

ショートノート

照明下にある物体の輝度の数値計算に関する一考察

津 曲 隆†

田中と高橋が提案した照明下にある物体の輝度計算モデルにおいて、輝度は一次元積分（H積分）で与えられている。本論文では、H積分計算において、ガウス型数値積分公式が田中らの採用した方法よりも高速であることを述べる。また、数値積分では、H積分のパラメータ α が小さいときに速度が低下するという欠点があるが、この場合は、本研究で導出した解析表現が有効であることを示す。

A Study on the Numerical Computation of Brightness of Illuminated Objects

TAKASHI TSUMAGARI†

In Tanaka-Takahashi's models for imaging by computer the illuminated objects, the brightness of the object has been expressed by the form of a finite integral (H-Integral). In this paper, it demonstrates that Gauss's integral formula can compute the H-Integral faster than the technique used by them. Furthermore, we derived the analytical formulas for H-Integral. This formula is very useful when a parameter α in H-Integral is small.

1. はじめに

田中と高橋は、照明下にある物体の輝度計算のための数学モデルを提案し^{1),2)}、それによって写実性に優れたCG画像を生成した。このモデルでは物体の輝度を求めるのに、ある特定の関数に対する定積分を必要とする。彼らは、その論文の中で、画像生成時間全体に占める積分計算の割合を無視できず、高速化のためには積分時間の短縮が必要であると述べている²⁾。本論文は、この積分計算の高速化について述べるものであるが、特に新しい数学的手法を提案しているわけではない。しかし、その内容がCG生成の高速化のために実用上重要であろうと思われるため報告する。

次章以降の具体的な計算には日本電気製PC-H 98s (20 MHz, 486 SX+487) を使用し、すべての実数計算は有効10進15桁のdouble型で行った。参考までに、本計算機による標準関数 $\tan\theta$ の計算時間は約0.04 msである。

2. 数値積分公式による計算

田中と高橋が提案したモデルでは、物体の輝度を求めるのに、

$$L = (\beta_2 - \beta_1) - H(n, \alpha, \beta_1, \beta_2) \quad (1)$$

の計算が必要となる。ここで、

$$H = \int_{\beta_1}^{\beta_2} f(n, \alpha; \phi) d\phi, \quad (2)$$

$$f(n, \alpha; \phi) = \left(\frac{\cos^2 \phi}{\tan^2 \alpha + \cos^2 \phi} \right)^{(n+1)/2} \quad (3)$$

$n (= 1, 2, 3, \dots)$ は物体表面の反射の鋭さを表し、他のパラメータは $0 < \alpha < \pi/2$, $0 \leq \beta_1 < \beta_2 \leq \pi/2$ で考える。以後、(2)式のことをH積分と呼ぶことにする。田中らは、H積分を計算するのに、被積分関数のチェビシェフ補間に基づく手法（以下C法と呼ぶ）を採用した。その理由として誤差評価の容易さを挙げている。任意関数を対象にする汎用積分ルーチンであれば確かにそれも重要な条件の一つになるだろう。しかし、今回のように被積分関数が特定されている場合には、計算精度や計算時間の条件を最優先にして積分公式を選択すべきである。誤差評価は多少複雑であっても構わない。

数値積分法に関してはこれまでに数多くの優れた研究があり、特に誤差解析については非常に精密な理論がある^{3),4)}。それによると、(3)式のように積分区間内に特異点を持たない関数の場合には、ガウス型数値積分公式（以後G公式と略す）が精度に関して最適な公式であることが知られている。さらに、G公式は、

† 都城工業高等専門学校電気工学科
Miyakonojo National College of Technology

計算時間についてもC法より優れているはずである。なぜなら、C法は実質的な積分処理のほかに被積分関数に対する補間係数の計算も必要とするからである。G公式とC法によるH積分の計算時間をそれぞれ T_G および T_C (ms) として、 $5 \leq M \leq 25$ (M は f の標本点数) の範囲で実際に測定したところ、

$$T_G \approx 0.1M, \quad (4)$$

$$T_C \approx 0.22M, \quad (5)$$

であった。予想どおり、G公式の方が計算時間が短く、その差は2倍以上もある。さらに調べた結果、 T_G の9割以上の時間が標本値を求めるのに費やされていた。このことは、数値積分公式によるH積分計算では、計算時間の限界がほぼ T_G 程度であることを示している。以上より、G公式は計算精度・時間ともにC法に比べて良好な性能を有しており、今回の目的に適した公式であることを強調しておく。

