 Vol.2015-AL-153 No.1
2015/6/12

整数格子劣モジュラ関数の適応的最大化

波多野 大督[1,2,a)]　福永 拓郎[1,2,b)]　河原林 健一[1,2,c)]

概要：劣モジュラ関数の最大化は様々な文脈で応用を持つ組合せ最適化問題である．近年，確率的最適化や能動学習での応用から触発されて適応的劣モジュラ性という概念が提案され，近似精度に理論保証を持つ適応的アルゴリズムが提案された．しかしこれらの概念は，影響力最大化を目的とする予算配分問題などに応用を持つ，整数格子状で定義された関数を扱うことができない．本研究では適応的劣モジュラ性の概念を整数格子上で定義された関数に拡張し，その最大化問題を適応的に解くアルゴリズムを提案する．

キーワード：劣モジュラ関数最大化，適応的アルゴリズム，確率的最適化，能動学習

1. はじめに

予算配分問題とは，限られた予算を広告媒体に配分する最適化問題であり，問題の目的はなるべく多くの顧客に影響が及ぶような配分を求めることである．予算配分問題と似た問題で**影響力最大化問題**と呼ばれる問題もある．これは Domingos, Richardson [7], [16] によって導入され，これまで非常に活発に研究されている．その中で最も代表的な成果としては，Kempe, Kleinberg, Tardos [14] による研究が挙げられる．彼らは影響力最大化問題を**劣モジュラ関数最大化問題**に帰着することで，効率的なアルゴリズムを与えることに成功した．劣モジュラ性とは，離散的なシステムにおいてある種の**限界効用逓減性**を表す概念であり，多くの組合せ最適化問題が効率的に解けるための鍵となる構造であると認識されている．Kempe らは，広告媒体の組合せによって影響を受ける顧客の数の期待値が劣モジュラ性を持つ集合関数によって表現できることを示した．この事実を用いることで彼らは，影響力最大化問題の貪欲アルゴリズムが近似精度について理論保証を持つことを示した．

影響力最大化問題に関する活発な研究の流れの中で，Alon, Gamzu, Tennenholtz [2] は予算配分問題を組合せ最適化問題として定式化し，近似アルゴリズムを与えた．予算配分問題では，解は広告媒体に対する予算の割り当てとして定義される．通常，劣モジュラ性は台集合の要素の組合せ上で定義される集合関数の性質であるので，予算配分問題を劣モジュラ関数の枠組みで捉えるのは一見して難しい．しかし，Soma ら [17] は，Alon らが定式化した問題を劣モジュラ性の枠組みで表現できることを示した．彼らは，劣モジュラ集合関数ではなく，より一般的な概念である，整数格子上で定義された劣モジュラ関数を用いた．

Alon らや Soma らの研究により，予算配分問題の数理に関して理解が進んだ一方で，これらの研究を現実に応用するためには難しい点が残されている．先行研究の問題設定では，広告主は全ての予算を意思決定のプロセスの冒頭で一度に配分しなければならない．しかし現実の場面では，広告主は予算配分の戦略を，広告の効果に関するフィードバックなどの情報を元に適応的に調整するといったことが行われている．例えば 2012 年のアメリカ大統領選挙では，Obama, Romney 両陣営は 5 億ドルもの予算をテレビ広告に配分した [1] が，彼らはスイング・ステートと呼ばれる勢力が拮抗した州にそのうちの多くを重点的に配分した．そのような州では，両陣営の票読みは頻繁に変化しており，両陣営ではテレビ広告への配分を毎日更新するといった戦略がとられた．つまり，予算配分の戦略を毎日適応的に調整するということが重要視されていたということである．

本報告では，予算配分問題に対する適応的なアルゴリズムについて議論する．より一般的に，整数格子上で定義された劣モジュラ関数を最大化する問題に対して，適応的なアルゴリズムを考える．

適応的なアルゴリズムは劣モジュラ集合関数に対してはすでに研究されている．Golovin と Krause [12] は，**適応的劣モジュラ性**という概念を提案し，もし目的関数がこの性質を持つのであれば適応的な貪欲アルゴリズムが近似保証をもつことを示した．彼らの研究の後，適応的

1 国立情報学研究所
2 JST, ERATO, 河原林巨大グラフプロジェクト
a) hatano@nii.ac.jp
b) takuro@nii.ac.jp
c) k_keniti@nii.ac.jp

