情報処理学会論文誌　Vol.56　No.6　1442–1450 (June 2015)

ダイバージェンスを最小にする議席配分方式について

一森 哲男[1,a)]

受付日 2014年5月21日, 採録日 2015年3月4日

概要：アメリカ合衆国憲法第 1 条は，人口に比例して議席を配分するように定めているが，一般に，人口に比例して議席を配分する問題は議員定数配分問題と呼ばれている．この問題の解決は大変難しく今日でも未解決のままとなっている．最近，この問題がダイバージェンスの最小化に深くかかわっていることが判明し，情報理論を用いて，問題の解決が図られている．本論文はその研究方向に沿うもので，ダイバージェンスを最小にするために必要な議席数を調べ，それが所与の議員定数に等しくなる配分方式を求めた．平均的な意味で，かつ，現実的な意味で，我々の目的にかなう配分方式が Webster 方式であることを明らかにした．

キーワード：議員定数配分問題，アルファ・ダイバージェンス，緩和除数方式

On Apportionment Methods Minimizing Divergences

Tetsuo Ichimori[1,a)]

Received: May 21, 2014, Accepted: March 4, 2015

Abstract: The apportionment problem is to allocate seats in a legislature, based proportionally on the population of electoral districts. This problem is still open today. Recently it has been discovered that minimization of divergences can determine the allocation of seats. However there are an infinite number of divergences. Since our ultimate objective is to find one and only one apportionment method, it is absolutely necessary for us to determine what divergence to minimize. If we can find an apportionment method that the total number of seats necessary to minimize a divergence is equal to the predetermined house size in the sense of average, then the method might be most desirable. The Webster method will be shown to be closest to it among the existing methods.

Keywords: apportionment, α-divergence, relaxed divisor method

1. はじめに

最近，情報理論の観点から，議員定数配分問題が議論されている [10], [13], [16]．議員定数配分問題とは人口に比例して議席を配分する問題で，アメリカ合衆国憲法第 1 条に規定されている．ただし，この問題はどの国にも存在する普遍的なもので，わが国では「一票の価値」として長く議論されている．ヨーロッパでよく使われている比例代表制における議席配分も，政党を州と読み替え，政党の得票数を州の人口と読み替えれば，同じ問題となる．議員定数配分問題は 200 年以上にわたり議論され続けてきたが，今日でも未解決のままとなっている．

この問題は一見単純なようであるが，実際に議席を配分しようとすると，さまざまな困難に出会う．たとえば，Alabama パラドックスなどは有名である．これは議員定数（事前に定められた議席の総数のこと）を増加させたとき，州に配分される議席数が減少する現象のことである．実際，1880 年度の国勢調査人口を基に議席を配分していると，議員定数を増加させたとき，Alabama 州に配分される議席が減少した．パイが大きくなったのに受け取る議席が減るのである．さらに奇妙な現象として，人口パラドックスも知られている．文献 [1] で紹介された例では，議員定数は固定されるとして，ある州の人口だけが増加すると，

1　大阪工業大学
Osaka Institute of Technology, Hirakata, Osaka 573–0196, Japan
a)　ichimori@is.oit.ac.jp

その州に配分される議席数が 1 減少する（その結果，別の州の議席が 1 増加する）．

最近，配分方式として緩和除数方式が提案され [9], [20]，さまざまな好ましい性質を持つことが判明している [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13], [14], [15], [16]．しかしながら，この方式は 1 つの配分方式ではなく，パラメータを 1 つ持つ無数の配分方式のクラスを表している．そのため，唯一の配分方式を見つけるためには，何らかの基準が必要である．

緩和除数方式の配分結果は，アルファ・ダイバージェンスの最小化により得られることが分かっている [13]．そのときの制約条件は (i) 各州に配分される議席数が非負の整数，(ii) 州全体に配分される議席の総和が議員定数に等しいことだけである．いま，このタイプ (i) の制約のみでアルファ・ダイバージェンスを最小にすると，州に配分される議席の総和は，必ずしも，議員定数に等しくなるとは限らない．緩和除数方式のパラメータを調整して，州全体に配分された議席の総和を議員定数に等しくすることができるならば，ある意味，好ましい配分方式を見つけたことになる．本論文ではこの点を詳しく議論する．

本論文の構成は以下のとおりである．2 章では，緩和除数方式を簡単に説明し，ダイバージェンスの最小化と配分方式の定める議席配分との関係を明らかにする．3 章ではダイバージェンスを最小にするために必要な議席数が議員定数に等しくなる配分方式について議論する．4 章では，さまざまな人口分布に対し，ダイバージェンスを最小にするために必要な議席数の平均値を求め，この平均値が議員定数に最も近づくパラメータの値について議論する．5 章では，幾何学的観点から議員定数配分問題を考察する．最後の 6 章では，緩和除数方式の中から唯一の配分方式を見つけるというテーマに関して，本論文と他の研究との関連性について述べる．

2. 緩和除数方式とダイバージェンス

この章では，緩和除数方式の定義と性質を簡単に述べ（詳細は文献 [9] やハンドブック [20] などに与えられている），緩和除数方式を Chernoff のアルファ・ダイバージェンス [2] の最小化問題として記述する．

最初に，議員定数配分問題の記号を説明する．$s \geq 2$ を州の数，$S = \{1, \ldots, s\}$ を州の集合，$h \geq 1$ を議員定数とする．各 $i \in S$ に対して，$p_i \geq 1$ を州 i の人口，$q_i > 0$ を州 i の取り分，すなわち，州 i の受け取るべき議席の理想値（実数値）$q_i = hp_i/\pi > 0$ のことである．ここで，$\pi = \sum_{i \in S} p_i$ は総人口である．$Q = (q_1, \ldots, q_s)$ を取り分の分布という．当然，これは $\sum_{i \in S} q_i = h$ を満たす．

次に，緩和除数方式を定義する．正の整数の集合を $\mathbb{Z}_+$，非負の整数の集合を $\mathbb{Z}_0$，実数の集合を $\mathbb{R}$ とする．パラメータ $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して，関数 $d_\alpha(k)$（$k \in \mathbb{Z}_0$）を以下のように定義する．$k \in \mathbb{Z}_+$ のとき，

$$d_\alpha(k) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mathrm{e}} \dfrac{(k+1)^{k+1}}{k^k}, & \alpha = 1 \\ \dfrac{1}{\log \frac{k+1}{k}}, & \alpha = 0 \\ \left(\dfrac{(k+1)^\alpha - k^\alpha}{\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha - 1}}, & \alpha \neq 1, 0 \end{cases} \tag{1}$$

