Vol.2015-AL-153 No.13
2015/6/13

極大誘導木遷移問題

和佐 州洋[1]　山中 克久[2]　有村 博紀[1]

概要：遷移問題とは，2 つの実行可能解 A と B が与えられたとき，A に対して，繰り返し遷移ルール f を適用することで，A から B への実行可能解の列 $(A_0 = A, A_1, \ldots, A_\ell = B)$ が存在するかを判定する問題である．ここで，各 $i = 1, \ldots, \ell$ に対して，A_i は，A_{i-1} から f を適用することによって得られる実行可能解である．本稿では，実行可能解として極大誘導木に着目し，グラフの極大誘導木の遷移問題を考察した．主結果として，任意の入力グラフ G と，G の 2 つの極大誘導木 S と T が与えられたとき，トークンジャンプとトークンスライディング，それぞれ遷移ルールのもとにおいて，極大誘導木の遷移問題が PSPACE 完全であることを示した．

Reconfiguration Problem for Maximal Induced Trees

Kunihiro Wasa[1]　Katsuhisa Yamanaka[2]　Hiroki Arimura[1]

Abstract: A *reconfiguration problem* asks given two feasible solutions A and B, whether there exists a *reconfiguration sequence* $(A_0 = A, A_1, \ldots, A_\ell = B)$ such that (i) $A_0, \ldots, A_\ell$ are feasible solutions and (ii) we can obtain A_i from A_{i-1} under the prescibed rule (*reconfiguration rule*) for each $i = 1, \ldots, \ell$. In this paper, we address the reconfiguration problem for maximal induced trees, where a maximal induced tree is a maximal connected and acyclic induced graph of an input graph. As the main result of this paper, given an arbitrary graph G and two maximal induced trees S and T of G, we will show that the reconfiguration problem is PSPACE-complete when a reconfiguration rule is either Token Jumping or Token Sliding.

1. はじめに

遷移問題 (reconfiguration problem) とは，直感的には，2 つの実行可能解 A と B が与えられたときに，**遷移ルール** (reconfiguration rule) に基づき，A から別の実行可能解 A_1 へ，A_1 からさらに別の実行可能解 A_2 へ，...，と繰り返し実行可能解を再構成させ，A から B へ再構成させる**遷移列** (reconfiguration sequence) $(A, A_1, \ldots, A_\ell = B)$ が存在するかを問う問題である．この問題の興味深い点として，決定問題 $\mathscr{P}$ の難しさから，$\mathscr{P}$ における実行可能解の遷移問題の難しさを直ちには言えないことが挙げられる．たとえば，グラフ上の 3 彩色問題は，一般に，NP 完全に属するが，3 彩色遷移問題は P に属することが知られている [1]．一方，グラフ上の最短経路問題は P に属するが，その遷移問題は，一般に，PSPACE に属することが知られている [2]．このように，遷移問題は，解空間の構造や計算複雑性をより深く理解するアプローチのひとつとして，近年注目されている問題である．

1.1 主結果

本稿では，グラフ上の極大誘導木（極大な連結非巡回誘導グラフ）の遷移問題に関して考察した．入力グラフ上の極大誘導木 S と T が与えられたとする．S を構成する頂点集合の各頂点に，トークンが配置されているとしよう．あらかじめ決められた遷移ルールに従ってトークンの位置を

1 北海道大学大学院情報科学研究科
Hokkaido University, Graduate School of Information Science and Technology, {wasa, arim}@ist.hokudai.ac.jp
2 岩手大学工学部
Iwate University, Faculty of Engineering, yamanaka@cis.iwate-u.ac.jp

変更して，S とは異なる極大誘導木を構成する．これを繰り返して，目的の極大誘導木 T を構成できるかを問う問題である．グラフ上の遷移問題において，これまで，次に示す遷移ルールが与えられてきた．トークンスライディング (TS): 実行可能解中のある頂点 v を除き，v に隣接する頂点を加える．トークンジャンプ (TJ [3]): 実行可能解中のある頂点 v を除き，任意の頂点を加える．トークンアディション・リムーバル (TAR [4]): 実行可能解中のある頂点 v を除く，または，含まれていない頂点 u を加える．我々は，遷移ルールとして，TS と TJ を採用したとき，3SAT の遷移問題を極大誘導木遷移問題へ多項式時間還元することで，極大誘導木遷移問題が PSPACE 完全であることを示した．