劣モジュラ関数に関する最適化問題について多くの研究がされている [9], [10], [11]．またそれらの能動学習や確率最適化への応用についても，多くの研究がなされている [3], [4], [5], [6], [13], [15]．

Golovin と Krause によって導入されたモデルは Kempe ら [14] で議論されていた問題を適応的な設定に拡張したものを含んでいる．つまり，影響力最大化問題においては適応的アルゴリズムはすでに考えられていることになる．しかしながら，彼らのモデルでは予算配分問題を扱うことはできない．よって我々は，予算配分問題のモデルを扱うことができるよう適応的劣モジュラ性の概念を拡張した．より詳しく述べると，我々は適応的劣モジュラ性の概念を整数格子上で定義された関数へと拡張した．この性質を持つ関数の最大化問題は，予算配分問題の適応的な設定を含んでいるだけではなく，確率最適化や能動学習の応用上重要な問題で，集合関数の適応的劣モジュラ性の概念では扱えなかったようなものも多く含んでいる．

さらに，整数格子上の適応的劣モジュラ関数を最大化する問題に対するアルゴリズムのうち，**敏感戦略**と**鈍感戦略**と呼ぶ 2 種類の貪欲アルゴリズムの性能について議論する．敏感戦略ではフィードバックが得られる度に戦略が更新されるのに対して，鈍感戦略では一定量の予算が一つの要素に当初の計画通りに割り当てられるまで戦略は更新されずフィードバックが無視される．われわれはまず，敏感戦略が非適応的な貪欲アルゴリズムと比較しても性能が悪くなりうることを示す．非適応的な貪欲アルゴリズムは非適応的な通常の設定では $1 - 1/e$ 近似を達成するという保証があるのに対して，適応的な設定では最適な戦略よりも $e/(e-1)$ 倍悪くなる場合があることが集合関数最大化問題において知られている．鈍感戦略については，任意の適応的な戦略と比較したときに近似保証が得られることを示す．より具体的に述べると，我々は次のような性質を持つ二つの鈍感戦略を与える．

- $(1 - 1/e)$ 近似を達成する戦略．つまり，得られる関数値の期待値がどのような適応的な戦略（アルゴリズム）と比較しても $(1 - 1/e)$ 倍以上となっている．ただし，割り当てのコストが予算制約を最大 2 倍違反することを許している．ただしその場合でも，コストの期待値は与えられた予算の値に収まっている．
- $(e-1)/(2e)$ 近似を達成する戦略．割り当ては予算制約を常に満たす．

Soma ら [17] は非適応的な設定で，整数格子上で定義された単調劣モジュラ関数を最大化する問題が $(1 - 1/e)$ 近似アルゴリズムを持つことを示した．これは我々の一つ目の鈍感戦略の近似保証と一致している．しかし，Soma らの結果は非適応的なアルゴリズムとのみ比較したときの近似性能を保証しているのに対して，我々の結果は適応的なアルゴリズムとも比較した保証である．よって，もし適応的アルゴリズムが最適な非適応的アルゴリズムよりも良い解を計算する場合，我々の保証の方がより強い結果であるといえる．実際，そのような問題例が存在することも本報告で示す．

一つ目の鈍感戦略が予算制約を違反することについて少し補足しよう．本報告で扱う予算制約は，劣モジュラ関数最大化の文脈で扱われる**ナップサック制約**に対応する．ナップサック制約下の劣モジュラ集合関数最大化問題では，非適応的な設定で $(1 - 1/e)$ 近似を達成するアルゴリズムとして唯一知られているものは解の部分列挙と貪欲法を組み合わせたものとなっている．しかし，適用的な設定では部分列挙を行うことはできないので，予算制約を違反せずに $(1 - 1/e)$ 近似を達成することは簡単ではない．このため，我々は予算制約を 2 倍の範囲内で違反することを考えた．Golovin と Krause [12] による集合関数の適応的な最大化についての研究においても同じアプローチがとられている．

構成

本報告は次のように構成されている．2 章では，集合関数や整数格子上の関数に関する劣モジュラ性の概念を導入する．3 章では，整数格子上の関数最大化について，適応的な設定を定義し，適応的劣モジュラ性や適応的単調性の概念を導入する．4 章では，整数格子上の適応的単調劣モジュラ関数の最大化問題に含まれる具体的な応用例として，予算配分問題と無線センサーへの電力配分を紹介する．5 章では適応的アルゴリズムの性能について理論的な成果を紹介する．