とする．この関数 $d_\alpha(k)$ は正の整数 k と $k+1$ のパラメータ α の Stolarsky 平均といわれ，α に関して連続かつ狭義増加で，$k < d_\alpha(k) < k+1$ がなりたち，$\alpha \to -\infty$ のとき $d_\alpha(k) \to k$，および，$\alpha \to +\infty$ のとき $d_\alpha(k) \to k+1$ となる [21]．さらに，$k = 0$ のとき，

$$d_\alpha(0) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1} \approx 0.37, & \alpha = 1 \\ 0, & \alpha \leq 0 \\ \left(\dfrac{1}{\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha - 1}}, & \text{上記以外} \end{cases} \tag{2}$$

とする．このとき，$d_\alpha(0)$ は $\alpha > 0$ に関して連続かつ狭義増加で，$0 < d_\alpha(0) < 1$（$\alpha > 0$）がなりたち，$\alpha \to +\infty$ のとき $d_\alpha(0) \to 1$ となることが確認できる．**図 1** に関数 $d_\alpha(2)$（$-50 < \alpha < 50$）のグラフを与え，**図 2** に関数 $d_\alpha(0)$（$-4 < \alpha < 4$）のグラフを与える．

関数 $d_\alpha(k)$ は丸め関数と呼ばれ，これを利用する配分方式をパラメータ α を持つ緩和除数方式という．以下，これを RD(α) 方式と呼ぶ．

各 $i \in S$ に対して，$a_i \in \mathbb{Z}_0$ を州 i に配分される議席数とする．議員定数 h の配分 $A = (a_1, \ldots, a_s)$，すなわち，(i) $a_i \in \mathbb{Z}_0$（$i \in S$）および (ii) $\sum_{i \in S} a_i = h$ を満たす A は，不等式

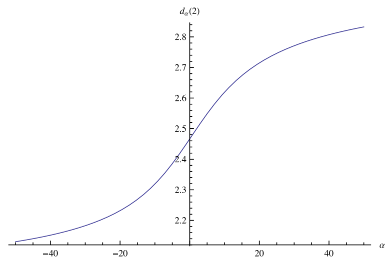

図 1 $d_\alpha(2)$（$-50 < \alpha < 50$）のグラフ
Fig. 1 Graph of the function $d_\alpha(2)$ $(-50 < \alpha < 50)$.

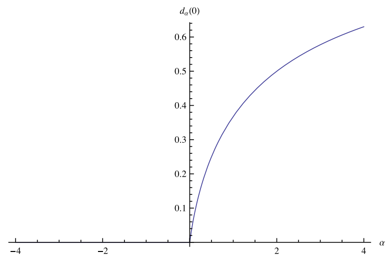

図 2 $d_\alpha(0)$（$-4 < \alpha < 4$）のグラフ
Fig. 2 Graph of the function $d_\alpha(0)$ $(-4 < \alpha < 4)$.

表 1 配分方式とダイバージェンスの対応
Table 1 Correspondence between methods and divergences.

α	配分方式	ダイバージェンス
-1	Hill 方式	Neymann のカイ二乗ダイバージェンス
0	TS 方式	逆 KL ダイバージェンス
1	Theil 方式	KL ダイバージェンス
2	Webster 方式	Pearson のカイ二乗ダイバージェンス

$$\max_{i\in S}\frac{d_\alpha(a_i-1)}{q_i}\le\min_{j\in S}\frac{d_\alpha(a_j)}{q_j}$$

を満たすならば，RD(α) 方式の定める議員定数 h の配分となる．逆に，RD(α) 方式の定める議員定数 h の配分はこの不等式を満たす [9]．ただし，$d_\alpha(-1)=0$（$\alpha\in\mathbb{R}$）と約束する．

次に，関数 $\psi_\alpha(x)$ $(x\ge 0)$ を定義する．$x>0$ に対して，

$$\psi_\alpha(x)=\begin{cases}x\log x-(x-1), & \alpha=1\\ -\log x+(x-1), & \alpha=0\\ \dfrac{x^\alpha-1}{\alpha(\alpha-1)}-\dfrac{x-1}{\alpha-1}, & \alpha\ne 1,0\end{cases}\tag{3}$$

とし，$x=0$ に対して，

$$\psi_\alpha(0)=\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha}, & \alpha>0\\ +\infty, & \alpha\le 0\end{cases}\tag{4}$$

とする．記述を簡単にするため，関数の値として $+\infty$ を許している．また，議論を簡単にするために，本論文では，関数 $\psi_\alpha(0)$ は $\alpha\in\mathbb{R}$ の拡張実数値関数であり，連続な減少関数と見なす．

このとき，A から Q へのアルファ・ダイバージェンスは

$$D_\alpha(A||Q)=\sum_{i\in S}q_i\psi_\alpha\left(\frac{a_i}{q_i}\right)\tag{5}$$

と定義される [3]．また，パラメータ α を持つ緩和除数方式の定める議員定数 h の配分は最適化問題 $\mathbf{P}_\alpha$：

$$\min D_\alpha(A||Q) \text{ s.t. (i) } a_i\in\mathbb{Z}_0(i\in S), \text{(ii) } \sum_{i\in S}a_i=h$$

の最適解 $A=(a_1,\ldots,a_s)$ として定まる [13]．ただし，s.t. は制約を意味する．

いくつかの特定の α の値に対するアルファ・ダイバージェンスおよび緩和除数方式は，特別な名前で呼ばれている．それを**表 1** に与える．Hill 方式は文献 [1], [5]，TS 方式は [6], [22]，Theil 方式は [6], [23]，Webster 方式は [1], [24] に述べられている．また，KL ダイバージェンスは [17]，Pearson のカイ二乗ダイバージェンスは [19]，その他のダイバージェンスは [3] に述べられている．

3. ダイバージェンス最小化に必要な議席数

議員定数配分問題では唯一の配分方式を選び出すことが求められている．緩和除数方式の中から唯一の方式を選び出すとは，パラメータ α の値を 1 つ選び出すことを意味する．

