

## Mathieu 関数の計算について

山下 眞一郎†

本論文は第1種および第2種の Mathieu 関数の固有値, フーリエ展開係数, 関数値, 微分値の計算法について述べる. 固有値は固有番号  $n$  とパラメータ  $q$  の2変数近似で初期値を求め, 特性方程式の0点として Newton 法で改善する. フーリエ展開係数はフーリエ展開を仮定して微分方程式に代入し, 係数の間に成り立つ漸化式を導き, 順方向と逆方向との計算結果を調整して求める. 関数値は, フーリエ級数展開を Clenshaw の方法で計算して求める. 微分値はフーリエ級数展開を微分して求める. また, 第2種 Mathieu 関数の固有値は第1種と同じ値を用いる. 第2種のフーリエ展開係数は微分方程式に代入して3項連立一次方程式を導き, 2つの値を仮定して逆向きに計算した値と消去法で導いた2項式と等置し, 逆向きに計算した値を修正して求める. 関数値や微分値は第1種と同じようにして求める.

## On the Calculation of Mathieu Functions

SHIN-ICHIRO YAMASHITA†

This paper describes methods for computing eigenvalues, Fourier series, function values, and derivatives of Mathieu functions of the first and second kind. For eigenvalues, the method starts with initial values obtained through an approximation involving two variables, the eigen-number  $n$  and parameter  $q$ , then refines them by Newton's method applied to the characteristic equation. To obtain the Fourier coefficients, we propose a method based on well-known a recurrence formulas among the coefficients. The relation will be solved by adjusting between forward and backward solutions. The function values and derivatives can be calculated by evaluating the Fourier series by the Clenshaw's method. The eigenvalues of the second kind Mathieu function are the same as those of the first kind. The Fourier coefficients are computed in such a way that its three term recurrence relations is solved forward and the results are refined by using a two term recurrence equation that is obtained from the three term recurrence relations.

## 1. ま え が き

Helmholtz の方程式を楕円座標を用いて表し, 変数分離すれば, 次の方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \{\lambda - 2q \cos(2x)\} y = 0 \quad (1)$$

を得る<sup>1), 2), 6), 8), 10), 13)</sup>. (1)は Mathieu の微分方程式といい,  $\lambda$ は分離定数であり,  $q$ はパラメータである. 2階の微分方程式は2つの独立な解を有する. (1)を満たし,  $y$ が $\pi$ または $2\pi$ の周期解になる $\lambda$ は特別な値で, 固有値といい, 可付番無限個あり, 添字 $n$ で区別する. この関数 $y$ を第1種 Mathieu 関数と呼び,  $ce_n(x, q)$ ,  $se_n(x, q)$ と書く. もう一方の解は周期関数ではないが, 第2種 Mathieu 関数と呼び,  $fe_n(x, q)$ ,  $ge_n(x, q)$ と書く.

$ce_n(x, q)$ ,  $fe_n(x, q)$ の $n$ は固有値の絶対値の小さい順に $0, 1, 2, \dots$ と番号を付けたものと対応し, この固有値は標準的には記号 $a_n(q)$ で表す<sup>1), 2), 6), 7)</sup>.

$se_n(x, q)$ ,  $ge_n(x, q)$ の $n$ は固有値の絶対値の小さい順に $1, 2, 3, \dots$ と番号を付けたものと対応し, この固有値は標準的には記号 $b_n(q)$ で表す.

$ce_n(x, q)$ ,  $se_n(x, q)$ は,  $n$ が偶数ならば周期は $\pi$ で,  $n$ が奇数ならば周期は $2\pi$ である.

ここでは固有値を表すのにパラメータ $q$ を省略して $a_n$ ,  $b_n$ と表し, 両者を代表するとき,  $\lambda_n$ と表す.

本論文では, まず, Mathieu 関数のよく知られたフーリエ展開形とフーリエ係数の満たす3項漸化式を述べる. 次に固有値を固有番号 $n$ とパラメータ $q$ の2変数関数として求める方法を述べる. なお, パラメータ $q < 0$ の場合も,  $a_{2n}(-q) = a_{2n}(q)$ ,  $b_{2n}(-q) = b_{2n}(q)$ ,  $a_{2n+1}(-q) = b_{2n+1}(q)$ ,  $b_{2n+1}(-q) = a_{2n+1}(q)$ であるので,  $q \geq 0$ を考えれば十分である.

次に第1種 Mathieu 関数  $ce_n(x, q)$ ,  $se_n(x, q)$ のフー

† 日本大学理工学部  
College of Science and Technology, Nihon  
University

リエ展開係数を求め、Clenshaw の方法で、関数値と微分値を求める方法を述べる。次に第 2 種 Mathieu 関数  $fe_n(x, q)$ ,  $ge_n(x, q)$  のフーリエ展開係数を求め、関数値と微分値を求める方法を述べる。

計算は富士通(株)のパソコン FMR 60 の RM/FORTRAN の倍精度約 16 桁を使った。精度を調べる場合は 4 倍精度システムを使った。

計算精度は次のとおりである。固有値は Newton 法により求めるので少なくとも 15 桁程度求められる。フーリエ係数の誤差は、精度が失われるところがないので、丸め誤差程度である。フーリエ級数として Mathieu 関数を計算すれば、精度が失われるところがないので、誤差は丸め誤差程度である。これらを総合すると、関数値や微分値の精度は、高々 1 桁程度失われる程度で、15 桁程度は保証される。4 倍精度の計算に対応するサブルーチンを作るには、変数を 4 倍精度に宣言し、収束判定の定数を変えるだけである。

2. Mathieu 関数のフーリエ展開

第 1 種 Mathieu 関数  $ce_n(x, q)$ ,  $se_n(x, q)$  は次のようにフーリエ展開される<sup>1), 2), 8)</sup>。

$$ce_{2n}(x, q) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k} \cos(2k)x \tag{2}$$

$$ce_{2n+1}(x, q) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k+1} \cos(2k+1)x \tag{3}$$

$$se_{2n}(x, q) = \sum_{k=1}^{\infty} B_{2k} \sin(2k)x \tag{4}$$

$$se_{2n+1}(x, q) = \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k+1} \sin(2k+1)x \tag{5}$$