2. 準備

集合関数の劣モジュラ性

V を有限集合とし，$f\colon 2^V \to \mathbb{R}_+$ を V の全ての部分集合からなる族上で定義された関数とする．ただし，$\mathbb{R}_+$ は非負実数の集合である．f が以下の条件を満たすとき，**劣モジュラ**であるという:

$$f(X) + f(Y) \geq f(X \cap Y) + f(X \cup Y) \quad (\forall X, Y \in 2^V). \tag{1}$$

(1) の性質は関数 f が $X \subseteq Y$ を満たす任意の $X, Y \in 2^V$ と $v \in V \setminus Y$ について

$$f(X \cup \{v\}) - f(X) \geq f(Y \cup \{v\}) - f(Y)$$

を満たすことと同値であることが知られている．この性質は限界効用逓減性などとも呼ばれ，劣モジュラ性が多くの組合せ最適化問題で重要な概念であると考えられる理由の一つである．

劣モジュラ関数最大化問題とは，劣モジュラ集合関数 $f\colon 2^V \to \mathbb{R}_+$ が与えられたとき，ある制約の下で $f(U)$ を最

大化する $U \in 2^V$ を計算する最適化問題のことである．本研究では制約として**サイズ制約**と**ナップサック制約**を取り上げる．サイズ制約では，解 U は与えられた整数 $k \in \mathbb{Z}_+$ について $|U| \le k$ を満たす必要がある．ナップサック制約では，容量関数 $c\colon V \to \mathbb{R}_+$ と $k \in \mathbb{R}_+$ が与えられ，解 U は $\sum_{v \in U} c(v) \le k$ を満たさなければならない．

関数 $f\colon 2^V \to \mathbb{R}_+$ が $X \subseteq Y$ であるような任意の $X, Y \in 2^V$ に対して $f(X) \le f(Y)$ を満たすとき，f を**単調**であるという．劣モジュラ関数最大化問題ではしばしば，目的関数 f が単調であると仮定される．Sviridenko [18] はナップサック制約の下で単調劣モジュラ関数を最大化する問題に対して $(1-1/e)$ 近似アルゴリズムを与えた．ここで，実数 $\alpha \in [0,1]$ に対してアルゴリズムが α 近似であるとは，任意の $X \in 2^V$ に対して $f(U) \ge \alpha f(X)$ であるような解 U を出力することが保証できることを意味する．サイズ制約の下で単調劣モジュラ関数を最大化する問題の特殊ケースとして k 被覆問題と呼ばれる問題がある．この問題には $\mathrm{NP} \subseteq \mathrm{DTIME}(n^{\mathrm{O}(\log\log n)})$ でない限り $(1-1/e)$ 近似よりも良い性能を持つ多項式時間アルゴリズムが存在しないことが Feige [8] によって証明されている．サイズ制約はナップサック制約の一種であるので，Sviridenko のアルゴリズムより良い性能を達成することは不可能であると考えられる．

様々な最適化問題が劣モジュラ集合関数の最大化問題として定式化できる．よって，この問題に対するアルゴリズムの有用性は非常に大きいということができる．1 章で述べた通り，そのような応用の一つとして影響力最大化問題がある．影響力最大化問題では，点集合 V を持つネットワークが与えられときに，シード集合 $U \in 2^V$ を選ぶことが求められる．点が U の要素として選ばれると，ネットワークを通して他の点に影響を及ぼす状況を考える．この影響が伝播する過程は，ある確率的な過程としてモデル化される．問題の目的は影響を受けた点の数を最大化することである．Kempe, Kleinberg, Tardos [14] は影響の伝播モデルとして独立カスケードモデルや線形閾値モデルと呼ばれるモデルを考え，これらの場合では影響を受けた点の数の期待値が単調劣モジュラ集合関数で表現できることを指摘した．これに基づき，単調劣モジュラ集合関数の最大化アルゴリズムがこれらの伝播モデルにおける影響力最大化問題に適用できることを示した．