いま，最適化問題 $\mathbf{P}_\alpha$ からタイプ (ii) の制約を取り除いた緩和問題 $\mathbf{R}_\alpha$：

$$\min D_\alpha(A||Q) \quad \text{s.t. (i) } a_i\in\mathbb{Z}_0\ (i\in S)$$

を考え，その最適解を $a_i(\alpha)$（$i\in S$）と書く．定義式 (5) より，この目的関数は変数分離形をしており，各項の係数 q_i は正の定数なので，最適解 $a_i(\alpha)$ は関数 $\psi_\alpha(a_i/q_i)$ を最小にすることが分かる．さらに，関数 $\psi_\alpha(x)$ の定義式 (3) より，容易に，$\psi''_\alpha(x)>0$，$\psi_\alpha(1)=\psi'_\alpha(1)=0$ が確認できるので [3]，$\psi_\alpha(x)$ は狭義の凸関数で，$x=1$ のみで最小値 0 をとることが分かる．いいかえれば，関数 $\psi_\alpha(x/q_i)$ は $x=q_i$ で最小値 0 をとる．このことから，整数の範囲で関数 $\psi_\alpha(x/q_i)$ を最小化するならば，$a_i(\alpha)=\lfloor q_i\rfloor$ または $a_i(\alpha)=\lceil q_i\rceil$ となる．どちらになるかは関数値 $\psi_\alpha(\lfloor q_i\rfloor/q_i)$ と $\psi_\alpha(\lceil q_i\rceil/q_i)$ の小さい方で決まる．両者が同一値ならば，$a_i(\alpha)$ は $\lfloor q_i\rfloor$ でも $\lceil q_i\rceil$ でもどちらでもよい．現実の議席配分ではあり得ないが，q_i が整数ならば，$a_i(\alpha)=q_i$ となる．

次に，

$$H(\alpha)=\sum_{i\in S}a_i(\alpha)$$

を定義すると，これは，整数制約 (i) のもとでダイバージェンス $D_\alpha(A||Q)$ を最小にするために必要な議席数を表す．

補題 1 関数 $F(\alpha)=\psi_\alpha(x)$ $(\alpha\in\mathbb{R})$ を定義する．$x>1$ ならば，$F(\alpha)$ は増加関数であり，$0\le x<1$ ならば，$F(\alpha)$ は減少関数である

証明 定義式 (4) のところで述べたように，$x=0$ の場合，$F(\alpha)=\psi_\alpha(0)$ は減少関数である．よって，以下では，$x>0$ と仮定する．定義式 (3) より，$F(1)=x\log x-(x-1)$，$\lim_{\alpha\to1}F(\alpha)=\lim_{\alpha\to1}(x^\alpha-1)/(\alpha(\alpha-1))-(x-1)/(\alpha-1)=x\log x-(x-1)$，および，$F(0)=-\log x+(x-1)$，$\lim_{\alpha\to0}F(\alpha)=\lim_{\alpha\to0}(x^\alpha-1)/(\alpha(\alpha-1))-(x-1)/(\alpha-1)=-\log x+(x-1)$ に注意すると，$\alpha=1,0$ も含め，関数 $F(\alpha)$ は連続であることが分かる．また，$F(\alpha)$ は凸関数となること [18]，および，$F(\alpha)\ge0$（すでに，$\psi_\alpha(x)\ge0$ は述べた）に注意する．このとき，$x>1$ ならば，式 (3) より $F(\alpha)\to+0$ $(\alpha\to-\infty)$ かつ $F(\alpha)\to+\infty$ $(\alpha\to+\infty)$ となり，$F(\alpha)$ は増加関数であることが分かる．同様に，$0<x<1$ ならば，式 (3), (4) より $F(\alpha)\to+\infty$ $(\alpha\to-\infty)$ かつ $F(\alpha)\to+0$ $(\alpha\to+\infty)$ となり，$F(\alpha)$ は減少関数であることが分かる． □

定理 1 $H(\alpha)$ は減少階段関数である．

証明 すべての取り分 q_i が整数ならば，$a_i(\alpha)=q_i$ となる．よって，$H(\alpha)=\sum_{i\in S}q_i=h$ となり，関数 $H(\alpha)$ はつねに一定値 h をとる．そこで，以下の議論では，整数で

ない取り分を持つ州が存在すると仮定する．その州を i とする．

このとき，$0 \leq \lfloor q_i \rfloor / q_i < 1$ なので，補題 1 より，$\psi_\alpha(\lfloor q_i \rfloor / q_i)$ の値は α に関して減少となる．また，$\lceil q_i \rceil / q_i > 1$ なので，補題 1 より，$\psi_\alpha(\lceil q_i \rceil / q_i)$ の値は α に関して増加となる．

$a_i(\alpha)$ の値が $\lfloor q_i \rfloor$ になるか，$\lceil q_i \rceil$ になるかは，$\psi_\alpha(\lfloor q_i \rfloor / q_i)$ と $\psi_\alpha(\lceil q_i \rceil / q_i)$ の大小関係で定まるので，α が増加するとき，$a_i(\alpha)$ の値は $\lceil q_i \rceil$ から $\lfloor q_i \rfloor$ には変化するが，けっして，その逆は生じない．このことから，関数 $H(\alpha)$ は減少関数となる．さらに，$H(\alpha)$ の値は整数なので，この関数は減少する階段関数となる． □

定理 2 $H(\alpha) = h$ を満たす α は存在する．

証明 取り分がすべて整数値の場合は自明なので，以下，ある q_i は整数でないと仮定する．このとき，$\lfloor q_i \rfloor \neq \lceil q_i \rceil$ なので，

$$\psi_\alpha(\lfloor q_i \rfloor / q_i) = \psi_\alpha(\lceil q_i \rceil / q_i) \tag{6}$$

を満たす α の値（α_i と書く）のところで $H(\alpha)$ は不連続となる．

次に，極限：$\lim_{\alpha \to -\infty} H(\alpha)$ と $\lim_{\alpha \to +\infty} H(\alpha)$ を考える．$\lfloor q_i \rfloor = 0$ の場合は定義式 (4) より，また，$\lfloor q_i \rfloor \geq 1$ の場合は補題 1 の証明で述べたことから，$\alpha \to -\infty$ のとき，$\psi_\alpha(\lceil q_i \rceil / q_i) \to +0$，$\psi_\alpha(\lfloor q_i \rfloor / q_i) \to +\infty$ となるので，両者の大小関係より，明らかに，$\alpha \to -\infty$ のとき $a_i(\alpha) \to \lceil q_i \rceil$ となる．また，$\alpha \to +\infty$ のとき，$\psi_\alpha(\lfloor q_i \rfloor / q_i) \to +0$ となり，$\psi_\alpha(\lceil q_i \rceil / q_i) \to +\infty$ となることから，このとき，$a_i(\alpha) \to \lfloor q_i \rfloor$ となる．以上のことから，$\lim_{\alpha \to -\infty} H(\alpha) = \sum_{k \in S} \lceil q_k \rceil > h$ および $\lim_{\alpha \to +\infty} H(\alpha) = \sum_{k \in S} \lfloor q_k \rfloor < h$ の関係が得られる．

もし，$k \geq 2$ 個の不連続点が同一値をとれば，この点における関数 $H(\alpha)$ の跳躍は $-k$ となる．だから，方程式 $H(\alpha) = h$ に関して 2 つの場合が考えられる．すなわち，(a) 2 つの異なる不連続点 α_m, α_n $(m, n \in S)$ が存在して，$H(\alpha) = h$ を満たす $\alpha \in (\alpha_m, \alpha_n)$ が存在する．(b) 十分小さな $\varepsilon > 0$ に対して，$H(\alpha - \varepsilon) > h$ かつ $H(\alpha + \varepsilon) < h$ となる α が存在する．