フーリエ係数  $A_k$ ,  $B_k$  は  $\lambda, q, n, k$  の関数で、正規化は次のように行う。文献 1) の pp. 14-25 を参照。

$$2A_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{2k}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k+1}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} B_{2k}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k+1}^2 = 1 \tag{6}$$

ここでフーリエ係数が満たす 3 項漸化式<sup>1), 2), 7), 14)</sup>を述べておく。(2)~(5)式に対応して

(2) 式の場合:  $A_0$  は任意。  
 $A_2 = V_0 A_0$ ;  $A_4 = V_2 A_2 - 2A_0$   
 $A_{2k+2} = V_{2k} A_{2k} - A_{2k-2}$  (7)  
 $k=2, 3, \dots$

(3) 式の場合:  $A_1$  は任意。  
 $A_3 = (V_1 - 1)A_1$   
 $A_{2k+1} = V_{2k-1} A_{2k-1} - A_{2k-3}$  (8)  
 $k=2, 3, \dots$

(4) 式の場合:  $B_2$  は任意。  
 $B_0 = 0$ ;  $B_4 = V_2 B_2$   
 $B_{2k+2} = V_{2k} B_{2k} - B_{2k-2}$  (9)  
 $k=2, 3, \dots$

(5) 式の場合:  $B_1$  は任意。  
 $B_3 = (V_1 + 1)B_1$   
 $B_{2k+1} = V_{2k-1} B_{2k-1} - B_{2k-3}$  (10)  
 $k=2, 3, \dots$

ここに  $V_k = (\lambda - k^2)/q$

第 2 種 Mathieu 関数  $fe_n(x, q)$ ,  $ge_n(x, q)$  は次のように展開される。

$$fe_{2n}(x, q) = C_{2n}(q) \{zce_{2n}(x, q) + \bar{f}_{2n}(x, q)\} \tag{11}$$

$$fe_{2n+1}(x, q) = C_{2n+1}(q) \{zce_{2n+1}(x, q) + \bar{f}_{2n+1}(x, q)\} \tag{12}$$

$$ge_{2n}(x, q) = S_{2n}(q) \{zse_{2n}(x, q) + \bar{g}_{2n}(x, q)\} \tag{13}$$

$$ge_{2n+1}(x, q) = S_{2n+1}(q) \{zse_{2n+1}(x, q) + \bar{g}_{2n+1}(x, q)\} \tag{14}$$

ただし,

$$\bar{f}_{2n}(x, q) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{2k} \sin(2k)x \tag{15}$$

$$\bar{f}_{2n+1}(x, q) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{2k+1} \sin(2k+1)x \tag{16}$$

$$\bar{g}_{2n}(x, q) = \sum_{k=0}^{\infty} g_{2k} \cos(2k)x \tag{17}$$

$$\bar{g}_{2n+1}(x, q) = \sum_{k=0}^{\infty} g_{2k+1} \cos(2k+1)x \tag{18}$$

フーリエ係数  $f_k$ ,  $g_k$  は、5 章で述べる (40)~(43) 式の連立方程式で決まる。また、定数  $C_{2n}(q)$ ,  $C_{2n+1}(q)$ ,  $S_{2n}(q)$ ,  $S_{2n+1}(q)$  は次式で決まる。文献 1) の p. 144 を参照。

$$C_{2n}^2 \sum_{k=1}^{\infty} f_{2k}^2 = S_{2n}^2 \left[ 2q_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} g_{2k}^2 \right] \tag{19}$$

$$= C_{2n+1}^2 \sum_{k=0}^{\infty} f_{2k+1}^2 = S_{2n+1}^2 \sum_{k=0}^{\infty} g_{2k+1}^2 = 1$$

3. 固有値の計算法

固有値は文献 3), 4), 11), 13) に詳しく述べられている。文献 13) の方法は固有値を  $n$  ごとに  $q$  の関数として考えて近似式を作り、その値を初期値とし、区間外は漸近式で近似値を求め、次の特性方程式  $f(\lambda)$  の 0 点として Newton 法で改善して固有値を求めている。

$$f(\lambda) = V_{2n+d} + G_{2n+d} + H_{2n+d} \tag{20}$$

ただし

$$G_{2n+d} = -1/(V_{2n+d+2} - 1/(V_{2n+d+4} - \dots)) \tag{21}$$

$$H_{2n+d} = -1/(V_{2n+d-2} - 1/(V_{2n+d-4} - \dots)) \tag{22}$$

$$\dots -1/(V_{2+d} - \alpha/(V_{0+d} + \beta) \dots)$$

ここに,  $V_k = (\lambda - k^2)/q$ ;  $k=0, 1, 2, \dots$

(2)式から,  $d=0, \alpha=2, \beta=0$

(3)式から,  $d=1, \alpha=1, \beta=-1$

(4)式から,  $d=0, \alpha=0, \beta=0$

(5)式から,  $d=1, \alpha=1, \beta=+1$

文献 13)の方法は  $n$  ごとに Newton 反復の初期値を与える固有値の近似式を作るために, 膨大な係数が必要で, 移植が困難であった。

ここで述べる方法は文献 13)の近似式の係数を劇的に削減し, 移植が容易になった。この方法は, まず, 固有値を次のように正規化する。パラメータ  $q$  を横軸に, 固有値  $\lambda_n$  を縦軸に取り,  $x$  軸および  $y$  軸を

$$x = q/q_M, 0 \leq x \leq 1 \tag{23}$$

$$y_n(x) = \lambda_n/n^2 - 1$$

ここに  $q_M = 4n^2$

と正規化する。ここで,  $q_M = 4n^2$  とすれば, 図 1 のようになった。この  $q_M$  を 2, 3 変更してみたが, いずれも曲線が交差するなどして失敗に終わった。この値は理論的に考察したわけではないので, 他に良い変換があるかもしれない。