1.2 関連研究

任意のグラフに対して，極大な誘導木が存在することは自明である．しかし，Derhy と Picouleau [5] は，グラフ G と G に含まれる 3 つの頂点 u, v, w が与えられたとき，G が平面二部立方体グラフのときですら，u, v, w を含むような G の誘導木が存在するかどうかを判定する問題が NP 完全であることを示した．彼らの結果から，与えられた 3 頂点を含む極大誘導木が存在するかを判定する問題も NP 完全であることがわかる．また，解空間の構造を解明する研究の，遷移問題とは異なるアプローチのひとつとして，列挙問題があげられる．誘導木に関する列挙の研究として，Wasa ら [6] は，k-縮退グラフ [7] G が与えられたとき，G に含まれる誘導木を，1 つあたり $O(k)$ 時間で列挙する与えた．しかし，極大誘導木の列挙問題に関する結果は，まだ知られてない．

遷移問題の計算複雑性に関して，Gopalan ら [8] は，制約充足遷移問題に関して，入力の命題論理式にどのような制約を与えれば，問題が P に属するか，あるいは，PSPACE 完全に属するかを示した．Kamiński ら [3] は，独立点集合遷移問題が，入力グラフを理想グラフとしたとき，TS，TJ，または，TAR のもとにおいて，PSPACE 完全であることを示した．一方，彼らは，入力グラフが even-hole-free グラフであるとき，TJ，または，TAR のもとにおいて，また，入力グラフが P_4-free グラフであるとき TS のもとにおいて，独立点集合遷移問題が多項式時間解けることを示した．

Bonsma [2] は，グラフ G と，G に含まれる 2 つの st 最短経路 p_1 と p_2 が与えられ時，p_1 から p_2 への遷移列の存在判定問題が PSPACE 完全であること示した．これは，st 最短経路を求める問題が P に属することを考えると，非常に興味深い結果である．また，Kamiński ら [9] は，最短経路の最短遷移列を求める問題が NP 困難であることを示した．他にも，リスト点彩色遷移問題 [10] や，部分和遷移問題 [11]，辺彩色遷移問題 [12]，トークン入れ替え問題 [13]，遷移問題としてのスライディングパズル [14] などが研究されている．しかし，我々の知る限り，極大な誘導部分グラフに対する遷移問題の結果については知られていない．

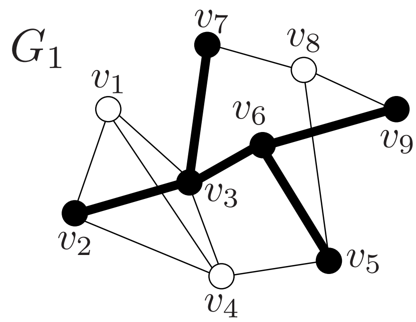

図 1　グラフ G_1 上の極大誘導木 $S_1 = \{v_2, v_3, v_5, v_6, v_7, v_9\}$ の例．太実線は，S_1 に含まれる辺を表す．S_1 に $\{v_1, v_4, v_8\}$ のうち，いずれの頂点を加えても，閉路をなす．

1.3 本稿の構成

本稿の構成，次のとおりである．まず，2 節では，本稿で用いる基本的な用語を導入したのち，本稿で扱う極大誘導木遷移問題の定義を与える．次に，3 節では，還元に用いる 3SAT 遷移問題を導入した後，3SAT 遷移問題の入力を，極大誘導木遷移問題の入力に変換する具体的な方法を与えることで，極大誘導木遷移問題が PSPACE 完全であることを示す．最後に，4 節では，結論を述べる．

2. 準備

本節では，本稿で用いる用語の定義と本稿で扱う極大誘導木遷移問題の定義を与える．

2.1 グラフ

無向グラフ (undirected graph, 以下，単にグラフという) $G = (V(G), E(G))$ を，**頂点集合** $V(G)$ と**辺集合** $E(G) \subseteq V(G)^2$ の組で表す．任意の 2 頂点 $u, v \in V(G)$ に対して，u と v が G 中で**隣接**しているとは，$(u, v) \in E(G)$ であるときをいう．さらに，$N_G(u) = \{v \in V(G) \mid (u, v) \in E(G)\}$ を，u の G における隣接頂点集合という．以下では，グラフを $G = (V, E)$ に固定し，さらに，G は単純，つまり，多重辺と自己閉路を持たないとする．また，文脈から明らかならば，$V(G)$ と，$E(G)$，$N_G(u)$ を，それぞれ，単に，V と，E，$N(u)$ と書く．