整数格子上の劣モジュラ関数

$\mathbb{Z}_+$ を非負の整数からなる集合とし，$\mathbb{Z}_+^V$ を各次元が V の要素と関連づけられた非負整数ベクトルの集合とする．二つのベクトル $x, y \in \mathbb{Z}_+^V$ が任意の $v \in V$ に対して $x(v) \le y(v)$ を満たすとき，$x \le y$ と書く．$x \vee y$ と $x \wedge y$ は，全ての $v \in V$ に対して $(x \vee y)(v) = \max\{x(v), y(v)\}$ と $(x \wedge y)(v) = \min\{x(v), y(v)\}$ によって定義される $\mathbb{Z}_+^V$ 上のベクトルをそれぞれ表すとする．$f\colon \mathbb{Z}_+^V \to \mathbb{R}_+$ を各次元が V の要素に対応する整数格子上で定義された関数とする．関数 f が（整数格子上で）**劣モジュラ**であるとは，

$$f(x) + f(y) \ge f(x \wedge y) + f(x \vee y) \quad (\forall x, y \in \mathbb{Z}_+^V) \quad (2)$$

を満たすこととして定義される．$x \le y$ であるような任意のベクトル $x, y \in \mathbb{Z}_+^V$ について関数 f が $f(x) \le f(y)$ を満たすとき，f は**単調**であるという．任意の $v \in V$ に対してその特性ベクトルを χ_v で表す．つまり，χ_v は $\mathbb{Z}_+^V$ 上のベクトルであり，$\chi_v(v) = 1$ かつ任意の $u \in V \setminus \{v\}$ に対して $\chi_v(u) = 0$ であるようなものとする．Soma ら [17] は，f が単調劣モジュラであるとき，任意の $k \in \mathbb{Z}_+$ と $x \le y$ であるような任意の $x, y \in \mathbb{Z}_+^V$ に対して

$$f(x \vee k\chi_v) - f(x) \ge f(y \vee k\chi_v) - f(y)$$

が成り立つことを示した．

整数格子上の劣モジュラ関数は劣モジュラ集合関数を含む概念である．なぜなら，ベクトル x と y が 2^V 上のベクトルである場合，条件 (2) は条件 (1) と一致するからである．任意のベクトル $x \in \mathbb{Z}_+^V$ と $v \in V$ に対して整数格子上の関数 f が

$$f(x + \chi_v) - f(x) \ge f(x + 2\chi_v) - f(x + \chi_v) \qquad (3)$$

を満たすとき，f は**限界効用逓減性**をもつという．整数格子上の劣モジュラ関数は必ずしも限界効用逓減性を持つとは限らない．

関数 $f\colon \mathbb{Z}_+^V \to \mathbb{R}_+$ の最大化問題では，$f(x)$ を最大化するようなベクトル $x \in \mathbb{Z}_+^V$ を求めることが目的である．ナップサック制約下の最大化問題では，入力として $b \in \mathbb{Z}_+^V$ と $k \in \mathbb{Z}_+$, $c\colon V \times \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}_+$ が与えられる．整数 $i \in \mathbb{Z}_+$ に対して集合 $\{0, 1, \ldots, i\}$ を $[i]$ と記述する．ベクトル $x \in \mathbb{Z}_+^V$ に対して $\sum_{v \in V} \sum_{i \in [x(v)]} c(v, i)$ を $c(x)$ と記述する．ナップサック制約では解 x が $x \le b$ かつ $c(x) \le k$ である必要がある．任意の $v \in V$ と $i \in \mathbb{Z}_+$ について $c(v, i) = 1$ であるとき，特にサイズ制約と呼ぶ．

Soma ら [17] はナップサック制約をもつ整数格子上の単調劣モジュラ関数最大化問題に対して，$(1-1/e)$ 近似アルゴリズムを与えた．さらに，整数格子上の単調劣モジュラ関数最大化問題が，応用上で現れる様々な最適化問題を含む一般的な枠組みであることを示した．その中には，Alon ら [2] によって導入された予算配分問題も含まれる．このことはつまり，整数格子上の劣モジュラ関数が劣モジュラ集合関数では表現できないような応用を多く持つことを意味している．

3. 整数格子上の適応的劣モジュラ性と適応的単調性

本報告で議論する，整数格子上で定義された関数の最大化問題を定義する．P を $v \in V$ と $i \in [b(v)]$ のペア (v,i) からなる集合と定義する．O を**状態**の集合とし，P に属する各ペアは O に属するいずれかの状態を確率的にとると仮定する．ただしこのとき，各ペアのとる状態は独立に決まるとは限らない．記号 $*$ は状態が未観測であることを意味するとし，$O^* := O \cup \{*\}$ と定義する．