次に固有番号  $n_a, n, n_b$  の固有値を  $y_a(x), y_n(x), y_b(x)$  と表し,  $n_a=6, n_b=160$  を選び,  $n \leq n_a$  および  $n = n_b$  の固有値の初期値は近似式を作って計算する。 $n_a < n < n_b$  の固有値の初期値  $y_n(x)$  は  $y_a(x), y_b(x)$  および  $y_a(1), y_n(1), y_b(1)$  から決定する。 $n > n_b$  の固有値の初期値は  $n_b$  の場合の結果を使って求める。これによって近似式の係数がロードモジュールで, 約

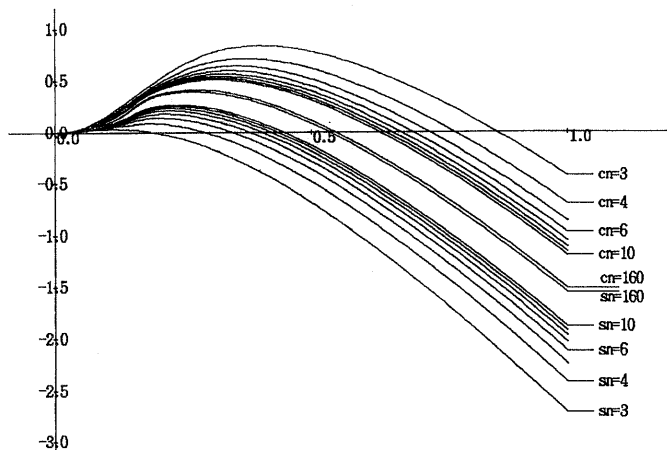


図 1 正規化された固有値  
Fig. 1 Normalized eigenvalues.

60 KB が 3 KB に削減された。

$n_a < n < n_b$  の固有値の初期値  $y_n(x)$  の決定に当たっては次のように行う。

今,  $n_a, n, n_b$  に対する  $x=1$  の正規化固有値を  $y_a(1), y_n(1), y_b(1)$  とする。また, 任意の  $x$  に対する値を  $y_a(x), y_n(x), y_b(x)$  とする。このとき,

$$K_n = \frac{y_n(1) - y_b(1)}{y_a(1) - y_b(1)} \tag{24}$$

$$= \frac{y_n(x) - y_b(x)}{y_a(x) - y_b(x)} \text{ (一定)}$$

を仮定する。そうすれば

$$y_n(x) = y_b(x) + K_n \{y_a(x) - y_b(x)\} \tag{25}$$

と 2 変数  $n, x$  の近似式が求められる。 $K_n$  は (24) 式を使って  $x=1$  の値を  $n$  ごとに求めて表にしておく。本論文では扱わなかったけれども,  $K_n$  を最適に選ぶ方法は次のようにすればできる。誤差 (29) の最大値を  $\rho_p$ , 最小値を  $\rho_m$  とすれば,  $\rho_p + \rho_m = 0$  となるように  $K_n$  を調整する。これはある種の最良近似となるが,  $K_n$  を調整する具体的方法は,

$$h = \frac{\rho_p + \rho_m}{\rho_p - \rho_m} \tag{26}$$

に比例して, 例えば

$$K'_n = K_n(1 + ah) \tag{27}$$

ここに  $a$  は定数

として  $K_n$  を修正, 反復すれば, 最良近似になるような  $K_n$  に到達する可能性がある。定数  $a$  は, 最初  $+0.01$  または  $-0.01$  として試みれば良い。

$y_a(x), y_b(x)$  は文献 13)による近似式で求める。

$n > n_b$  の値  $y_n(x)$  は  $y_b(x)$  で代用する。このようにして固有値の初期値は

$$\lambda_n^{(0)} = n^2 \{1 + y_n(x)\} \tag{28}$$

と求める。 $x > 1$  すなわち,  $q > 4n^2$  の範囲は漸近式で求める<sup>11), 13)</sup>。求めた初期値を Newton 法で改善する。固有値は  $\cos$  に対する  $a_n$  と  $\sin$  に対する  $b_n$  は別々に求める。 $n$  の奇偶は区別する必要はない。

### 3.1 固有値の誤差解析

(25)式の精度について述べる。ここで Newton 法を使った場合, 固有値の精度は  $10^{-15}$  以上で, 論じている精度は  $10^{-2}$  程度である。さて, (24)式の  $y_a(1), y_n(1), y_b(1)$  を Newton 法で求めた値を使って  $K_n$  を決める。ま

た、(25)式の  $y_a(x), y_b(x)$  を Newton 法で求めた値を使って  $y_n(x)$  を決める。さらに Newton 法で精度を上げた  $y_n(x)$  を  $\hat{y}_n(x)$  とする。すなわち、 $\hat{y}_n(x)$  の精度は  $10^{-15}$  以上で十分に高く、真値と見なされる。この誤差を理論誤差と呼び

$$E_n(x) = \hat{y}_n(x) - y_n(x) \tag{29}$$

と定義する。  $n=7, n=10, n=13$  の場合の誤差の例を図2に示す。他の  $n$  も、おおむね同様な結果を示し、 $n=7\sim 20$  の例を表1に示した。最大誤差は  $n=13$  の場合に起こり、約2%の誤差である。これが(25)式の理論誤差である。

文献13)を参照して  $y_a(x), y_b(x)$  の近似式を求め、

(25)式で固有値を計算し、誤差を(29)式のように評価した時の例を図3で示す。数値で示せば表2のとおりである。図2と図3とを比べてみれば、理論的な誤差と実際の誤差がほとんど同じで、これは近似式が十分に精度があることを意味する。

指定された  $(n, q)$  から計算された近似固有値を初期値として Newton 法で真の固有値が求まるためには、近似固有値の精度がどの程度あれば良いか？ その限界を知る簡単な方法はない。経験によると、10%程度以下の誤差なら十分のように思える。そこで1%の近似を目指したが、総合誤差は2%以下になった。

図2に盲腸のような振る舞いがあるのは、固有値の

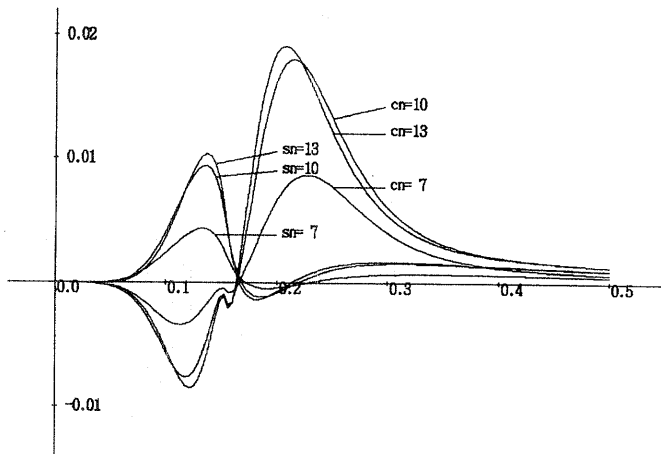


図2 (18) 式の理論誤差  
Fig. 2 Theoretical errors of Eq. (18).