G 中の任意の 2 頂点を $u, v \in V$ とし，j 個の頂点の列を $\pi(u, v) = (v_1 = u, \ldots, v_j = v)$ とする．このとき，各 $i = 1, \ldots, j-1$ に対して，相異なる $j-1$ 個の辺 (v_i, v_{i+1}) が E に含まれるとき，$\pi(u, v)$ を u から v への**路**という．路の**長さ**を $|\pi(u, v)| = j - 1$ とする．ここで，路の中で，長さが 3 以上，かつ，$u = v$ であるとき $\pi(u, v)$ を**閉路**といい，G が閉路を持たないとき，G を**非巡回**であるという．また，G 中の任意の相異なる 2 頂点間に路が存在するとき，G は**連結**であるという．

V の任意の頂点集合 S に対して，S によって誘導

されるグラフを $G[S] = (S, E[S])$ とし，$G[S]$ を G の**誘導グラフ** (induced graph) という．ここで，$E[S] = \{(u,v) \in E \mid u, v \in S\}$ とする．また，$G[S]$ は G と S から一意に決まるため，文脈から明らかならば，$G[S]$ と S を同一視する．ここで，S が連結かつ非巡回である時，S を**誘導木** (induced tree) という．また，S が**極大誘導木** (maximal induced tree) であるとは，$S \subset S'$ となるような誘導木 S' が存在しないときをいう（図 1）．極大で連結な G の誘導グラフを**連結成分**という．

2.2 遷移問題

本小節では，本稿で扱う遷移問題を与える．まず，次のような関数 $f : 2^V \times V \times V \to 2^V$ を考える：

$$f(S,u,v) = (S \setminus \{u\}) \cup \{v\}.$$

ここで，G 中の 2 つの極大誘導木 S と T に対して，S と T が**隣接している**とは，次を満たすような頂点 $u \in S$ と $v \notin S$ が存在するときをいう：

$$f(S,u,v) = T.$$

つまり，任意の極大誘導木 S に対して，S に隣接する極大誘導木 T とは，S 中のある頂点 u を除き，S に含まれていない頂点 v を $S \setminus \{u\}$ に加えることで，得られるような極大誘導木 $T = (S \setminus \{u\}) \cup \{v\}$ である．このような遷移ルール f を**トークンジャンプ** (Token Jumping; TJ) という．ここで，G における極大誘導木の**遷移グラフ**を $R_{\mathrm{MIT}}(G) = (\mathcal{MIT}(G), \mathcal{E}(G))$ とする．ただし，$\mathcal{MIT}(G)$ を，G に含まれるすべての極大誘導木の集合とし，$\mathcal{E}(G)$ を，$\mathcal{E}(G) = \{(S,T) \in \mathcal{MIT}(G)^2 \mid \exists u \in S, \exists v \notin S\,(f(S,u,v) = T)\}$，つまり，隣接している極大誘導木の組からなる辺の集合とする．任意の極大誘導木 S と T に対して，$R_{\mathrm{MIT}}(G)$ 上で，S から T への路 $\pi(S,T)$ を，**遷移列**という．図 2 に，グラフ G_1 上の極大誘導木遷移問題の例を挙げる．次に，本稿で扱う問題を与える．

問題 1 (極大誘導木遷移問題)**.** グラフ $G = (V,E)$ と，極大誘導木 S と T を入力とし，遷移ルールを TJ とする．このとき，$R_{\mathrm{MIT}}(G)$ 上で，S から T への遷移列 $\pi(S,T)$ は存在するか．

3. PSPACE 完全性

本節では，問題 1 が PSPACE 完全であることを示す．PSPACE 完全性を示すために，3SAT 遷移問題 [8] から問題 1 への多項式時間還元を考える．3.1 節では，まず，3SAT 遷移問題を与え，3.2 節で，具体的な還元方法を与える．

3.1 3SAT 遷移問題

変数の集合 $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ 上の 3SAT の入力論理式を，$W = C_1 \wedge \cdots \wedge C_m$ とする．ただし，各項 C_i は，3 つのリテラルの論理和からなる項とする．ここで，W の 2 つの**充足割当** $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_n)$ とは，n 個の真理値の割当からなるベクトルで，W のすべての項 C_i について，C_i 中の少なくともひとつのリテラルが真になるような，真理値の割当である．

次のような関数 $g : \{0,1\}^n \times \mathbb{N}^+ \to \{0,1\}^n$ を考える．ここで，$\mathbb{N}^+$ を正の自然数全体の集合とする．

$$g(\mathbf{s}, j) = (s_1, \ldots, s_{j-1}, \overline{s_j}, s_{j+1}, \ldots, s_n)$$