一般に、数値積分の誤差の性質は被積分関数の特異点の位置に依存し、通常は、特異点が積分区間の近くにあるほど誤差が大きくなる³⁾。今回の関数の場合は、 $\pi/2 \pm i \sinh^{-1}(\tan \alpha)$ が積分区間に最も近い特異点である。H積分では、この特異点の影響で α が小さくなるほど誤差が増加するという性質がある。G公式の場合には、この誤差の精密な評価式が知られている⁴⁾。ここで、 M 次のG公式の誤差が許容値以内になるような α の下限値を α_M としよう。もし、パラメータ α が $\alpha > \alpha_M$ であるならば、その場合の積分値は明らかに要求精度を満足する。下限値 α_M は、 M やその他のパラメータに依存するが、要求精度をCGで必要な 10^{-3} 、そして $(\beta_1, \beta_2) = (0, \pi/2)$ に固定して調べたところ、 α_M は $n > 20$ において n の平方根に逆比例することがわかった。したがって、 M 次G公式による積分値が要求精度を満足するための条件は次のように表すことができる：

$$\alpha > A_M / \sqrt{n}. \quad (\because n > 20) \quad (6)$$

いくつかの M に対して求めた係数 A_M を表1に示しておく。(6)式を使えば、パラメータに応じて最適な

表1 係数 A_M
Table 1 Coefficients A_M .

M	A_M (rad)
4	1.71
8	0.715
12	0.349
16	0.209
20	0.138
24	0.0988

次数のG公式を選択する適応型のプログラムを実現できる。なお、 $n < 20$ では(6)式は使えないが、このときは後述の解析表現が有効であるため問題ない。

3. Lの解析表現

3.1 解析表現の導出

数値積分では、 α が小さくなると、要求精度を得るのに高次の公式を使うかまたは区間分割を行わねばならず、計算時間が長くなるという欠点がある。本章では、これを回避するために、 $\alpha \rightarrow 0$ で効率のよいLの計算公式となる解析表現について述べる。

n が偶数 ($n = 2N_e$) で $(\beta_1, \beta_2) = (0, \beta_k)$ とした(2)式の H を H_k とする。 H_k は置換積分により、

$$H_k = \int_0^{\omega_k} \left(1 - \frac{\sin^2 \alpha}{1 - x^2}\right)^{N_e} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}},$$

$$\because \omega_k = \cos \alpha \sin \beta_k$$

と変形でき、上式の二項展開によって次式を導ける。

$$H_k = \sin^{-1} \omega_k + \sum_{j=1}^{N_e} (-1)^j \binom{N_e}{j} (\sin \alpha)^{2j} e_j, \quad (7)$$

$$\because \binom{N_e}{j} \text{ は二項係数}$$

e_j は、 $(1 - x^2)^{-(j+1/2)}$ の区間 $[0, \omega_k]$ における定積分であるが、これは次の漸化式⁵⁾で計算できる。

$$(2j-1)e_j = \omega_k / (\zeta_k)^{2j-1} + 2(j-1)e_{j-1}. \quad (8)$$

$$\because \zeta_k^2 = 1 - \omega_k^2$$

(1)式のLは、 $L = (\beta_2 - \beta_1) - (H_2 - H_1)$ で与えられるから、(7)、(8)式より、次の解析表現を導ける：

$$L = \tan^{-1} \theta_2 - \tan^{-1} \theta_1 - \sum_{j=1}^{N_e} (-1)^j \binom{N_e}{j} E_j. \quad (9)$$

ただし、

$$\theta_k = \frac{\sin^2 \alpha \sin \beta_k}{\zeta_k \cos \alpha + \cos \beta_k}, \quad (10a)$$

$$E_j = \frac{\sin^2 \alpha}{2j-1} [s_{2,j} - s_{1,j} + 2(j-1)E_{j-1}], \quad (10b)$$

$$s_{k,j} = (\sin \alpha / \zeta_k)^2 s_{k,j-1}, \quad (10c)$$

であり、初期値 $s_{k,1}$ は次式で与えられる。

$$s_{k,1} = \omega_k / \zeta_k. \quad (11)$$

同様に、奇数の $n (= 2N_o - 1)$ の場合の解析解を導いたところ、

$$L = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_o} (-1)^{j+1} \binom{N_o}{j} O_j, \quad (12)$$