表1 (18) 式の理論的最大誤差  
Table 1 Theoretical maximum errors of Eq. (18).

n	$ce_n$ の固有値 の最大誤差	$se_n$ の固有値 の最大誤差
7	8.63485E-03	4.32402E-03
8	1.36188E-02	6.88919E-03
9	1.64887E-02	8.42711E-03
10	1.80860E-02	9.37205E-03
11	1.88823E-02	9.93040E-03
12	1.91552E-02	1.02272E-02
13	1.91533E-02	1.03476E-02
14	1.88871E-02	1.03474E-02
15	1.85514E-02	1.02640E-02
16	1.80848E-02	1.01233E-02
17	1.75942E-02	9.94519E-03
18	1.70804E-02	9.77833E-03
19	1.65299E-02	9.59204E-03
20	1.59921E-02	9.39278E-03

表2 (18) 式の総合最大誤差  
Table 2 Total maximum errors of Eq. (18).

n	$ce_n$ の固有値 の最大誤差	$se_n$ の固有値 の最大誤差
5	7.75952E-04	1.99456E-05
6	-6.54767E-04	-8.20069E-05
7	9.11523E-03	4.48519E-03
8	1.41110E-02	7.07591E-03
9	1.69251E-02	8.61049E-03
10	1.83957E-02	9.49974E-03
11	1.90565E-02	9.98055E-03
12	1.91927E-02	1.02022E-02
13	1.89897E-02	1.02720E-02
14	1.85813E-02	1.02232E-02
15	1.80591E-02	1.00942E-02
16	1.74458E-02	9.91129E-03
17	1.67876E-02	9.69259E-03
18	1.61342E-02	9.45092E-03
19	1.54792E-02	9.19540E-03
20	1.48325E-02	8.93253E-03

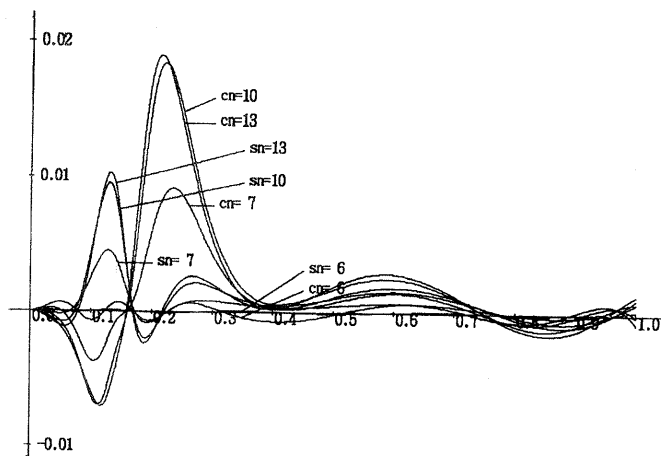


図3 (18) 式の総合誤差  
Fig. 3 Total errors of Eq. (18).

表 3 文献 3) で  $s=100$  の場合の固有値の誤差  
Table 3 Error of eigenvalue for  $s=100$  in Ref. 3).

n	$be_n$ の真値	$be_n$ の誤差	$bo_n$ の真値	$bo_n$ の誤差
0	9.74322045343321272419	- 4.58E-16		
1	28.68510030933427306544	+ 9.07E-17	9.74322101531584071670	- 5.94E-16
2	46.47783527284170405567	+ 4.62E-17	28.68513937775014914568	+ 7.11E-17
3	62.96407944432646730033	+ 3.17E-17	46.47905847337863056224	+ 3.48E-17
4	77.80524058092844085939	- 5.05E-20	62.98648995274245978696	+ 3.71E-19
5	90.05019098580771196985	- 5.55E-17	78.06276589945433644685	+ 3.31E-17
6	98.97578671616185078153	+ 1.60E-17	91.80107129181058013238	- 7.12E-17
7	107.53468900108287250732	- 8.39E-17	105.00295715083420182311	+ 9.66E-17
8	119.52406516594137202340	- 6.65E-17	119.05798835128618256012	- 1.27E-17
9	135.07699988181653041036	- 2.20E-17	135.02335650490508318837	+ 1.61E-17
10	153.23020480449483817628	+ 3.93E-17	153.22568004237347000479	- 8.51E-17
11	173.64301237608357483632	+ 7.78E-17	173.64271366714853649385	- 2.82E-17
12	196.20769064280234638977	+ 6.56E-17	196.20767464745807923253	+ 9.91E-18
13	220.87371080831606218747	+ 6.49E-17	220.87371009659705937826	+ 3.69E-17
14	247.61116494244372124340	- 5.95E-17	247.61116491565086034809	+ 5.67E-17
15	276.40072004474810000132	+ 5.76E-17	276.40072004388250123235	- 1.02E-16

注意)  $s = 4q$ ;  $be_n = \lambda_n + 2q$ ;  $bo_n = \lambda_n + 2q$

図 (文献 13) の図 4 参照) がいびつになっているのを反映しているのかもしれない。また、固有値の最良有理近似式を作ると、その途中で分母が 0 になったり、隣の偏差値が異符号にならなかったり、計算が困難であるが、これが理由かもしれない。

固有値の近似値を求めて Newton 法で改善する倍精度のプログラムの結果が、どの程度の精度があるかを調べるために、4 倍精度システムを使い、比較した例を表 3 に示す。誤差は相対誤差を示した。これから最後の 1 ビットないし数ビット程度の誤差であることがわかる。固有値の精度が、このように高いのは、固有値から  $n^2$  を除いて計算するからである。また、特性方程式の関数計算は主要項が 1 次項であり、有限連分数や無限連分数の項は補正量程度の大きさのため、固有値の精度が高いのに役立っていると思われる。