P に属する全てのペアの状態を，関数 $\phi\colon P \to O^*$ で表現する．この関数のことを，**実現**と呼ぶことにする．実現 ϕ の**領域**とは $\{(v,i) \in P\colon \phi(v,i) \neq *\}$ のことを指し，$\mathrm{dom}(\phi)$ で表す．本報告では，領域が下向きに閉じているような実現のみ考える．つまり，もし $(v,i) \in \mathrm{dom}(\phi)$ であった場合，任意の $j \leq i$ に対して $(v,j) \in \mathrm{dom}(\phi)$ が成り立っていることを仮定する．領域 $\mathrm{dom}(\phi)$ から，$\mathbb{Z}_+^V$ に属するベクトルを定義できる．このベクトルの v に対応する次元の値は $\max\{i \in \mathbb{Z}_+\colon (v,i) \in \mathrm{dom}(\phi)\}$ とする．以下では領域 $\mathrm{dom}(\phi)$ とこのベクトルを同一視する．$\mathrm{dom}(\phi) = P$ であるような実現 ϕ を**完全実現**と呼ぶ．Φ^* を全ての（下向きに閉じている）実現の集合とし，Φ を全ての完全実現の集合とする．任意の $(v,i) \in \mathrm{dom}(\phi')$ に対して $\phi'(v,i) = \phi(v,i)$ が成り立つとき，実現 ϕ は実現 ϕ' を**拡張する**といい，$\phi \sim \phi'$ と記す．

完全実現 $\phi \in \Phi$ は確率 $p(\phi)$ で発生するとする．もし $\phi' \in \Phi^*$ が完全ではない実現の場合，ϕ' が発生する確率は $\sum_{\phi \in \Phi, \phi \sim \phi'} p(\phi)$ となる．以降，この値を $p(\phi')$ と書くことにする．

ベクトル $x \in \mathbb{Z}_+^V$ から決まる目的関数値 $f(x)$ は $\mathrm{dom}(\phi) = x$ であるような実現 $\phi \in \Phi^*$ に依存する．しかしながら，ペア $(v,i) \in P$ の状態はあらかじめ分からない．与えられる情報は，確率 $p(\phi)$ $(\phi \in \Phi)$ だけである．ベクトル x は初期状態では $x \equiv 0$ と設定される．適応的アルゴリズムは，x が $f(x)$ を最大化するように段階的に x の要素の値を増加させるとする．その過程で x を減少させることはできず，常に制約 $c(x) \leq k$ と $x \leq b$ を満たしていなければならない．アルゴリズムが $x(v)$ の値を i に設定すると，任意の $j \in [i]$ に対してペア (v,j) の状態 $\phi(v,j)$ を観察することができる．アルゴリズムはその観察結果を下に，その後の振る舞いを決定することができる．以降，そのような適応的な動作を定義したものを**戦略**と呼ぶ．問題の目的は，最終的に得られるベクトル x が目的関数値 $f(x)$ を最大化するような戦略を求めることである．

戦略 π を考える．x_π で，戦略 π によって出力されるベクトルを表す．実現は確率的に決まるため，x_π は確率変数からなるベクトルである．戦略 π として確率的に動作するものを考えることもある．この場合，x_π は戦略 π 自身のランダムネスにも依存する．$f_{\mathrm{avg}}(\pi)$ を $E[f(x_\pi)]$ とする．つまり，戦略 π を実行したときに得られる目的関数値の期待値である．本研究では戦略 π の性能の指標として $f_{\mathrm{avg}}(\pi)$ を用いる．

$\phi \in \Phi$ を完全実現とする．関数 $f_\phi\colon \mathbb{Z}_+^V \to \mathbb{R}$ を，ベクトル $x \in \mathbb{Z}_+^V$ に対して ϕ が発生したときの $f(x)$ の値を返す関数とする．すでに仮定したように，$f(x)$ は $\{\phi(v,i)\}_{v \in V, i \in [x(v)]}$ にのみ依存するため，任意の $v \in V$ と $i \in [x(v)]$ に対して $\phi(v,i) = \phi'(v,i)$ を満たすような完全実現 $\phi, \phi' \in \Phi$ については $f_\phi(x) = f_{\phi'}(x)$ が成立する．

実現 $\phi \in \Phi^*$ とペア $(v,i) \in P$ について

$$\Delta(v,i \mid \phi) := E\left[f_\psi(\mathrm{dom}(\phi) \vee i\chi_v) - f_\psi(\mathrm{dom}(\phi)) \mid \psi \in \Phi, \psi \sim \phi\right]$$