の形式で表現できることがわかった。ただし、

$$O_j = \frac{1}{j-1} [s_{1,j} - s_{2,j} + (j-3/2)(1 + \sin^2 \alpha) O_{j-1} - (j-2) \sin^2 \alpha O_{j-2}]. \quad (13)$$

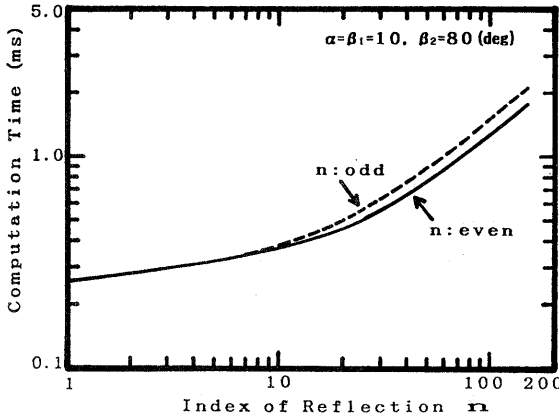


図1 解析表現の計算時間

Fig. 1 Computation time of analytical formulas.

初期値は、以下のとおりである。

$$O_1 = 2 \sin \alpha [\tan^{-1}(\sin \alpha \tan \beta_2) - \tan^{-1}(\sin \alpha \tan \beta_1)], \quad (14a)$$

$$s_{k,1} = \cos^2 \alpha \sin \beta_k \cos \beta_k. \quad (14b)$$

(9), (12)式による L の計算時間を図1に示す。これより、解析表現は n の小さい領域での使用に適しており、特に、 $n < 20$ ではこれ以外の手法を用いる必要はなさそうである。ただし、 n が大きい場合でも、 $\alpha \rightarrow 0$ でかつ $\beta_2 < \pi/2$ であれば、 E_j および O_j が急速に零に収束し有限和の計算を途中で打ち切ることができるため、計算時間がかなり短くなることを確認している(後述の図2において、 $\beta_2 = 85 \text{ deg}$ を例にすると $\alpha < 4 \text{ deg}$ の領域で有限和の収束判定を行っている)。したがって、解析表現は、数値積分公式の苦手な α の小さい領域での計算にも適していることがわかる。次に、解析表現による L の計算精度を調べたところ、 n が大きくなるにつれて精度が低下することがわかった。これは、二項係数の増大によって生じる桁落ちが主要原因であろうと考えている。double型による計算で相対精度 10^{-3} を確保できるのは $n \leq 100$ 程度であり、これが解析表現の適用限界となるが、CGで表示する物体の多くはこの範囲内にあるため特に深刻な問題とはならないだろう。

3.2 $\beta_2 = \pi/2$ の場合の近似表現

前節で導出した解析表現は、 $\beta_2 < \pi/2$ の場合、 $\alpha \rightarrow 0$ に従って E_j または O_j の減衰が二項係数の増加を凌駕するため、有限和の計算を途中で打ち切ることができた。しかしながら、 $\beta_2 = \pi/2$ のときの E_j と O_j は、それぞれ、 $\alpha \rightarrow 0$ において、

$$\frac{E_j}{E_1} \sim \frac{1}{2j-1}, \quad \frac{O_j}{O_1} \sim \frac{2\sqrt{j/\pi}}{2j-1},$$

に漸近し(後者の導出にはスターリングの公式を使用した)、調和数列程度の緩やかな減衰しかししない。そのため、 $\beta_2 < \pi/2$ のときのような高速化は期待できない。本節では、『 $\beta_1 = 0, n > 20, n$: 偶数』の条件を仮定して、この点の改善策を検討する。ただし、現実には第一の仮定に反する $\beta_1 = \beta (> 0)$ であることも多い。このような場合には、 $(\beta_1, \beta_2) = (0, \beta)$ を前節の方法で計算し、これと本節の方法とを併用すればよい。

$(\beta_1, \beta_2) = (0, \pi/2)$ の条件下で、解析表現(9)式は、次のように変形できる：

$$L = \alpha + \sin \alpha \cos \alpha \sum_{k=0}^{n/2-1} (-1)^k C_{n,k} (\sin \alpha)^{2k}. \quad (15)$$

ただし、

$$C_{n,k} = \frac{1}{k!} \sum_{x=k}^{n/2-1} \frac{4^x (x!)^3}{(2x+1)!(x-k)!} \quad (16)$$