#### 4. 第 1 種 Mathieu 関数

第 1 種 Mathieu 関数のフーリエ展開係数および収束に必要な項数の決定方法については文献 14) に詳しく述べられているので、ここでは簡単に述べる。(2)~(5)式のフーリエ係数は、漸化式(7)~(10)で順方向に計算すれば、 $k$  が増加するにしたがい、最初は増大し、おおよそ  $k=n$  まで増大を続け、そこを越えると符号が交代しながら絶対値は減少する。2 次漸化式の一般解は 2 つの数値の線型結合になっているが、一般に数値計算では、増大する数値しか計算できない。減衰する数値は、誤差拡大のために計算できず、逆向きに計算しなければならない。このように、

フーリエ係数は、 $k=n$  までは順方向に計算し、 $k>n$  は逆方向に計算し、両者が合うように整合する。逆方向に計算するには、任意の初期値を与えて、望みの精度を保証する点  $k=M$  および望みの精度以上が保証される点  $k=N$  を決定しなければならない。この  $N$ 、 $M$  の与え方は文献 14) に述べられている。

文献 14) のプログラムを利用して文献 3) の数値例を示す。誤差は 4 倍精度システムを使って調べる。その結果、表 4 のようになった。フーリエ展開の個々の係数が相対誤差で末尾 1 ビットないし数ビット程度の誤差である。このように精度が高いのは 3 項漸化式を順方向と逆方向に計算するので情報落ちを起ささない計算であるからである。普通はこのように高い精度は不要で、フーリエ展開としては絶対誤差で各項が同じ程度で良い。簡単に表 4 を説明する。 $r=10$  は固有番号 10 を示す。NN=15 はフーリエ級数の項数を示す。MM=23 はフーリエ級数の  $A_{30}$  の誤差が  $10^{-16}$  以下となる逆漸化式の出発項を示す。NNQ, MMQ は 4 倍精度の項数を示す。 $ar$  は  $ce_r$ ,  $br$  は  $se_r$  に対する固有値を示す。

関数値  $ce_n(x, q)$ ,  $se_n(x, q)$  は、次の Clenshaw の方法<sup>16), 17)</sup>で計算する。

cos 展開の場合:

$n$  が偶数なら、

$$d=0, F=W_0-W_1 \cos(2x) \quad (30)$$

$n$  が奇数なら、

$$d=1, F=\{W_0-W_1\} \cos(x) \quad (31)$$

$$W_k=2 \cos(2x)W_{k+1}-W_{k+2}+A_{2k+d} \quad (32)$$

表 4 文献 3) のフーリエ係数およびその誤差  
Table 4 Fourier of coefficients of the first kind and their errors in Ref. 3).

r=10	q=5	NN=15	MM=23	NNQ=22	MMQ=24
		$a_r$ の真値		$a_r$ の誤差	
		100.12636921616331475032		1.04E-16	
		$b_r$ の真値		$b_r$ の誤差	
		100.12636921560183338236		-1.32E-17	
m	フーリエ係数の $A_m$	$A_m$ の誤差	フーリエ係数の $B_m$	$B_m$ の誤差	
0	1.67885419054735299454E-06	3.18E-16	0.000000000000000000E-00		
2	3.36195149085694529431E-05	3.61E-16	3.34443200077279037049E-05	-1.10E-17	
4	6.42986672212796149746E-04	1.18E-16	6.42976210645518406606E-04	8.26E-17	
6	1.07848073226206037112E-02	1.09E-16	1.07848064987149639976E-02	-3.45E-17	
8	1.37675120586897319929E-01	1.97E-16	1.37675120480438053780E-01	1.39E-16	
10	9.83955640317791310205E-01	-5.97E-17	9.83955640357039195846E-01	-4.13E-19	
12	-1.12806779985610970239E-01	5.74E-17	-1.12806779988654310972E-01	3.42E-17	
14	5.89296268264739576470E-03	1.19E-16	5.89296268277177267950E-03	-5.44E-17	
16	-1.89165706201865255335E-04	1.64E-16	-1.89165706205175554306E-04	8.90E-17	
18	4.22640644725828173582E-06	2.30E-16	4.22640644732163474880E-06	3.75E-17	
20	-7.04851013202446441748E-08	4.85E-16	-7.04851013211691752686E-08	3.40E-17	
22	9.18202555390687200181E-10	4.20E-16	9.18202555401387615056E-10	9.01E-17	
24	-9.64842631935805182982E-12	6.44E-16	-9.64842631945910521548E-12	1.44E-16	
26	8.37773979619794239270E-14	7.09E-16	8.37773979627751784681E-14	2.82E-16	
28	-6.12549039446322086762E-16	7.23E-16	-6.12549039451637382401E-16	3.21E-16	
30	3.82916588215292412691E-18	7.00E-16	3.82916588218346299627E-18	4.42E-16	

表 5  $ce_n(z, q)$  および  $se_n(z, q)$  の最大誤差  
Table 5 Maximum errors of  $ce_n(z, q)$  and  $se_n(z, q)$ .

$q = 25; z = \frac{k\pi}{512}, k = 0(1)256$

n	$ce_n(z, q)$ の最大誤差	$se_n(z, q)$ の最大誤差
0	-5.05655E-16	
1	-3.25852E-16	-4.92866E-16
2	-2.00709E-15	-4.27878E-16
3	6.96800E-16	-1.48886E-15
4	-1.17354E-15	-9.30668E-16
5	-5.37868E-16	1.30977E-15
6	-4.64930E-15	-9.46628E-16
7	-3.83770E-16	-1.28042E-15
8	-1.56341E-15	-7.52178E-16
9	-9.08955E-16	1.85625E-15
10	2.56577E-15	-1.01824E-15
11	-1.32622E-15	-2.53162E-15
12	-2.84870E-15	1.17228E-15
13	-1.69412E-15	-3.07818E-15
14	3.80546E-15	1.66350E-15
15	-2.29693E-15	3.38356E-15

$$k = M, M-1, \dots, 2, 1, 0$$

$$W_{M+2} = W_{M+1} = 0$$

sin 展開の場合:

$n$  が偶数なら,

$$d=0, F = W_1 \sin(2z) \tag{33}$$

$n$  が奇数なら,

$$d=1, F = \{W_0 + W_1\} \sin(z) \tag{34}$$

$$W_k = 2 \cos(2z) W_{k+1} - W_{k+2} + B_{2k+d} \tag{35}$$

$$k = M, M-1, \dots, 2, 1, 0$$

$$W_{M+2} = W_{M+1} = 0$$

として関数値  $F$  が求められる.