W の 2 つの充足割当 $\mathbf{s}$ と $\mathbf{t}$ が隣接しているとは，次を満たす正整数 j が存在するときをいう：

$$g(\mathbf{s}, j) = \mathbf{t}.$$

つまり，$\mathbf{s}$ と $\mathbf{t}$ のハミング距離が 1 であるならば，$\mathbf{s}$ と $\mathbf{t}$ が隣接しているという．さらに，極大誘導木のときと同様に，遷移グラフ $R_{\mathrm{3SAT}}(W) = (\mathcal{TA}(W), \mathcal{E}(W))$ を考える．ここで，$\mathcal{TA}(W)$ を，W の充足割当すべてからなる集合とし，$\mathcal{E}(W)$ を，$\mathcal{E}(W) = \{(\mathbf{s}, \mathbf{t}) \in \mathcal{TA}(W)^2 \mid (\exists j) g(\mathbf{s}, j) = \mathbf{t}\}$ を満たす集合である．つまり，任意の充足割当 $\mathbf{s}$ と $\mathbf{t}$ に対して，辺 $(\mathbf{s}, \mathbf{t})$ が $\mathcal{E}(W)$ に含まれるならば，かつその時に限り，W の充足割当 $\mathbf{s}$ と $\mathbf{t}$ が隣接している．また，W の充足割当 $\mathbf{s}$ から他の充足割当 $\mathbf{t}$ への路 $\pi(\mathbf{s}, \mathbf{t})$ を，極大誘導木の遷移グラフと同様に，遷移列という．ここで，遷移列の存在判定問題を次に与える．

問題 2 (3SAT 遷移問題)**.** 命題論理式 W と，その充足割当 $\mathbf{s}$ と $\mathbf{t}$ が与えられた時，$R_{\mathrm{3SAT}}(W)$ 上で，$\mathbf{s}$ から $\mathbf{t}$ への遷移列 $\pi(\mathbf{s}, \mathbf{t})$ は存在するか．

問題 2 に対して，次の定理が Gopalan ら [8] によって示されている．

定理 1. 問題 2 は PSPACE 完全である．

3.2 多項式時間還元

本小節では，3SAT 遷移問題の入力論理式 W が与えられたとき，極大誘導木遷移問題の入力グラフ $H(W)$ へ多項式時間で還元する方法を与える．以下では，変数の集合 $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ に対する 3SAT 遷移問題の入力論理式を $W = C_1 \wedge \cdots \wedge C_m$ とし，2 つの実行可能解を $\mathbf{s}$ と $\mathbf{t}$ に固定する．また，リテラルの集合を $L(X) = \{x_1, \ldots, x_n, \overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}\}$ とし，項の集合を $C(W) = \{C_1, \ldots, C_m\}$ とする．

まず，各変数 $x_j \in X$ に対して，変数ガジェット $G_{x_j}, (1 \le j \le n)$ を以下のように定義する：$G_{x_j} = (V(G_{x_j}), E(G_{x_j}))$ は，頂点集合 $V(G_{x_j}) = \{x_j, \overline{x_j}, a_j, b_j\}$ と，辺集合 $E(G_{x_j}) = \{(a_j, x_j), (a_j, \overline{x_j}), (b_j, x_j), (b_j, \overline{x_j})\}$ からなるグラフである．次に，各項 C_i に対して，項ガジェット $G_{C_i}, (1 \le i \le m)$ を以下のように定義する：$G_{C_i} = (V(G_{C_i}), \emptyset)$ は，頂点集合 $V(G_{C_i}) = \{C_i\}$ と，空な

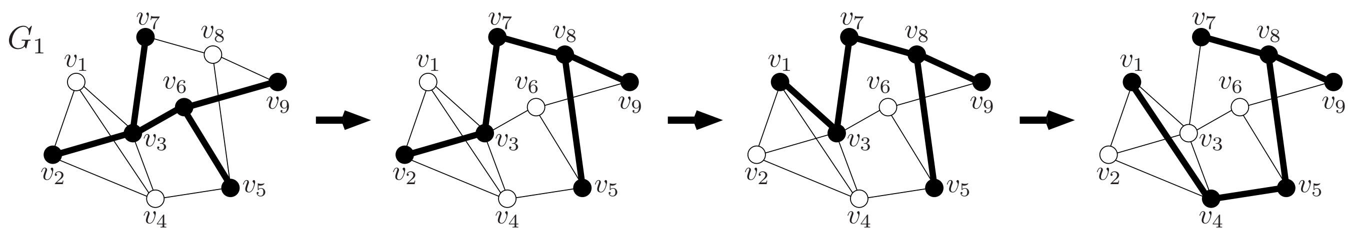

図 2 極大誘導木遷移問題の例．ここでは，入力グラフを G_1 とし，極大誘導木 $S_1 = \{v_2, v_3, v_5, v_6, v_7, v_9\}$ から極大誘導木 $T_1 = \{v_1, v_4, v_5, v_7, v_8, v_9\}$ への遷移列 $\pi(S_1, T_1)$ があるかを判定する．この場合，遷移列は存在し，$\pi(S_1, T_1) = (S_1, S_2, S_3, S_4 = T_1)$ である．ただし，$S_2 = f(S_1, v_6, v_8)$ とし，$S_3 = f(S_2, v_2, v_1)$，$S_4 = f(S_3, v_3, v_4)$ とする．