ケース (b) の場合，この α の値で，等式 (6) が成り立つので，$a_i(\alpha) = \lfloor q_i \rfloor$ または $a_i(\alpha) = \lceil q_i \rceil$ という自由度が生まれる．よって，$a_i(\alpha)$ の値をうまく選択すれば，この α の値で $H(\alpha) = h$ と定義することができる． □

ここで簡単な数値例を考えてみる．州の数を $s = 4$，議員定数を $h = 4$ とし，州の取り分を $q_1 = q_2 = 0.66874$，$q_3 = 1.03126$，$q_4 = 1.63126$ とする．方程式 (6) を解くことにより（以下の定理 3 を利用すると計算が容易となる），$\alpha_1 = \alpha_2 = 5$，$\alpha_3 = -164.848$，$\alpha_4 = 7.53528$ となり，不連続点を除けば，階段関数 $H(\alpha)$ は

$$H(\alpha) = \begin{cases} 6, & \alpha < -164.848 \\ 5, & -164.848 < \alpha < 5 \\ 3, & 5 < \alpha < 7.53528 \\ 2, & \alpha > 7.53528 \end{cases}$$

と定まる．十分小さな $\varepsilon > 0$ に対して，$\alpha = 5 - \varepsilon$ では $H(\alpha) = 5$，すなわち，$a_1(\alpha) = a_2(\alpha) = a_3(\alpha) = 1$，$a_4(\alpha) = 2$ となり，$\alpha = 5 + \varepsilon$ では $H(\alpha) = 3$，すなわち，$a_1(\alpha) = a_2(\alpha) = 0$，$a_3(\alpha) = 1$，$a_4(\alpha) = 2$ となる．一方，$\alpha = 5$ では $a_1(\alpha) = 0$，$a_2(\alpha) = a_3(\alpha) = 1$，$a_4(\alpha) = 2$ または $a_1(\alpha) = 1$，$a_2(\alpha) = 0$，$a_3(\alpha) = 1$，$a_4(\alpha) = 2$ とすれば，$H(5) = 4$ と定義することができる．よって，$H(\alpha) = 4$ は唯一の解 $\alpha = 5$ を持つ．

いま，$\alpha = \alpha^*$ が方程式 $H(\alpha) = h$ を満たすとする．議員定数配分問題ではタイプ (ii) の制約 $\sum_{i \in S} a_i = h$ を満たさなければならないので，パラメータ α を α^* に設定することは妥当なことかもしれない．しかしながら，つねに α^* が同一値（定数）とは限らない．定理 2 の証明のケース (a) の場合では α^* はある区間内の任意の値をとり，唯一の値としては定まらない．また，定理 2 の証明のケース (b) の場合は α^* は唯一の値として定まるが，この値は取り分 q_i $(i \in s)$ の値により定まる（式 (6) および定理 3 を参照）．ある特定の取り分に対して配分方式の性質を議論することは好ましくない．そこで，次の章では，あらゆる取り分に対する階段関数 $H(\alpha)$ を考え，これの平均 $\bar{H}(\alpha)$ を求め，$\bar{H}(\alpha) = h$ となる α の値を求める．

4. 最小化に必要な平均議席数

s 次元空間 $\mathbb{R}^s$ 内の $s-1$ 次元単体：

$$T = \left\{ (x_1, \ldots, x_s) \,\middle|\, \sum_{i \in S} x_i = h,\ x_i \geq 0\ (i \in S) \right\} \tag{7}$$

を考える．点 $\mathrm{Q} = (q_1, \ldots, q_s)$ が単体 T の内部 $\mathrm{int}(T)$ 全体にわたるとき，$a_i(\alpha)$ の平均を $\bar{a}_i(\alpha)$ とする．このとき，$H(\alpha)$ の平均 $\bar{H}(\alpha)$ は

$$\bar{H}(\alpha) = \sum_{i \in S} \bar{a}_i(\alpha)$$

となる．州 i と j を入れ替えても，単体 T は不変であり，緩和問題 $\mathbf{R}_\alpha$ が $i < j$ に関して対称である，すなわち，取り分の分布 $Q = (q_1, \ldots, q_i, \ldots, q_j, \ldots, q_s)$ を，q_i と q_j を交換した $(q_1, \ldots, q_j, \ldots, q_i, \ldots, q_s)$ に置き換えたとき，同様に交換した配分 $(a_1(\alpha), \ldots, a_j(\alpha), \ldots, a_i(\alpha), \ldots, a_s(\alpha))$ が問題 $\mathbf{R}_\alpha$ の最適解となる．このことから，$\bar{a}_i(\alpha) = \bar{a}_j(\alpha)$ が成り立ち（以下の式 (9) を参照），

$$\bar{H}(\alpha) = s \cdot \bar{a}_1(\alpha) \tag{8}$$

の関係が得られる．

次に，$\bar{a}_1(\alpha)$ を求める．いま，単体 T を超平面：$x_s=0$，すなわち，部分空間 $\mathbb{R}^{s-1}$ 上に直交射影すると，次の $s-1$ 次元単体：

$$C=\left\{(x_1,\dots,x_{s-1})\,\middle|\,\sum_{i=1}^{s-1}x_i\le h,\ x_i\ge 0\ (1\le i\le s-1)\right\}$$

が得られる．点 $(q_1,\dots,q_s)\in\mathrm{int}(T)$ は点 $(q_1,\dots,q_{s-1})\in\mathrm{int}(C)$ に 1 対 1 に対応するので，$\bar{a}_1(\alpha)$ は

$$\bar{a}_1(\alpha)=\frac{\int\cdots\int_C a_1(\alpha)\,dx_1\dots dx_{s-1}}{\int\cdots\int_C dx_1\dots dx_{s-1}} \tag{9}$$

と表現できる．式 (9) の分母の積分は $s-1$ 次元の単体 C の体積を求めているので，

$$\text{式 (9) の分母}=\frac{h^{s-1}}{(s-1)!} \tag{10}$$

となる．一方，式 (9) の分子の変数 x_2 から x_{s-1} に関する積分の値は，$0<x_1<h$ のとき，$s-2$ 次元の単体

$$\left\{(x_2,\dots,x_{s-1})\,\middle|\,\sum_{i=2}^{s-1}x_i\le h-x_1,\ x_i\ge 0\ (2\le i\le s-1)\right\}$$