4倍精度システムを使い, 固有値, フーリエ係数, 関数値の総合した誤差を調べる. 例として  $z = \pi k/512, k = 0(1)256$  の最大誤差を  $q=10, n=0(1)15$  について求めると, 表 5 のようになった.

第 1 種 Mathieu 関数の微分を求めるには (2)~(5) 式を微分したものを考えれば, Clenshaw の方法の (32) 式の係数を加える  $+A_{2k+d}$  を  $-(2k+d)A_{2k+d}$  に, (35) 式の係数を加える  $+B_{2k+d}$  を  $+(2k+d)B_{2k+d}$  に置き換え, sin と cos を入れ代えれば良い. 計算の例や誤差評価の例は省略する.

### 5. 第 2 種 Mathieu 関数

第 2 種 Mathieu 関数のフーリエ係数を求めるには, (11)~(14) 式を (1) 式に代入し,

$$f''_{2n} + Q(2n, z) f_{2n} = -2ce'_{2n}(z, q) \tag{36}$$

$$f''_{2n+1} + Q(2n+1, z) f_{2n+1} = -2ce'_{2n+1}(z, q) \tag{37}$$

$$g''_{2n} + Q(2n, z) g_{2n} = 2se'_{2n}(z, q) \tag{38}$$

$$g''_{2n+1} + Q(2n+1, z) g_{2n+1} = 2se'_{2n+1}(z, q) \tag{39}$$

ただし  $Q(k, z) = \lambda_k - 2q \cos(2z)$

を導く. さらに (36) 式に (2), (15) 式を代入して係数に関する連立方程式を導く<sup>15)</sup>.

$$V_2 f_2 - f_4 = 4A_2/q$$

$$V_{2k} f_{2k} - \{f_{2k-2} + f_{2k+2}\} = 4kA_{2k}/q$$

$$k \geq 2 \tag{40}$$

同様に(37)式に(3), (16)式を代入して

$$\begin{aligned} (V_1+1)f_1-f_3 &= 2A_1/q \\ V_{2k+1}f_{2k+1}-\{f_{2k-1}+f_{2k+3}\} \\ &= 2(2k+1)A_{2k+1}/q, \quad k \geq 1 \end{aligned} \quad (41)$$

(38)式に(4), (17)式を代入して

$$\begin{aligned} V_0g_0-g_2 &= 0 \\ V_2g_2-(2g_0+g_4) &= -4B_2/q \\ V_{2k}g_{2k}-\{g_{2k-2}+g_{2k+2}\} &= -4k B_{2k}/q \\ k &\geq 2 \end{aligned} \quad (42)$$

(39)式に(5), (18)式を代入して

$$\begin{aligned} (V_1-1)g_1-g_3 &= -2B_1/q \\ V_{2k+1}g_{2k+1}-\{g_{2k-1}+g_{2k+3}\} \\ &= -2(2k+1)B_{2k+1}/q, \quad k \geq 1 \end{aligned} \quad (43)$$

これらは3項無限次元連立一次方程式である。この方程式を解くには、消去法で  $k=1 \sim n$  まで進み、2項式に変形する。一方、収束項  $k=M$  から、2つの値を仮定して、逆向きに  $k=n$  まで計算する。

この関係をわかりやすくするために、(40)式を例に取って説明する。(40)式を次のように書き換える。

$$\begin{aligned} V_2f_2 - f_4 &= c_2 \\ -f_2 + V_4f_4 - f_6 &= c_4 \\ -f_4 + V_6f_6 - f_8 &= c_6 \\ &\dots\dots \end{aligned} \quad (44)$$

ただし、 $c_{2k} = 4kA_{2k}/q$ ;  $V_k = (\lambda_n - k^2)/q$

ここで、2項式を作るために最初の式の両辺を  $V_2$  で割り、2番目の式を加えて  $f_2$  を消去すると

$$D_4f_4 - f_6 = C_4 \quad (45)$$

ここに、 $D_4 = V_4 - 1/D_2$ ;  $D_2 = V_2$

$$C_4 = c_4 + C_2/D_2; \quad C_2 = c_2$$

となる。同様に両辺を  $D_4$  で割り、3番目の式を加えて  $f_4$  を消去すると

$$D_6f_6 - f_8 = C_6 \quad (46)$$

ここに、 $D_6 = V_6 - 1/D_4$

$$C_6 = c_6 + C_4/D_4$$

となる。以下同様にして

$$\begin{aligned} D_{2n}f_{2n} - f_{2n+2} &= C_{2n} \\ \text{ここに、} D_{2n} &= V_{2n} - 1/D_{2n-2} \end{aligned} \quad (47)$$

$$C_{2n} = c_{2n} + C_{2n-2}/D_{2n-2}$$

となり、2項式ができる。次に逆向きに、 $k=M$  項から  $W_{2M}=1$ ;  $W_{2M+2}=0$  として出発して

$$\begin{aligned} W_{2k-2} &= V_{2k}W_{2k} - W_{2k+2} - C_{2k} \\ k &= M, M-1, \dots, n+1 \end{aligned} \quad (48)$$