(15)式は $\alpha \rightarrow 0$ で有限和内の数列が急速に収束するため非常に魅力的な式である。実際、(15), (16)式で L を計算した結果、有限和の初めの6項 ($k \leq 5$) だけで、 $\alpha < 1.939/n^{0.523}$, ($n > 20$) (17)

を満足する α において相対精度 10^{-3} を確保できることがわかった。(17)式を満足しない α については4次のG公式により計算できるため問題ない。(15)式自体は効率の良い式ではあるが、係数 $C_{n,k}$ が(16)式の形式だと計算に時間がかかるため、このままではあまり利用価値はない。

(16)式の欠点を解決する一方法として、 $C_{n,k}$ の n に関する漸近展開について考えてみる。 $C_{n,k}$ の漸近展開は、(16)式とオイラー・マクローリンの公式⁹⁾を利用して導出できるが、その過程は初等的でありまた長くなるため省略し、結果のみ示すと、 $z = \sqrt{n}$ として、

$$C_{n,0} = \sqrt{\pi/2} \left[z - e^{-1/4} \tan^{-1} z - a_0/z - \frac{ze^{(1/4n)}}{2(n+1)} \left\{ 1 + \frac{1}{6(n+1)} \right\} \right] + 0.53323249, \quad (18)$$

$$C_{n,1} = \frac{\sqrt{\pi/2}}{2} \left[z^3/3 - 0.75z + e^{-1/4} \tan^{-1} z - a_1/z - \frac{z^3 e^{(1/4n)}}{2(n+1)} P_0 \right] - 0.099843987, \quad (19)$$

さらに、 $k=2 \sim 5$ では、

$$C_{n,k} = \frac{\sqrt{\pi/2}}{(2k)!!} \left[\sum_{j=0}^k \frac{(-1)^{k+j} f_{k,j} z^{2j+1}}{(2j+1)4^{k-j}(k-j)!} - (-1)^k (2k-1)!! e^{-1/4} \tan^{-1} z - \frac{z^3 e^{(1/4n)}}{2(n+1)} \sum_{j=0}^{k-1} g_{k,j} n^j P_j \right] + h_k, \quad (20)$$

表 2 $C_{n,k}$ の漸近表現における定数
Table 2 Constants in asymptotic representations of $C_{n,k}$.

j	0	1	2	3	4	5
$f_{2,j}$	73	11	1	—	—	—
$f_{3,j}$	4403	425	27	1	—	—
$f_{4,j}$	494577	35003	1721	51	1	—
$f_{5,j}$	89194339	4974961	200219	4985	83	1
h_2	h_3	h_4	h_5			
0.043052278	-0.028364911	0.018296937	-0.015072969			

となる。ただし、!! は double factorial, そして a_0, a_1, P_j は、それぞれ、

$$a_0 = e^{-1/4} - 3/4,$$

$$a_1 = -a_0 + 1/32,$$

$$P_j = 1 - \frac{2j+1}{6(n+1)} \left[1 + \frac{2j+5/2}{(2j+1)n} \right],$$

である。さらに、定数 $g_{k,j}$ は多項式 $(n-2k+2)(n-2k+4)\dots(n-4)(n-2)$ の j 次項 n^j の係数であり、その他の定数 $f_{k,j}$ と h_k は表 2 に与えた。(18)~(20)式によって、 $n > 20$ における $C_{n,k}$ ($k=0\sim 5$) を 10^{-4} 以上の精度で求めることができる。漸近展開により $C_{n,k}$ を求め、(17)式を満足する α に設定して(15)式で L を計算したところ、その計算時間は 0.25 ms 以下であった。これは $n < 3$ の解析表現(9)、(12)式に匹敵する性能で、 $\beta_2 = \pi/2$ の場合には、(15)、(18)~(20)式はきわめて有効となる。

4. L の計算プログラム

図 1 と(4)式とを比較すると、 $n \leq 100$ の場合、13 次以上の G 公式は解析表現よりも計算時間が長いことがわかる。それゆえ、 L 計算には 12 次以下の G 公式があれば十分である。この点を考慮して、 $n \leq 100$ の L を相対精度 $\epsilon = 10^{-3}$ 以下で計算する C プログラム (約 250 行程度) を作成した。このプログラムは、計算時間が最小となるように、解析表現と G 公式とをパラメータに応じて使い分け、さらに(6)式を利用して G 公式の次数も最適なものを選択している。ただし、12 次以下すべての次数の G 公式を考慮するとプログラムが非常に複雑になるため、今回は 4, 8, 12 の 3 種類だけしか組み込んでいない。