の体積 $(h-x_1)^{s-2}/(s-2)!$ に等しいので，

$$\text{式 (9) の分子}=\frac{1}{(s-2)!}\int_0^h (h-x)^{s-2}a(\alpha)\,dx \tag{11}$$

となる．ここでは，x_1 を x と書き直し，$a_1(\alpha)$ を $a(\alpha)$ と簡略化している．

定理 3 $\psi_\alpha(\lfloor q_i\rfloor/q_i)$ と $\psi_\alpha(\lceil q_i\rceil/q_i)$ の大小関係は q_i と $d_\alpha(\lfloor q_i\rfloor)$ の大小関係に一致する．ただし，q_i は整数ではないとする．

証明 証明は $\alpha>1$，$\alpha=1$，$0<\alpha<1$，$\alpha=0$，$\alpha<0$ の 5 つの場合に分けて行う．ただし，ほぼ同じ内容の証明なので，最初の $\alpha>1$ の場合だけの証明を示す．いま，(a) $q_i>1$ と仮定する．q_i は整数ではないので，$\lfloor q_i\rfloor\ne\lceil q_i\rceil$ となる．定義式 (3) より，大小関係

$$\psi_\alpha\left(\frac{\lfloor q_i\rfloor}{q_i}\right)\lesseqqgtr\psi_\alpha\left(\frac{\lceil q_i\rceil}{q_i}\right)$$

は大小関係

$$\frac{\left(\frac{\lfloor q_i\rfloor}{q_i}\right)^\alpha-1}{\alpha(\alpha-1)}-\frac{\frac{\lfloor q_i\rfloor}{q_i}-1}{\alpha-1}\lesseqqgtr\frac{\left(\frac{\lceil q_i\rceil}{q_i}\right)^\alpha-1}{\alpha(\alpha-1)}-\frac{\frac{\lceil q_i\rceil}{q_i}-1}{\alpha-1}$$

に一致し，さらに，

$$\frac{\left(\frac{\lfloor q_i\rfloor}{q_i}\right)^\alpha}{\alpha(\alpha-1)}-\frac{\frac{\lfloor q_i\rfloor}{q_i}}{\alpha-1}\lesseqqgtr\frac{\left(\frac{\lceil q_i\rceil}{q_i}\right)^\alpha}{\alpha(\alpha-1)}-\frac{\frac{\lceil q_i\rceil}{q_i}}{\alpha-1}$$

に一致する．両辺に $\alpha-1>0$ を掛け，さらに，$q_i^\alpha>0$ を乗じると

$$\frac{\lfloor q_i\rfloor^\alpha}{\alpha}-\lfloor q_i\rfloor q_i^{\alpha-1}\lesseqqgtr\frac{\lceil q_i\rceil^\alpha}{\alpha}-\lceil q_i\rceil q_i^{\alpha-1}$$

となるが，$\lceil q_i\rceil-\lfloor q_i\rfloor=1$ なので，

$$q_i^{\alpha-1}\lesseqqgtr\frac{\lceil q_i\rceil^\alpha-\lfloor q_i\rfloor^\alpha}{\alpha}$$

と変形できる．いま，$\alpha-1>0$ なので，関数 $y=x^{\alpha-1}$ $(x>0)$ は狭義増加関数となる．よって，上記の大小関係は

$$q_i\lesseqqgtr\left(\frac{\lceil q_i\rceil^\alpha-\lfloor q_i\rfloor^\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \tag{12}$$

の大小関係に一致する．右辺は丸め関数の定義式 (1) より $d_\alpha(\lfloor q_i\rfloor)$ に等しい．

(b) 次に，$0<q_i<1$ の場合を考える．式 (4) に関して，$\psi_\alpha(0)=\lim_{x\to+0}\psi_\alpha(x)$ であることに注意すれば，上記の大小関係を表す式すべてに，$\lfloor q_i\rfloor=0$ および $\lceil q_i\rceil=1$ を代入しても大小関係は変わらない．よって，式 (12) の大小関係は

$$q_i\lesseqqgtr\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

と書き換えられる．右辺は丸め関数の定義式 (2) より $d_\alpha(0)$ に等しい．よって，$\alpha>1$ の場合の証明を終える． □

定理 4 $d_\alpha(k-1)<q_i<d_\alpha(k)$ となる $k\in\mathbb{Z}_0$ が存在すれば $a_i(\alpha)=k$ となる．

証明 q_i が整数 k に等しければ，$a_i(\alpha)=q_i=k$ がなりたつので，以下では，q_i は整数ではないと仮定する．(a) $k<q_i<d_\alpha(k)$ の場合を考える．このとき，明らかに，$k=\lfloor q_i\rfloor$ となる．よって，$q_i<d_\alpha(\lfloor q_i\rfloor)$ となり，定理 3 より，$\psi_\alpha(\lfloor q_i\rfloor/q_i)<\psi_\alpha(\lceil q_i\rceil/q_i)$ となる．このことから $a_i(\alpha)=\lfloor q_i\rfloor=k$ となる．(b) $d_\alpha(k-1)<q_i<k$ の場合を考える．このとき，$k=\lceil q_i\rceil=\lfloor q_i\rfloor+1$ となる．よって，$q_i>d_\alpha(k-1)=d_\alpha(\lfloor q_i\rfloor)$ となる．定理 3 より，$\psi_\alpha(\lfloor q_i\rfloor/q_i)>\psi_\alpha(\lceil q_i\rceil/q_i)$ となる．このことから $a_i(\alpha)=\lceil q_i\rceil=k$ となる． □

次に，積分区間 $[0,h]$ を次のように分割する．

$$0\le d_\alpha(0)<d_\alpha(1)<\cdots<d_\alpha(h-1)\le h,.$$

定理 4 より，$d_\alpha(k-1)<q_i<d_\alpha(k)$ ならば $a_i(\alpha)=k$ なので式 (11) に含まれる積分

$$\int_0^h (h-x)^{s-2}a(\alpha)\,dx \tag{13}$$

は

$$\sum_{k=1}^{h-1}\int_{d_\alpha(k-1)}^{d_\alpha(k)}k(h-x)^{s-2}\,dx+\int_{d_\alpha(h-1)}^{h}h(h-x)^{s-2}dx$$

と書き直せる．積分計算を行い，式を整理すると（付録参照）

$$\int_0^h (h-x)^{s-2}a(\alpha)\,dx=\frac{1}{s-1}\sum_{k=0}^{h-1}(h-d_\alpha(k))^{s-1} \tag{14}$$

が得られる．式 (8)，(9)，(10)，(11)，(14) より，

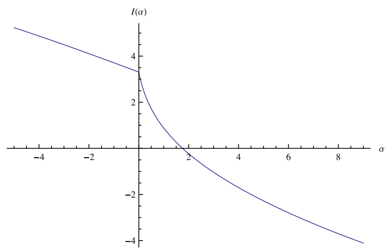

図 3　$s = 50$，$h = 435$ のときの $I(\alpha)$（$-5 < \alpha < 9$）
Fig. 3　$I(\alpha)$ $(-5 < \alpha < 9)$ for $s = 50$, $h = 435$.