と定義する．つまり，$\Delta(v,i \mid \phi)$ は，現在の実現が ϕ であるという条件の下，ベクトル $\mathrm{dom}(\phi)$ の v に対応する要素が増加して i になったときに得られる目的関数値の増加量の期待値である．

また，実現 $\phi \in \Phi$ と戦略 π より，$\Delta(\pi \mid \phi) := E\left[f_\psi(\mathrm{dom}(\phi) \vee x_\pi) - f_\psi(\mathrm{dom}(\phi)) \mid \psi \in \Phi, \psi \sim \phi\right]$ を定義する．つまり，$\Delta(\pi \mid \phi)$ はベクトル $\mathrm{dom}(\phi)$ を選択した後，得られた情報を無視して戦略 π を走らせたときに得られる目的関数値の増加量の期待値のことである．ここのとき，期待値は実現のランダムネスに依存しており，ベクトル $\mathrm{dom}(\phi)$ を選択した後実現 ϕ が観察されるという条件の下での期待値のことである．また，π が確率的に挙動する戦略の場合は，期待値は π に含まれるランダムネスにも依存する．

定義 1 (適応的単調性)．任意のペア $(v,i) \in P$ と $p(\phi) > 0$ であるような任意の実現 $\phi \in \Phi^*$ について $\Delta(v,i \mid \phi) \geq 0$ であるとき，f が（確率 $p(\phi)$, $\phi \in \Phi$ について）**適応的単調**であるという．

定義 2 (適応的劣モジュラ性)．$\phi \sim \psi$ かつ $p(\phi) > 0$ であるような任意の実現 $\phi, \psi \in \Phi^*$ と任意のペア $(v,i) \in P \setminus \mathrm{dom}(\phi)$ について $\Delta(v,i \mid \phi) \leq \Delta(v,i \mid \psi)$ であるとき，f が **適応的劣モジュラ**であるという．

4. 応用

この章では，整数格子上の適応的単調劣モジュラ関数の最大化が，応用上重要な問題を含んでいることを紹介する．

4.1 二部グラフ伝播モデルにおける予算配分問題

最初に，Alon ら [2] によって導入された二部グラフ伝播モデルにおける予算配分問題を導入する．広告の集合 V，潜在顧客の集合 U を点集合として持つ二部グラフ $(V,U;E)$ を考える．このとき，E は広告と潜在顧客を結ぶ辺からなる集合である．入力として，$b \in \mathbb{Z}_+^V$ と $k \in \mathbb{Z}_+$，$c\colon V \times \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}_+$ が与えられる．加えて，点 $v \in V$ と

$u \in U$ を結ぶ辺 $vu \in E$ について，関数 $q_{vu}\colon \mathbb{Z}_+ \to [0,1]$ が与えられる．$i \in [b(v)]$ としたとき，$q_{vu}(i)$ は広告 v が i 回目の試行で潜在顧客 u に影響を与えるのに成功する確率を表す．

広告 v を i 回実行するのに，コスト $\sum_{j\in[i]} c(v,j)$ がかかるとし，予算 k を広告に配分することを考える．点 v について，二部グラフにおける v の隣接点からなる集合を $N(v)$ で記す．広告への予算配分 $x \in \mathbb{Z}_+^V$ を定めると，広告 v は $N(v)$ に属する潜在顧客に対し $x(v)$ 回の試行を試みる．このとき，各試行は独立であるとする．広告 v がそれぞれ予算 $x(v)$ を割り当てられたときに，影響を受ける潜在顧客の数の期待値を $g(x)$ で表す．つまり，$g(x)$ は以下のようになる．

$$g(x) = \sum_{u\in U}\left(1 - \prod_{v\in N(u)}\prod_{i=1}^{x(v)}(1 - q_{vu}(i))\right). \qquad (4)$$

このとき，g を最大化する問題は，影響を受ける潜在顧客の数の期待値を最大化するような予算の配分 x を求める問題と一致する．Soma ら [17] はこの関数 g が単調劣モジュラであることを示した．

この問題の適応的な設定では，$P = \{(v,i)\colon v \in V, i \in [b(v)]\}$ とし，各ペア $(v,i) \in P$ の状態は広告 v の i 回目の試行で影響を受けた潜在顧客の集合 $U \subseteq N(v)$ として定義される．広告 v が i 回目の試行を終えた後，この試行によってどの潜在顧客が影響を受けたか観察できると仮定する．状態 U が発生する確率は

$$p_{v,i}(U) := \prod_{u\in U} q_{vu}(i) \prod_{u'\in N(v)\setminus U}(1 - q_{vu'}(i))$$