辺集合からなるからなるグラフである．最後に，根ガジェット G_r を以下のように定義する：$G_r = (V(G_r), E(G_r))$ は，頂点集合 $V(G_r) = \{r_1, r_2\}$ と，辺集合 $E(G_r) = \{(r_1, r_2)\}$ からなるグラフである．これらを組み合わせて，グラフ $H(W) = (V(W), E(W))$ を作る：

$$V(W) = V(G_r) \cup \left(\bigcup_{1 \le j \le n} V(G_{x_j}) \right) \cup \left(\bigcup_{1 \le i \le m} V(G_{C_i}) \right),$$

$$E(W) = E(G_r) \cup E_r \cup E_C \cup \left(\bigcup_{1 \le j \le n} E(G_{x_j}) \right).$$

ただし，$E_r = \{(r_1, u) \mid u \in L(X) \cup C(W)\}$ とし，$E_C = \{(C, x) \mid C \in C(W), x \in L(X), x \in C\}$ とする．また，以下では，$A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ とし，$B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ とする．図 3 に，変数集合 $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ に対する，命題論理式 $W_1 = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4)$ の $H(W_1)$ の例を与える．

W の充足割当 $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_n)$ に対して，$S_{\mathbf{s}} = \{x_j \mid s_j = 1\} \cup \{\overline{x_j} \mid s_j = 0\}$ を，**充足頂点集合**という．さらに，充足頂点集合にいくつかの頂点を加えた誘導グラフを $T_{\mathbf{s}} = S_{\mathbf{s}} \cup A \cup B \cup V(G_r)$ とする．このとき，$T_{\mathbf{s}}$ に対して，次の補題が得られる．

補題 1. $T_{\mathbf{s}}$ は，$H(W)$ の極大誘導木である．

証明．以下では，j を $j \in [1, n]$ を満たす任意の整数とする．$S_{\mathbf{s}}$ は，リテラル x_j または，$\overline{x_j}$ のいずれか一方を含む．ここで，$S_{\mathbf{s}}$ が x_j を含むと仮定しても一般性を失わない．r_1 は $S_{\mathbf{s}}$ 中のすべての頂点と隣接し，r_2 は r_1 のみと隣接する．また，a_j と b_j は，ともに，$S_{\mathbf{s}}$ 中の頂点 x_j のみと隣接し，さらに，$j \neq k$ のとき，$H(W)$ は，(x_j, x_k) または，$(x_j, \overline{x_k})$ を含まない．よって，$T_{\mathbf{s}}$ は，誘導木である．次に，$T_{\mathbf{s}}$ の極大性を示すために，$V(W) \setminus T_{\mathbf{s}}$ 中の頂点 u を，$T_{\mathbf{s}}$ に加えることを考える．(i) $u = \overline{x_j} \in L(W) \setminus S_{\mathbf{s}}$ とする．このとき，$\{x_j, a_j, \overline{x_j}, b_j\}$ は閉路をなすので，$T_{\mathbf{s}} \cup \{x_j\}$ は誘導木でない．(ii) $u \in \{C_1, \ldots, C_m\}$ とし，u は x_j と隣接すると仮定する．このような u は，$\mathbf{s}$ は W の充足割当であることから，必ず存在する．また，u と x_j は r_1 とも隣接している．従って，$\{u, x_j, r_1\}$ は閉路をなし，誘導木でない．(i) と (ii) より，$T_{\mathbf{s}}$ は，極大誘導木である．■

$T_{\mathbf{s}}$ と隣接する極大誘導木は，充足頂点集合 $S_{\mathbf{s}}$ 中の頂点 u を取り除き，$\overline{u}$ を追加することによってのみ得られることを，次の補題で示す．

補題 2. $T_{\mathbf{s}}$ を，W の充足割当 $\mathbf{s}$ に対応する，$H(W)$ 上の任意の極大誘導木とし，$u \in T_{\mathbf{s}}$，$v \notin T_{\mathbf{s}}$ とする．このとき，$(T_{\mathbf{s}} \setminus \{u\}) \cup \{v\}$ が $H(W)$ 上の極大誘導木ならば，$u \in S_{\mathbf{s}}$ かつ $v = \overline{u}$ である．