から、 $W_{2k}$  を計算する。出発値を任意に選んだので、 $W_{2k}$  は仮の値である。第1種 Mathieu 関数のフーリ

エ展開係数  $A_{2k}$  を使って、正しくは、

$$f_{2k} = W_{2k} - \theta A_{2k}; \quad k = M, M-1, \dots, n \quad (49)$$

である。文献 1) の p. 154 を参照。ここに  $M$  は文献 14) のように決める。3項無限次元一次方程式の一般解は定数項を0と置いた独立な2つの解と特解の線型結合である。今の場合、 $k \rightarrow \infty$  としたとき、 $\infty$  となる方は捨てる。定数項を0と置いた解は  $A_{2k}$  であり、 $W_{2k}$  は特解である。したがって、(49)式のように解は表せる。(49)式を(47)式の  $f_{2n}$ ,  $f_{2n+2}$  に代入して  $\theta$  を求めれば

$$D_{2n}(W_{2n} - \theta A_{2n}) - (W_{2n+2} - \theta A_{2n+2}) = C_{2n} \quad (50)$$

から

$$\theta = \frac{D_{2n}W_{2n} - W_{2n+2} - C_{2n}}{D_{2n}A_{2n} - A_{2n+2}} \quad (51)$$

となる。この分母は桁落ちが激しいので、それを避けるために次のように計算する。

$$\begin{aligned} [\text{分母}] &= D_{2n}A_{2n} - A_{2n+2} \\ &= (V_{2n} - 1/D_{2n-2})A_{2n} - A_{2n+2} \\ &= V_{2n}A_{2n} - A_{2n+2} - A_{2n}/D_{2n-2} \\ &= A_{2n-2} - A_{2n}/D_{2n-2} \\ &= (D_{2n-2}A_{2n-2} - A_{2n})/D_{2n-2} \end{aligned} \quad (52)$$

カッコ内は次数の1つ低い同型である。したがって、

$$\begin{aligned} [\text{分母}] &= (D_2A_2 - A_4)/(D_2D_4 \dots D_{2n-2}) \\ &= (V_2A_2 - A_4)/(D_2D_4 \dots D_{2n-2}) \\ &= 2A_0/(D_2D_4 \dots D_{2n-2}) \end{aligned} \quad (53)$$

を得る。これで  $\theta$  が次のように決まる。

$$\theta = \frac{WD}{2A_0} \quad (54)$$

ただし  $W = D_{2n}W_{2n} - W_{2n+2} - C_{2n}$

$$D = D_2D_4 \dots D_{2n-2}$$

この  $\theta$  を(49)式に代入して、 $f_{2k}$ ;  $k = M, M-1, \dots, n+1$ ,  $n$  が決まる。さらに、2項式より後退代入して

$$f_{2k} = (C_{2k} + f_{2k+2})/D_{2k}; \quad k = n, \dots, 2, 1 \quad (55)$$

により  $f_{2k}$  が決まる。同じように、(16)~(18)式も決定できる。最後に(19)式で正規化する。その結果、定数  $C_{2n}$ ,  $C_{2n+1}$ ,  $S_{2n}$ ,  $S_{2n+1}$  も決定される。パラメータ  $q$  が極端に小さい場合を考えると、(1)式の微分方程式は三角関数の微分方程式になるから、第1種関数が  $\cos$  関数ならば、第2種関数は  $\sin$  になる。

4倍精度システムを使い、誤差を調べる。一例を示すと表6のようにになった。フーリエ展開の個々の係数が相対誤差で末尾1ビットないし数ビット程度の誤差である。

第2種 Mathieu 関数値の計算は、

表 6 第 2 種のフーリエ係数  $f_m, g_m$  およびその誤差  
Table 6 Fourier of coefficients  $f_m, g_m$  of the second kind and their errors.

n=10	q=5	NN=15	MM=23	NNQ=22	MMQ=24		
$C_n(q)$ の真値		$C_n(q)$ の誤差		$S_n(q)$ の真値		$S_n(q)$ の誤差	
2.81100119765191556102E-11		2.73736E-16		2.81100119765191599798E-11		6.59081E-16	
m	フーリエ係数の $f_m$	$f_m$ の誤差		フーリエ係数の $g_m$		$g_m$ の誤差	
0	0.000000000000000000E-00			1.67885419058255717740E-06		5.77656E-16	
2	3.34443200072163755074E-05	3.45946E-16		3.36195149090858972759E-05		5.08820E-16	
4	6.42976210638683773466E-04	1.89871E-16		6.42986672219631175407E-04		2.84254E-16	
6	1.07848064986437658032E-02	2.92789E-16		1.07848073226918019485E-02		1.07889E-16	
8	1.37675120480015259102E-01	1.82709E-16		1.37675120587320114615E-01		1.54165E-16	
10	9.83955640357131831989E-01	4.38392E-17		9.83955640317698674060E-01		1.21614E-16	
12	-1.12806779988370642567E-01	-2.27063E-17		-1.12806779985894638643E-01		2.37415E-16	
14	5.89296268274304263626E-03	-1.25780E-16		5.89296268267612580794E-03		4.34279E-17	
16	-1.89165706203842506029E-04	-2.56637E-17		-1.89165706203198303612E-04		2.78935E-16	
18	4.22640644728334080582E-06	1.36103E-16		4.22640644729657567879E-06		1.32121E-16	
20	-7.04851013203981657489E-08	4.41113E-16		-7.04851013210156536944E-08		2.66496E-16	
22	9.18202555389727901490E-10	3.34519E-16		9.18202555402346913746E-10		4.01845E-16	
24	-9.64842631932060992207E-12	5.73986E-16		-9.64842631949654712323E-12		3.81902E-16	
26	8.37773979614416403172E-14	6.17782E-16		8.37773979633129620779E-14		5.25063E-16	
28	-6.12549039440979906804E-16	7.00719E-16		-6.12549039456979562359E-16		6.65906E-16	
30	3.82916588211145445416E-18	5.57091E-16		3.82916588222493266901E-18		5.86186E-16	

$$F=C\{z F_1+F_2\} \tag{56}$$

ただし、 $C$  は定数； $F_1, F_2$  はフーリエ級数の形をしており、2つのフーリエ級数が主な計算で、Clenshaw の方法で計算すれば良い。誤差の検討は省略する。

第 2 種 Mathieu 関数の微分は

$$F'=C\{F_1+zF_1'+F_2'\} \tag{57}$$

の形となり、これを計算すれば良い。したがって、第 2 種 Mathieu 関数の微分値はフーリエ級数を 3 回計算すれば求められる。誤差の検討は省略する。

### 6. ま と め

パラメータ  $q$  が正の実数、 $z$  が実数の場合の第 1 種および第 2 種 Mathieu 関数の固有値、関数値、微分値の具体的な計算手続きを述べた。