となる．$\phi \in \Phi^*$ をある実現とする．この実現の下，それぞれのペア $(v,i) \in \mathrm{dom}(\phi)$ について，広告 v の i 回目の試行によって影響を受けた潜在顧客の集合を $U_{v,i} \subseteq N(v)$ と記述する．このとき，ϕ が発生する確率 $p(\phi)$ は $\prod_{(v,i)\in P} p_{v,i}(U_{v,i})$ となる．広告への予算の配分が $x \in \mathbb{Z}_+^V$ であるときに，影響を受ける顧客の数は

$$f_\phi(x) = \left|\bigcup_{(v,i)\in P: i\in[x(v)]} U_{v,i}\right|$$

となる．f を，完全実現 ϕ が発生したときには f_ϕ に一致する関数とする．すると，影響を受ける潜在顧客の数を適応的に最大化する問題は，f を適応的に最大化する問題として定式化できる．

上のように定義された f が適応的単調劣モジュラであることを証明しよう．$\psi \in \Phi^*$ を任意の実現とする．ψ を拡張する完全実現 $\phi \in \Phi$ について，$w(\phi)$ を ψ が観察されたという条件の下 ϕ が発生する確率と定義する．任意の ϕ について $w(\phi) \geq 0$ であり，$\sum_{\phi\in\Phi:\phi\sim\psi} w(\phi) = 1$ が成り立つ．$(v,i) \in P$ としたとき，$\Delta(v,i \mid \psi)$ は，$\sum_{\phi\in\Phi:\phi\sim\psi} w(\phi)(f_\phi(\mathrm{dom}(\psi) \vee i\chi_v) - f_\phi(\mathrm{dom}(\psi)))$ と表現できる．このことと，f_ϕ が任意の $\phi \in \Phi$ について単調であることから，f が適応的単調であることが示される．

次に，f の適応的劣モジュラ性を示す．$\psi, \phi \in \Phi^*$ を任意の実現とし，ϕ は ψ を拡張しているとする．$(v,i) \in P\backslash\mathrm{dom}(\phi)$ とし，ベクトル $\mathrm{dom}(\phi)$ の $v \in V$ に対応する次元の値を j とする．u を，実現 ϕ ではまだ影響を受けていない潜在顧客のうち v と隣接するものとしよう．つまり，$u \in X := N(v) \setminus \bigcup_{(v',i')\in\mathrm{dom}(\phi)} U_{v',i'}$ である．v の $j+1$ 回目の試行から i 番目の試行までに u が影響を受ける確率は $1 - \prod_{i'=j+1}^{i}(1 - q_{vu}(i'))$ である．これより，$\Delta(v,i \mid \phi)$ は

$$\Delta(v,i \mid \phi) = \sum_{u\in X}\left(1 - \prod_{i'=j+1}^{i}(1 - q_{vu}(i'))\right)$$

と表される．同様にして，$X' := N(v) \setminus \bigcup_{(v',i')\in\mathrm{dom}(\psi)} U_{v',i'}$，$j'$ をベクトル $\mathrm{dom}(\psi)$ の $v \in V$ に対応する次元の値をとしたとき，$\Delta(v,i \mid \psi)$ は

$$\Delta(v,i \mid \psi) = \sum_{u\in X'}\left(1 - \prod_{i'=j'+1}^{i}(1 - q_{vu}(i'))\right)$$

となる．$\phi \sim \psi$ から，$X \subseteq X'$ かつ $j \geq j'$ が成り立つので，$\Delta(v,i \mid \phi) \leq \Delta(v,i \mid \psi)$ が成り立つ．

4.2 無線基地局への電力配分

V を無線基地局の集合とし，それぞれの基地局に電力を割り当てることを考える．基地局への電力配分のレベルを非負整数で表すとし，ベクトル $x \in \mathbb{Z}_+^V$ で全ての基地局への配分を表現する．基地局 $v \in V$ へ割り当てることができる電力の最大レベルを $b(v)$ とする．基地局 $v \in V$ にレベル $i \in [b(v)]$ を割り当てると v には電力 $c(v,i)$ が供給されるとする．全体で割り当てられる電力の合計を k とする．つまり，電力配分 x は制約 $x \leq b$ と $c(x) \leq k$ を満たさなければならない．