証明．対偶を用いて証明する．以下では，変数 x_j と項 C_i に対して，$x_j \in S_{\mathbf{s}}$ と $x_j \in C_i$ を仮定しても一般性を失わない．(I) $u \in T_{\mathbf{s}} \setminus S_{\mathbf{s}}$ とする．(I.a) $u = a_j \in A$ とする．まず，$v = \overline{x_j}$ とすると，$\{x_j, b_j, \overline{x_j}, r_j\}$ は閉路をなす．つぎに，$v = C_i$ とすると，$\{C_i, r_1, x_j\}$ は閉路をなす．$u = b_j \in B$ のときも，同様のことが言えるので，$u = A \cup B$ のとき，$(T_{\mathbf{s}} \setminus \{u\}) \cup \{v\}$ は極大誘導木でない．(I.b) $u \in V(G_r)$ とする．ここで，$u = r_1$ のとき，r_2 は，$(T_{\mathbf{s}} \setminus \{u\})$ 上で孤立点となり，また，$v \notin T_{\mathbf{s}}$ であることから，$(T_{\mathbf{s}} \setminus \{u\}) \cup \{v\}$ は誘導木でない．一方，$u = r_2$ のときは，$v \notin T_{\mathbf{s}}$ であることから，$(T_{\mathbf{s}} \setminus \{u\}) \cup \{v\}$ は極大でない．(II) $u \in S_{\mathbf{s}}$ かつ $v \neq \overline{u}$ とする．ここで，$u = x_j$ とし，$v \neq \overline{x_j}$ とすると，$(T_{\mathbf{s}} \setminus \{u\}) \cup \{v\}$ において，r_1 から a_j または，b_j への路は存在しない．よって，$(T_{\mathbf{s}} \setminus \{u\}) \cup \{v\}$ は非連結であり，誘導木ではない．(I) と (II) の議論から，その対偶を取ると，題意は示された．■

補題 2 によって，ある充足割当 $\mathbf{s}$ に対応する $H(W)$ 上の任意の極大誘導木 $T_{\mathbf{s}}$ に対して，$T_{\mathbf{s}}$ に隣接する極大誘導木 T は，ある真理値割り当て $\mathbf{t}$ に対応する極大誘導木であることがわかった．次の補題 3 では，$\mathbf{s}$ と $\mathbf{t}$ もまた隣接する充足割当であることを示す．