計算時間は富士通(株)のパソコン FMR 60 (CPU=Intel の 386 SX; Clock=20 MH; FPU=なし) で、 $a_0 \sim a_{10}, b_1 \sim b_{10}, q=10(10)100$  に対して、固有値が約 34 秒；フーリエ係数の計算を加えて約 47 秒；さらに第 1 種 Mathieu 関数  $z=0(\pi/72)2\pi$  を加えて約 4 分 30 秒であった。

パラメータ  $q$  が純虚数の場合は変形 Mathieu 関数と呼ばれる。この計算法も得られているが、紙数の都合で割愛した。機会を見て発表したい。

パラメータ  $q$  が実数、変数  $z$  が複素数の場合は実数の Mathieu 関数と三角関数を複素数で計算し、組

み合わせて計算すれば良いと考えるが、まだ試みていない。

パラメータ  $q$  が複素数、変数  $z$  が複素数の場合は、固有値やフーリエ係数は計算可能になったが、まだ十分ではない。有理次数の Mathieu 関数の計算法は今後の課題であると考えている。

謝辞 本研究は日本大学工学部電気科鍛野秀三先生のお蔭である。心から感謝申し上げる。先生は本研究の動機を与えられ、いろいろな文献の提示を頂いた。名古屋大学名誉教授二宮市三先生はパソコンのための 4 倍精度システム(四則演算および基本関数を含む)を計算技術研究会に登録され、使用の便宜を与えられた。心から感謝申し上げる。また、本論が陽の目を見たのは、富士通(株)PP 事業部伊奈博君のお蔭である。ここに謝意を表する。

なお、本論文で開発した数値やプログラム等は計算技術研究会に登録し配付する予定である。計算技術研究会は名古屋大学大型計算機センターで収集された NUMPAC を基礎に計算技術を集大成する事を目指す研究会である。収集するのは主に計算プログラムであるが、広く計算問題を収集し、その解決技術が計算問題を抱える人々の役立つ事を念願している。研究会の会長は名古屋大学名誉教授の二宮市三先生である。関心のある方は下記まで連絡を下さい。

連絡先：〒101 東京都千代田区神田駿河台 1-8  
日本大学理工学部電気工学科 山下眞一郎



## 参 考 文 献

- 1) McLachlan, N. W.: *Theory and Application of Mathieu Functions*, Dover Publ., N.Y. (1964).
- 2) Abramowitz, M. and Stegun, I. A.: *Handbook of Mathematical Functions*, 20, pp. 722-750, Dover Publ., N.Y. (1965).
- 3) The Computation Laboratory of the NAML, NBS: *Tables Relating to Mathieu Functions Characteristic Values, Coefficients, and Joining Factors*, Columbia University Press, New York (1951).
- 4) Bickley, W.G. and McLachlan, N.M.: Mathieu Functions of Integral Order and Their Tabulation, *Math. Comp.*, Vol. 2, No. 1, pp. 1-11 (1946).
- 5) Clemm, S.D.: CACM of Algorithm 352, Characteristic Values and Associated Solutions of Mathieu's Differential Equation, *Communications of ACM*, Vol. 12, No. 7, pp. 399-407 (1969).
- 6) 日本数学会編: 数学辞典・第3版, pp. 1174-1176, 岩波 (1988).
- 7) 森口, 宇田川, 一松: 岩波数学公式集 III, pp. 241-248, 岩波 (1957).
- 8) 小谷正雄, 橋本英典: 特殊関数・岩波講座現代応用数学, 第7章, pp. 127-189, 岩波 (1958).
- 9) 寺沢寛一編, 小谷正雄著: 自然科学者のための数学概論・応用編, pp. 146-189, 岩波 (1960).
- 10) 秋山守男: 応用特殊関数入門, 第7章, pp. 103-120, 電気書院 (1976).
- 11) 島村 敏, 植木節子, 関口利男: Mathieu の微分方程式の固有値の計算法と Mathieu 関数の一つの展開公式, 信学会・電磁界理論研究資料, ETM-87-100 (1987).
- 12) 堀内和夫編, 三原義男著: 応用数理への道 (7章, 変数分離法による波動方程式の解法), pp. 234-279, コロナ社 (1989).
- 13) 山下: Mathieu 関数の固有値の計算について, 情報処理学会論文誌, Vol. 33, No. 11, pp. 1290-1295 (1992).
- 14) 山下: Bessel 関数と Mathieu 関数の逆向き漸化式について, 情報処理学会論文誌, Vol. 34, No. 2, pp. 191-195 (1993).
- 15) 山下: 第2種 Mathieu 関数  $f_m(x, q)/g_m(x, q)$  の計算について, 数値解析とそのアルゴリズム, 京大・数値解析研究所・講究録, No. 791, 1991. 11. 20-22.
- 16) Hildebrand, F. B.: *Introduction to Numerical Analysis*, 2nd, ed., pp. 28-31, pp. 340-344, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, N.Y. (1974).
- 17) Clenshaw, C. W.: A Note on the Summation of Chebyshev Series, *MTAC*, Vol. 9, pp. 118-120 (1955).

(平成5年4月27日受付)

(平成5年12月9日採録)



山下眞一郎 (正会員)

昭和12年宮崎県えびの市生。昭和31年鹿児島工業高等学校卒業。

昭和49年日本大学理学博士。昭和

32年8月有隣電機精機(株)(日本最

初の計算センタ)に入社。計算機の

保守および受託計算に従事。高次代数方程式・最良近

似などを研究。昭和38年FACOM 231 ALGOL コン

パイラ開発。昭和40年4月現富士通(株)に移籍。昭和

42年5月FACOM 230-60 FORTRAN コンパイラ

開発。昭和50年から科学計算ライブラリSSL 開発。

昭和48.5~53.4本学会誌編集委員。昭和53.5~56.4

本誌論文編集委員。昭和56.5~58.4本会数値解析研

究会幹事。平成4年4月日本大学理工学部教授に就

任。日本数学会, 日本応用数理学会各会員。