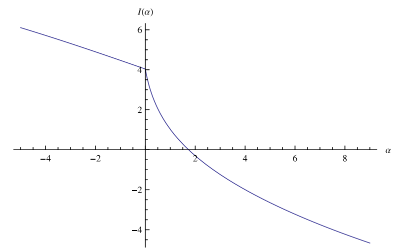

図 4　$s = 47$，$h = 300$ のときの $I(\alpha)$（$-5 < \alpha < 9$）
Fig. 4　$I(\alpha)$ $(-5 < \alpha < 9)$ for $s = 47$, $h = 300$.

$$\bar{H}(\alpha) = \frac{s}{h^{s-1}} \sum_{k=0}^{h-1} (h - d_\alpha(k))^{s-1} \tag{15}$$

が導かれる．

定理 5　α の方程式 $\bar{H}(\alpha) = h$ は唯一の解を持つ．

証明　$\bar{H}(\alpha)$ は単体 C にわたる $H(\alpha)$ の平均であるので，$\lim_{\alpha\to-\infty} \bar{H}(\alpha) > h$ と $\lim_{\alpha\to+\infty} \bar{H}(\alpha) < h$ が成り立つ．また，式 (15) の右辺に含まれる丸め関数 $d_\alpha(k)$ が α に関して連続で狭義増加である．さらに，州の数は $s \geq 2$ と仮定していたので，$y = x^{s-1}$ $(x > 0)$ は狭義増加関数となる．これらのことから，$\bar{H}(\alpha)$ が連続で狭義減少であることが分かる．よって，$\bar{H}(\alpha) = h$ を満たす唯一の解が存在する．
□

定理 5 の唯一の解を，再び，α^* と書くとき，パラメータ α^* を持つ緩和除数方式は，定理 5 の方程式が唯一の解を持つという意味で唯一の配分方式である．

現在のアメリカ合衆国では，州の数 $s = 50$ および連邦下院議員定数 $h = 435$ であり，わが国の衆議院議員の小選挙区制では都道府県数 $s = 47$，議員定数 $h = 300$（いわゆる「0 増 5 減」の結果，次回の選挙からは $h = 295$ に変更予定）となっている．いま，

$$I(\alpha) = \bar{H}(\alpha) - h$$

を定義して，両者に対する $I(\alpha)$ のグラフを**図 3** と**図 4** にそれぞれ示す．前者では $\alpha^* = 1.75$，後者では $\alpha^* = 1.73$ となっている．今度の α^* は取り分には依存しないが，州の数 s と議員定数 h に依存していることは式 (15) から読み取れる．この事実は，唯一の α の選択を難しくしているが，さまざまな s と h の値に対して，α^* の値はあまり変化しない．

アメリカでは 1790 年から 10 年ごとに連邦下院議員が配分（再配分）されているので，1790 年から 10 年ごとの州の数と議員定数に対して，α^* を調べてみた．結果を**表 2** に示すが，ここでは，$1.74 \leq \alpha^* \leq 1.77$ となっている．また，比例代表制を念頭に，小さな s と h の値に対しても α^* を調べてみた（**表 3**）．この例では $1.54 \leq \alpha^* \leq 1.81$ となっている．

さらに多くの s と h の値に対して調べてみたが，おおよそ $1.5 < \alpha^* < 2$ となっていた．唯一の α の値で，さまざまな s と h の値に対処しなければならないことを考えれば，α の値をこのあたりに選べは，平均的に $H(\alpha)$ の値が h に近づくと期待できる．さらに，既存の配分方式の中から選択するとすれば，いいかえれば，α の値を整数値に限定するならば，α の値は 2 に選ぶのが良さそうである．すなわち，Webster 方式を選ぶのが良さそうである．

表 2　州の数と議員定数に対する α^* の値
Table 2　Values of α^* for State numbers and House sizes.

年度	(s,h)	α^*
1790	$(15,105)$	1.74
1800	$(16,141)$	1.76
1810	$(17,181)$	1.77
1820	$(24,213)$	1.76
1830	$(24,240)$	1.76
1840	$(26,223)$	1.75
1850	$(31,234)$	1.75
1860	$(34,241)$	1.74
1870	$(37,292)$	1.75
1880	$(38,325)$	1.75
1890	$(44,356)$	1.75
1900	$(45,386)$	1.75
1910	$(46,433)$	1.76
1920–1950	$(48,435)$	1.76
1960–2010	$(50,435)$	1.75

表 3　いくつかの s と h に対する α^* の値
Table 3　Values of α^* for several s's and h's.

s	$h = 10$	$h = 20$	$h = 30$	$h = 40$	$h = 50$
3	1.73	1.77	1.79	1.80	1.81
4	1.69	1.75	1.77	1.78	1.79
5	1.66	1.72	1.75	1.77	1.78
6	1.63	1.70	1.73	1.75	1.77
7	1.60	1.68	1.72	1.74	1.75
8	1.57	1.67	1.71	1.73	1.74
9	1.54	1.65	1.69	1.72	1.73

現実的な観点から，この結論の妥当性を調べるために，アメリカで議員定数 h が 435 に法律で固定された 1920 年度から 2010 年度の 10 回の国勢調査人口に基づき，5 つの配分方式（Hill 方式，TS 方式，Theil 方式，Webster 方式，“1/3” 方式）に対して，それぞれ，$H(\alpha)$ の値が h に近いかどうかを調べた．パラメータ $\alpha = 3$ を持つ “1/3” 方式

表 4 各配分方式に対する $H(\alpha)$ の値
Table 4 Ten Values of $H(\alpha)$ for $-1 \leq \alpha \leq 3$.

パラメータ 配分方式	$\alpha=-1$ Hill	$\alpha=0$ TS	$\alpha=1$ Theil	$\alpha=2$ Webster	$\alpha=3$ "1/3"
2010 年度	434	434	434	433	432
2000 年度	433	433	433	433	433
1990 年度	438	438	438	438	438
1980 年度	439	439	438	438	436
1970 年度	437	436	436	434	433
1960 年度	439	439	439	438	438
1950 年度	439	438	438	437	437
1940 年度	434	434	433	433	433
1930 年度	435	433	432	432	432
1920 年度	438	438	435	434	434
平均	436.6	436.2	435.6	435.0	434.6

表 5 各配分方式に対する $H(\alpha)$ の平均値
Table 5 Means of $H(\alpha)$ for $-1 \leq \alpha \leq 3$.