補題 3. 命題論理式 W の充足割当を $\mathbf{s}$ と $\mathbf{t}$ とする．このとき，次の (I) と (II) は等価である：

(I) $R_{3\mathrm{SAT}}(W)$ 上で $\mathbf{s}$ と $\mathbf{t}$ は隣接している．

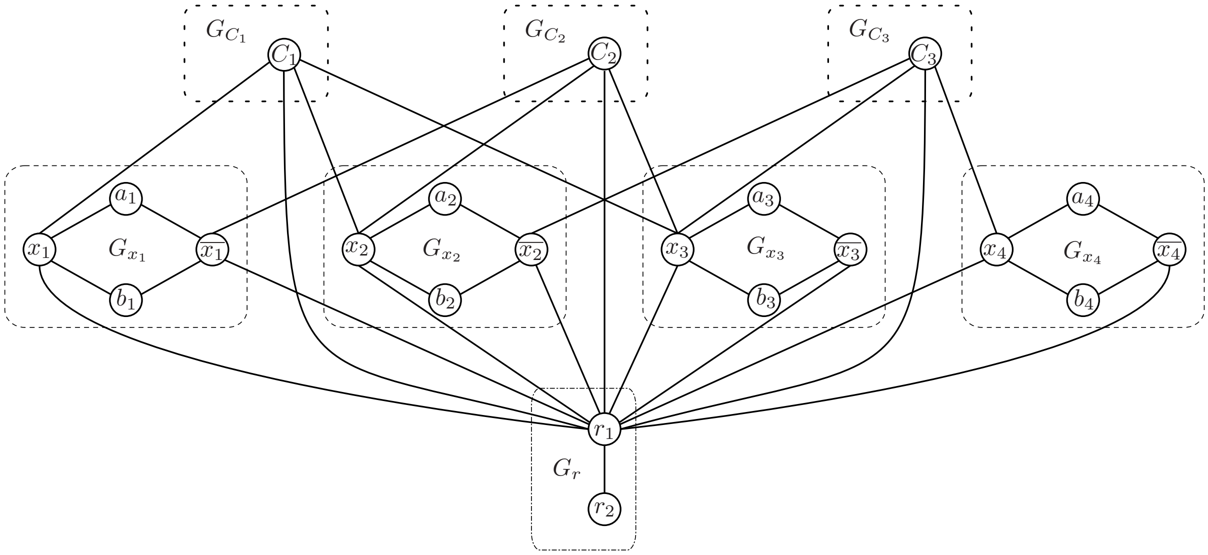

図 3　変数集合 $x_1, \ldots, x_4$ 上の論理式 $W_1 = C_1 \wedge C_2 \wedge C_3$ に対する $H(W_1)$ の例．ここで，$C_1 = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$ とし，$C_2 = (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)$，$C_3 = (\overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4)$ とする．また，点線で囲まれた部分は各変数ガジェット G_{C_i} を，破線で囲まれた部分は各変数ガジェット G_{x_i}，鎖線で囲まれた部分は各根ガジェット G_r を，それぞれ表す．

(II)　$R_{\mathrm{MIT}}(H(W))$ 上で，$T_{\mathbf{s}}$ と $T_{\mathbf{t}}$ は隣接している．

証明．まず，補題 1 より，$T_{\mathbf{s}}$ と $T_{\mathbf{t}}$ は極大誘導木である．次に，(I) $\rightarrow$ (II) を示す．$\mathbf{s}$ と $\mathbf{t}$ が隣接していることから，j 番目の割当 s_j の値が異なっているとし，$s_j = 1$ と仮定する．このとき，$(T_{\mathbf{s}} \setminus \{x_j\}) \cup \{\overline{x_j}\} = T_{\mathbf{t}}$ である．$s_j = 0$ の時も同様のことがいえるので，$T_{\mathbf{s}}$ と $T_{\mathbf{t}}$ は隣接している．最後に，(II) $\rightarrow$ (I) を示す．$T_{\mathbf{s}}$ と $T_{\mathbf{t}}$ が隣接していることから，$(T_{\mathbf{s}} \setminus \{u\}) \cup \{v\} = T_{\mathbf{t}}$ とする．ここで，補題 2 より，$u \in S_{\mathbf{s}}$ かつ，$v = \overline{u}$ である．したがって，$\mathbf{s}$ と $\mathbf{t}$ のハミング距離は 1 であるので，$\mathbf{s}$ と $\mathbf{t}$ は隣接している．よって，題意は示された．■

補題 3 から，ある充足割当に対応する極大誘導木を含む $R_{\mathrm{MIT}}(H(W))$ の連結成分 C は，C に含まれるすべての極大誘導木が，それぞれ，対応する充足割当を持つことがわかる．また，命題論理式 W から，$H(W)$ を得るのに必要な時間計算量が多項式時間であることはすぐにわかる．よって，以上の議論から，次の定理が導かれる．

定理 2. 問題 1 は PSPACE 完全である．

証明．Ito ら [4] によって，任意の問題 $\mathscr{P} \in NP$ に対する遷移問題は，PSPACE に含まれることが示されている．与えられたグラフ上で極大誘導木を見つける問題は，明らかに NP に属するので，問題 1 は PSPACE に属する．次に，3SAT 遷移問題から問題 1 への多項式時間還元を与える．まず，3SAT 遷移問題の入力論理式 W と 2 つの充足割当 $\mathbf{s}$ と $\mathbf{t}$ を受け取り，多項式時間で，グラフ $H(W)$ と 2 つの誘導グラフ $T_{\mathbf{s}}$ と $T_{\mathbf{t}}$ を構築する．このとき，補題 1 より，$T_{\mathbf{s}}$ と $T_{\mathbf{t}}$ は，$H(W)$ の極大誘導木である．次に，極大誘導木遷移問題を解くアルゴリズム $\mathcal{A}$ を用い，$R_{\mathrm{MIT}}(H(W))$ 上で，$T_{\mathbf{s}}$ から $T_{\mathbf{t}}$ への遷移列 $\pi(T_{\mathbf{s}}, T_{\mathbf{t}})$ が存在するか判定する．ここで，補題 3 から，もし，遷移列 $\pi(T_{\mathbf{s}}, T_{\mathbf{t}})$ が存在するならば，かつその時に限り，$R_{\mathrm{3SAT}}(W)$ 上で，$\mathbf{s}$ から $\mathbf{t}$ への遷移列 $\pi(\mathbf{s}, \mathbf{t})$ が存在する．一方，3SAT 遷移問題は，定理 1 より，PSPACE 完全である．したがって，問題 1 も PSPACE 完全であり，定理 2 は示された．■

