 以外の推論では，下 sequent 内に推論特有の操作ないし変形にかかわる論理式があり，主論理式と呼ばれる (exchange 推論では2個，他の推論では1個の主論理式がある)．またさらに weakening 以外の推論では上 sequent 内に (主論理式に対応して) この推論特有の変形に関わる論理式が（1個ないし2個）あり，副論理式と呼ばれる (weakening には副論理式はない)．

cut 推論では，二つの上 sequent 内の特定の位置に同一形の論理式があり，下 sequent において消去される．この論理式は cut 論理式と呼ばれる．

（1） 下 sequent の主論理式に対し，上 sequent の副論理式があれば，それらを論理式の親という．ただし，exchange 推論の場合，主論理式と副論理式が二つずつあり，それぞれ交差した位置の副論理式を親とする (weakening の主論理式は親をもたない)．

（2） 下 sequent の主論理式以外の論理式は Γ, Δ, Π, $\wedge$… 等の中で指定されるが，上 sequent の Γ, Δ, π, $\wedge$, …内の対応する位置の論理式を元の論理式の親と呼ぶ．

（3） cut 論理式はいかなる論理式の親ともならない．

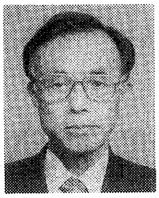
（II） LK 証明内の親子関係連鎖としての先祖関係

LK 証明図 $\boldsymbol{P}$ 内の二つの論理式 A，C について，C が A の先祖であるとは次の（i）または（ii）が成立することとする．

（i） C が A の親である．

（ii） C がある論理式 B の親であり，B が A の先祖である．

(平成5年 4 月 8 日受付)
(平成5年10月14日採録)



大芝　猛（正会員）

昭和6年生．昭和30年東京大学理学部数学科卒業．昭和32年同大学大学院理学研究科数学専攻修士課程修了．理学博士．昭和35年日本国有鉄道入社．昭和42年静岡大学工学部助教授．昭和49年名古屋工業大学工学部教授．現在同大学電気情報工学科教授．オートマトン・数理言語の研究から，現在自動証明の研究に従事．著書「数学基礎概説」(共立数学講座10)．日本数学会，電子情報通信学会，人工知能学会各会員．