図 2 に、本プログラムの計算時間の測定結果を示す。 β_2 が $\pi/2$ に近くなると、中間的な α のところで速度が低下している。もちろん、この領域でも C 法に比べれば 2 倍以上も高速なのだが、今後の検討を要する部分であろう。同図中において、① 0.62 と ② 1.0

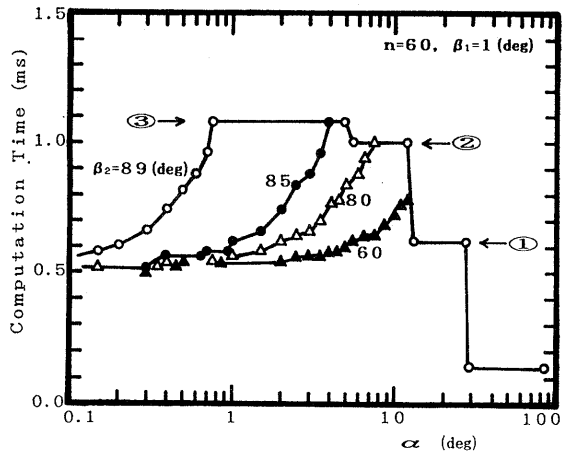


図 2 作成したプログラムの計算時間
Fig. 2 Computation time of our program.

ms がそれぞれ 4 次と 8 次の G 公式に、③ 1.08 ms が解析表現 (有限和の収束判定なし) に対応する。これらの値は(4)式および図 1 のデータに比べ 0.2 ms ほど大きくなっているが、この差は、計算方法を選択する際の判定時間によるものである。最後に、 $f(n, \alpha; \phi = \beta) < \epsilon$ であるとき、 $L \approx \beta_2 - \beta_1$ と近似できるため積分計算は必要ないことを注意しておく (図 2 の $\alpha > 26$ deg の領域)。

5. あとがき

CG 画像生成に必要な物体の輝度、これに関係する量である L の数値計算の高速化について考察した。ガウス型数値積分公式は精度が高く、さらに、田中らの用いたチェビシェフ補間に基づく方法よりも 2 倍以上も速いため、 L 計算に適していることを述べた。一般に、数値積分では、パラメータ α が小さくなるに従い計算速度が遅くなる。これを解消するために、 L の解析表現を導出した。解析表現は α が小さい場合の使用に適しているため、ガウス公式と解析表現の併用によって全パラメータ領域で L ($n \leq 100$) を高速に計算できることを示した。

謝辞 CG 関係の研究のきっかけを与えていただいた慶應義塾大学環境情報学部大岩元教授、有益なご助言をいただいた査読者の方に感謝いたします。

参考文献

- 1) 田中敏光, 高橋時市郎: 面光源で照らされた物体の照度計算法, 情報処理学会論文誌, Vol. 32, No. 11, pp. 1383-1391 (1991).
- 2) 田中敏光, 高橋時市郎: 精密レンダリング法と

そのハイライト生成への応用, 情報処理学会論文誌, Vol. 33, No. 4, pp. 471-480 (1992).

- 3) 森 正武: 数値解析, 5章, 共立出版 (1990).
- 4) 森 正武, 室田一雄, 杉原正顕: 岩波講座応用数学・数値計算の基礎, 6章, 岩波書店 (1993).
- 5) 森口繁一, 宇田川銑久, 一松 信: 数学公式 I, p. 14, 岩波書店 (1984).
- 6) 森口繁一, 宇田川銑久, 一松 信: 数学公式 II, pp. 34-35, 岩波書店 (1984).

(平成 5 年 6 月 7 日受付)

(平成 5 年 11 月 11 日採録)



津曲 隆 (正会員)

1958年生. 1979年国立都城工業高等専門学校電気工学科卒業. 1981年豊橋技術科学大学電気電子工学課程卒業. 1983年同大学院工学研究科修士課程修了. 同年, 都城工業高等専門学校電気工学科助手. 講師を経て, 1992年同校助教授, 現在に至る. 工学博士. 荷電粒子ビーム, 電界計算法, 数学関数の数値計算法等に関する研究に従事. 電気学会, 日本応用数理学会, 応用物理学会各会員.