パラメータ 配分方式	$\alpha=-1$ Hill	$\alpha=0$ TS	$\alpha=1$ Theil	$\alpha=2$ Webster	$\alpha=3$ "1/3"
2010 年度	437.93	437.49	435.85	435.07	434.71
2000 年度	437.94	437.49	435.86	435.07	434.70
1990 年度	437.96	437.49	435.86	435.07	434.68
1980 年度	437.71	437.26	435.80	435.07	434.69
1970 年度	437.78	437.54	435.87	435.06	434.70
1960 年度	437.56	437.08	435.77	435.07	434.66
1950 年度	437.14	436.73	435.66	434.86	434.50
1940 年度	437.16	436.74	435.45	434.86	434.51
1930 年度	437.59	437.19	435.54	434.86	434.52
1920 年度	437.08	436.69	435.52	434.86	434.54
平均	437.59	437.17	435.72	434.98	434.62

は文献 [6] で提案されている．各配分方式に対する 10 個の $H(\alpha)$ の値の平均値をそれぞれ，**表 4** の最後の行に示す．この結果より，もし，この 100 年間，Webster 方式を使い続けていれば，平均的に $H(\alpha)$ は 435 議席に等しくなっていたはずである．

現実のデータということで，表 4 の結果に意義があるとはいえ，データ数が 10 では，いささか不十分である．そこで，現実の人口の値を各々少し増減し，より多くの現実的なデータに対して同様の計算を行ってみる．州 $i \in S$ の人口を確率変数 P_i とし，P_i は適当な区間 $[L_i, U_i]$ 上の離散型の一様分布に従うと仮定する．ただし，P_i のとりうる値の最小値 L_i と最大値 U_i は各年度の州人口に依存するが，その具体的な決め方はここでは省略する．詳しくは文献 [1], [6] で述べられている．一様乱数を発生させることにより，各年度と各配分方式に対し 10 万組の取り分の分布 $Q=(q_1,\ldots,q_s)$ を作成し，そこから $H(\alpha)$ ($\alpha \in \{-1,0,1,2,3\}$) の平均値を求めた．結果を**表 5** に示す．この表の数値結果から，現実的な人口分布に Webster 方式を使用すれば，$H(\alpha)$ の平均値は 434.98 議席になる．

5. 幾何学的解釈

ここで，これまでの議論の一部を幾何学的に解釈してみる．A と Q を，それぞれ，s 次元空間 $\mathbb{R}^s$ 内の点とする．また，点 A と Q の位置ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{q}$ とする．A は非負の整数格子点上を，すなわち，$\mathbb{Z}_0{}^s$ 上を変動する点とする．だから，A は議員定数を定めない配分に対応する．Q は取り分の分布に対応する固定点（理想点）とする．ベクトル $\boldsymbol{a}$ の ℓ_1 ノルムは h とは限らないが，ベクトル $\boldsymbol{q}$ の ℓ_1 ノルムは h に等しい．

文献 [3] によれば，分布 $X=(x_1,\ldots,x_s)$，$Y=(y_1,\ldots,y_s)$ に対するダイバージェンス $D_\alpha(X||Y)$ は 2 点 $\mathrm{X}=(x_1,\ldots,x_s)$，$\mathrm{Y}=(y_1,\ldots,y_s)$ 間の準距離を表す．だから，ダイバージェンス $D_\alpha(X||Y)$ の最小化はこの 2 点間の準距離の最小化に等しい．このとき，点 X を Y に最接近させるという．

この解釈を用いると，議員定数配分問題は，つまり，最適化問題 $\mathbf{P}_\alpha$ は (i) 点 A を非負整数格子点上に限定し，さらに，(ii) ベクトル $\boldsymbol{a}$ の ℓ_1 ノルムは h に等しいという条件のもとで，点 A を理想点 Q に最接近させることを意味する．一方，緩和問題 $\mathbf{R}_\alpha$ では，条件 (ii) を緩和し，(i) 点 A を非負整数格子点上に限定しながら理想点 Q に最接近させる．このとき，ベクトル $\boldsymbol{a}$ の ℓ_1 ノルムは必ずしも h とは限らない．定理 2 は，点 A を Q に最接近させたとき，ベクトル $\boldsymbol{a}$ の ℓ_1 ノルムが h となる α が存在することを述べている．つまり，そのような値に α を設定した最適化問題 $\mathbf{P}_\alpha$ はタイプ (ii) の制約を完全に緩めても，最適解として議員定数 h の配分を保証する．

6. おわりに

本論文では，緩和除数方式の中から配分方式を 1 つ選び出すテーマを議論した．ダイバージェンスを最小にするために必要な議席数 $H(\alpha)$ というものを考案し，さまざまな取り分の分布に対して，平均的な意味で，$H(\alpha)$ が議員定数 h に最も近づく α の値について議論した．

このテーマを扱っている研究は他にもある．文献 [6] と文献 [8] では，それぞれ，パラメータ $\alpha \in \{-1,0,1,2,3\}$ を持つ緩和除数方式を対象に，不等式 $|a_i - q_i| < 1$ および $|a_i - q_i| \leq 1/2$ に違反する数を調べている．この数が最小ならば，a_i ($i \in S$) が q_i ($i \in S$) に一番近づくと解釈し，その結果，Webster 方式を選び出している．

文献 [9], [15] では，$q_i < q_j$ となるペア i, j に対して，人口の少ない方の州 i が有利となる，すなわち，$a_i/q_i > a_j/q_j$ となるペアの数と，人口の多い方の州 j が有利となるペアの数の比率を考えている．パラメータ $\alpha \in \{-1,0,1,2,3\}$ を持つ緩和除数方式の中から割合が 0.5 に最も近いということで，Webster 方式を選び出している [9]．しかしながら，文献 [15] では，仮定するモデルの違いにより，Webster

方式と $\alpha=1$ を持つ Theil 方式を選び出している．

これらの評価基準は以前から使用されており [1], [4]，文献 [6], [8], [9], [15] はそれらを緩和除数方式に適用している．一方，本論文の評価基準はまったく新しいものである．得られた結果はこれらの結果にほぼ一致し，唯一の配分方式として Webster 方式を選んでいる．このことから，ここでの評価基準の妥当性は，ある程度，保証されていると思われる．

アメリカでは 20 世紀の前半，数十年間にわたり，Hill 方式と Webster 方式の支持者間で，議会や学会を巻き込んだ大論争があった [1]．下院議長の要請により，2 回，両者の判定が行われ，最終的には Hill 方式の圧勝で終わった．ただ，この論争は現在も続いており，1990 年代には最高裁で争われた．このときは，両者の優劣は明らかにされなかった [4]．情報理論の観点から，文献 [16] では，その決着のつかない理由が述べられている．一方，本論文を含め最近の研究 [6], [8], [9], [15] では，Hill 方式より Webster 方式が支持されているが，これだけでは明確な結論は出せない．議員定数配分問題を解決するには，今後，さらなる研究が必要と思われる．

参考文献

[1] Balinski, M.L. and Young, H.P.: *Fair Representation*, Yale University Press (1982). 越山　康，一森哲男（訳），公正な代表制，千倉書房 (1987). 2nd ed., Brookings Institution Press (2001).