以上の議論では，遷移ルールを `TJ` としてきた．次に，$H(W)$ の各変数ガジェット G_{x_i} に，辺 $(x_i, \overline{x_i})$ を追加する．ここで，遷移ルール $f'(S, u, v) = (S \setminus \{u\}) \cup \{v\}$ において，v を $v \in N(u)$ に制限する．このとき，f' を，**トークンスライディング** (Token Sliding; `TS`) という．`TS` のもとでも，`TJ` と同様の議論でき，次の系が得られる．

系 1. グラフ $G = (V, E)$ と，極大誘導木 S と T を入力とし，遷移ルールを `TS` とする．このとき，$R_{\mathrm{MIT}}(G)$ 上で，S から T への遷移列 $\pi(S, T)$ の存在判定問題は，PSPACE 完全である．

4. おわりに

本稿では，極大誘導木遷移問題について考察した．主結果として，遷移ルール `TS` または，`TJ` のもとで，極大誘導木遷移問題が PSPACE 完全であることを示した．今後の課題として，極大誘導木遷移問題の入力のグラフクラスを制限した場合，効率良くこの問題を解けるクラスが存在するか，が挙げられる．また，遷移させる対象となるグラフクラスとして，極大独立点集合や極小フィードバック頂点集合などの遷移問題についても考察したい．

謝辞　本研究は，JSPS 新学術領域研究 24106007，JSPS

基盤研究 (C) 25330001，及び，JSPS 特別研究員奨励費 25 · 1149 の助成を受けたものです．

参考文献

[1] Cereceda, L., van den Heuvel, J. and Johnson, M.: Connectedness of the graph of vertex-colourings, *Discrete Mathematics*, Vol. 308, No. 5-6, pp. 913–919 (2008).
[2] Bonsma, P.: The complexity of rerouting shortest paths, *Theoretical Computer Science*, Vol. 510, pp. 1–12 (2013).
[3] Kamiński, M., Medvedev, P. and Milanič, M.: Complexity of independent set reconfigurability problems, *Theoretical Computer Science*, Vol. 439, pp. 9–15 (2012).
[4] Ito, T., Demaine, E. D., Harvey, N. J., Papadimitriou, C. H., Sideri, M., Uehara, R. and Uno, Y.: On the complexity of reconfiguration problems, *Theoretical Computer Science*, Vol. 412, No. 12-14, pp. 1054–1065 (2011).
[5] Derhy, N. and Picouleau, C.: Finding induced trees, *Discrete Applied Mathematics*, Vol. 157, No. 17, pp. 3552–3557 (2009).
[6] Wasa, K., Arimura, H. and Uno, T.: Efficient Enumeration of Induced Subtrees in a K-Degenerate Graph, *ISAAC 2014: the 25th International Symposium on Algorithms and Computation* (Ahn, H.-K. and Shin, C.-S., eds.), Lecture Notes in Computer Science, Vol. 6506, Jeonju, Korea, Springer Berlin Heidelberg, p. 488 (2014).
[7] Lick, D. R. and White, A. T.: k-degenerate graphs, *Canadian Journal of Mathematics*, Vol. 22, No. 5, pp. 1082–1096 (1970).
[8] Gopalan, P., Kolaitis, P. G., Maneva, E. and Papadimitriou, C. H.: The connectivity of boolean satisfiability: computational and structural dichotomies, *SIAM Journal on Computing*, Vol. 38, No. 6, pp. 2330–2355 (2009).
[9] Kamiński, M., Medvedev, P. and Milanič, M.: Shortest paths between shortest paths, *Theoretical Computer Science*, Vol. 412, No. 39, pp. 5205–5210 (2011).
[10] Ito, T., Kawamura, K., Ono, H. and Zhou, X.: Reconfiguration of list $L(2,1)$-labelings in a graph, *Theoretical Computer Science*, Vol. 544, pp. 84–97 (2014).
[11] Ito, T. and Demaine, E. D.: Approximability of the subset sum reconfiguration problem, *Journal of Combinatorial Optimization*, Vol. 28, No. 3, pp. 639–654 (2012).
[12] Ito, T., Kamiński, M. and Demaine, E. D.: Reconfiguration of list edge-colorings in a graph, *Discrete Applied Mathematics*, Vol. 160, No. 15, pp. 2199–2207 (2012).
[13] Yamanaka, K., Demaine, E. D., Ito, T., Kawahara, J., Kiyomi, M., Okamoto, Y., Saitoh, T., Suzuki, A., Uchizawa, K. and Uno, T.: Swapping labeled tokens on graphs, *Theoretical Computer Science* (*in press*).
[14] Hearn, R. A. and Demaine, E. D.: PSPACE-completeness of sliding-block puzzles and other problems through the nondeterministic constraint logic model of computation, *Theoretical Computer Science*, Vol. 343, No. 1-2, pp. 72–96 (2005).