[2] Chernoff, H.: A Measure of Asymptotic Efficiency for Tests of a Hypothesis Based on a Sum of Observations, *Annals of Mathematical Statistics*, Vol.23, No.4, pp.493–507 (1952).

[3] Cichocki, A. and Amari, S.: Families of Alpha- Beta- and Gamma-Divergences: Flexible and Robust Measures of Similarities, *Entropy*, Vol.12, pp.1532–1568 (2010).

[4] Ernst, L.R.: Apportionment Methods for the House of Representatives and the Court Challenges, *Management Science*, Vol.40, No.10, pp.1207–1227 (1994).

[5] Huntington, E.V.: The Apportionment of Representatives in Congress, *Trans. American Mathematical Society*, Vol.30, No.1, pp.85–110 (1928).

[6] Ichimori, T.: New Apportionment Methods and Their Quota Property, *JSIAM Letters*, Vol.2, pp.33–36 (2010).

[7] 一森哲男：連続平等性と対称性の観点からみた議員定数配分方法と大域的最適化問題，日本応用数理学会論文誌，Vol.21, No.1, pp.103–124 (2011).

[8] Ichimori, T.: On Rounding off Quotas to the Nearest Integers in the Problem of Apportionment, *JSIAM Letters*, Vol.3, pp.21–24 (2011).

[9] Ichimori, T.: Relaxed Divisor Methods and Their Seat Biases, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol.55, No.1, pp.63–72 (2012),

[10] 一森哲男：レニーのエントロピーを最大にする議席配分方式について，日本応用数理学会論文誌，Vol.22, No.3, pp.81–96 (2012).

[11] Ichimori, T.: A Note on Relaxed Divisor Methods, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol.55, No.4, pp.225–234 (2012).

[12] 一森哲男：議員定数配分問題の離散最適化による解法について，日本応用数理学会論文誌，Vol.23, No.1, pp.15–35 (2013).

[13] 一森哲男：分布間ダイバージェンスと議席配分方式の関係について，情報処理学会論文誌，Vol.54, No.8, pp.1988–1995 (2013).

[14] 一森哲男：緩和除数方式の比例性と歴史上の 5 方式との関係について，日本オペレーションズ・リサーチ学会和文論文誌，Vol.56, pp.1–14 (2013).

[15] 一森哲男：緩和除数方式の偏りについて，日本応用数理学会論文誌，Vol.23, No.4, pp.601–617 (2013).

[16] 一森哲男：ダイバージェンスが定める議席配分方式，情報処理学会論文誌，Vol.55, No.5, pp.1568–1572 (2014).

[17] Kullback, S. and Leibler, R.A.: On Information and Sufficiency, *Annals of Mathematical Statistics*, Vol.22, No.1, pp.79–86 (1951).

[18] Liese, F. and Vajda, I.: On Divergences and Informations in Statistics and Information Theory, *IEEE Trans. Information Theory*, Vol.52, No.10, pp.4394–4412 (2006).

[19] Pearson, K.: On the Criterion That a Given System of Deviations from the Probable in the Case of a Correlated System of Variables is Such That it can be Reasonably Supposed to Have Arisen from Random Sampling, *Philosophical Magazine*, Vol.50, No.302, pp.157–172 (1900).

[20] 薩摩順吉，大石進一，杉原正顯（編）：応用数理ハンドブック，朝倉書店 (2013).

[21] Stolarsky, K.B.: Generalizations of the Logarithmic Mean, *Mathematics Magazine*, Vol.48, No.2, pp.87–92 (1975).

[22] Theil, H. and Schrage, L.: The Apportionment Problem and the European Parliament, *European Economic Reviews*, Vol.9, No.3, pp.247–263 (1977).

[23] Theil, H.: The Desired Political Entropy, *American Political Science Review*, Vol.63, No.2, pp.521–525 (1969).

[24] Willcox, W.F.: The Apportionment of Representatives, *American Economic Review*, Vol.6, No.1, pp.3–16 (1916).

付　録

A.1　積分計算

式 (13) の積分を計算すると，

$$
\begin{aligned}
&\int_0^h (h-x)^{s-2} a(\alpha)\,dx \\
&= \sum_{k=1}^{h-1} \int_{d_\alpha(k-1)}^{d_\alpha(k)} k(h-x)^{s-2}\,dx + \int_{d_\alpha(h-1)}^{h} h(h-x)^{s-2} dx \\
&= \sum_{k=1}^{h-1} \left[\frac{k\times(-1)}{s-1}(h-x)^{s-1} \right]_{d_\alpha(k-1)}^{d_\alpha(k)} \\
&\quad + \left[\frac{h\times(-1)}{s-1}(h-x)^{s-1} \right]_{d_\alpha(h-1)}^{h} \\
&= \frac{1}{s-1}\sum_{k=1}^{h-1}(-k)\left((h-d_\alpha(k))^{s-1} - (h-d_\alpha(k-1))^{s-1}\right) \\
&\quad + \frac{1}{s-1}(-h)\left(-(h-d_\alpha(h-1))^{s-1}\right) \\
&= \frac{1}{s-1}\Bigl(\sum_{k=1}^{h-1}(-k)(h-d_\alpha(k))^{s-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\qquad + \sum_{k=1}^{h-1} (k)(h - d_\alpha(k-1))^{s-1}\Big) \\
&\qquad + \frac{1}{s-1}(h)\left((h - d_\alpha(h-1))^{s-1}\right) \\
&= \frac{1}{s-1}\Big((h - d_\alpha(0))^{s-1} + \sum_{k=1}^{h-1}\big((-k)(h - d_\alpha(k))^{s-1} \\
&\qquad + (k+1)(h - d_\alpha(k))^{s-1}\big)\Big) \\
&= \frac{1}{s-1}\sum_{k=0}^{h-1}(h - d_\alpha(k))^{s-1}
\end{aligned}
$$

となる．

一森 哲男 （正会員）

昭和28年生．昭和57年大阪大学大学院工学研究科応用物理学専攻博士後期課程修了．同年広島大学工学部助手．昭和60年より大阪工業大学工学部専任講師．昭和63年より大阪工業大学工学部助教授．平成8年より大阪工業大学情報科学部教授．システムの最適化に関する研究に従事．工学博士．昭和62年日本オペレーションズ・リサーチ学会事例研究奨励賞受賞．平成25年日本応用数理学会論文賞受賞．日本オペレーションズ・リサーチ学会，日本応用数理学会各会員．