すべての基地局はある空間 S 内に配置されているとし，基地局 v が電力レベル i を割り当てられたときに計測できる空間を $C(v,i) \subseteq S$ で表す．電力が増えるごとに基地局が発する信号の強度が大きくなるためその基地局の被覆範囲は広がるとしてよい．つまり，任意の $v \in V$ と $i \leq j$ であるような $i, j \in [b(v)]$ について，$C(v,i) \subseteq C(v,j)$ が成り立つと仮定する．問題の目的は，無線ネットワークを使用するユーザーの位置が正確には分からないという状況下で，なるべく多くのユーザーを被覆することができるよう適応的に電力を分配することである．このとき，任意の $S' \subseteq S$ について，関数 $p_{S'}\colon \mathbb{Z}_+ \to [0,1]$ が与えられているとする．任意の $j \in \mathbb{Z}_+$ に対し，$p_{S'}(j)$ は空間 S' 内にちょうど j 人のユーザーが存在する確率を表す．定義より，もし $S' \subseteq S'' \subseteq S$ ならば，$\sum_{j\in\mathbb{Z}_+} jp_{S'}(j) \leq \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} jp_{S''}(j)$

が成り立つ．

適応的なアルゴリズムでは，最初に各基地局の電力レベルを最低値に設定し，その後に基地局の電力レベルを増加させる．電力を割り当てた際，基地局によって何人のユーザーが被覆できたかを観測することができるとする．ペア $(v,i) \in P := \{(v,i)\colon v \in V, i \in [b(v)]\}$ の状態は，基地局 v が電力レベル i を割り当てられたときに被覆されたユーザーの数として定義される．観測に基づきどの基地局がより大きな電力が割り当てられるかを決定するが，このとき基地局の電力を減らすことは許されないとする．これは，一度ネットワークにつながったユーザーの通信を途中で打ち切ることは望ましくないという理由からである．また別の応用として，V が無線センサーの集合であり，ユーザーの代わりに計測の対象となるターゲットを被覆しようとする場合，一度被覆範囲に入ったターゲットの計測を途中で取りやめるのが望ましくないという理由も考えられる．

電力の配分が $x \in \mathbb{Z}_+^V$ であるときに被覆されるユーザーの数を $f(x)$ と定義する．以下では，この関数 f が適応的単調劣モジュラであることを証明する．

ある実現 $\phi \in \Phi^*$ とペア $(v,i) \in P \setminus \mathrm{dom}(\phi)$ を考える．また，$x := \mathrm{dom}(\phi)$ とし，C_ϕ は電力配分 x のときに全ての基地局によって被覆される空間を表すとする（つまり，$C_\phi = \bigcup_{v' \in V} C(v', x(v'))$）．すると，$\Delta(v,i \mid \phi) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} j p_{C(v,i) \setminus C_\phi}(j)$ となる．この右辺は非負であるので，$\Delta(v,i \mid \phi) \geq 0$ が成り立つ．つまり，f は適応的単調である．

次に，$\phi, \psi \in \Phi^*$ を $\phi \sim \psi$ かつ $p(\phi) > 0$ であるような実現とする．$(v,i) \in P \setminus \mathrm{dom}(\phi)$ を考える．現在の電力配分が $\mathrm{dom}(\phi)$ であるときに，基地局 v の電力レベルを i に増やすことによって新たに被覆される空間は $C(v,i) \setminus C_\phi$ である．現在の電力配分が $\mathrm{dom}(\psi)$ であるときには，同様の空間は $C(v,i) \setminus C_\psi$ となる．$\phi \sim \psi$ から $C_\psi \subseteq C_\phi$ が成り立つので，$C(v,i) \setminus C_\phi \subseteq C(v,i) \setminus C_\psi$ となる．よって，$\Delta(v,i \mid \phi) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} j p_{C(v,i) \setminus C_\phi}(j) \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} j p_{C(v,i) \setminus C_\psi}(j) = \Delta(v,i \mid \psi)$ が成立する．つまり，f は適応的劣モジュラである．

5. 適応的貪欲アルゴリズム

本章では，ナップサック制約下で整数格子上の適応的単調劣モジュラ関数を最大化する貪欲アルゴリズムの性能を解析する．まず，敏感戦略の性能が非適応的な貪欲アルゴリズムと比較しても悪いことを示す．次に，鈍感戦略の二つの変種の性能を解析する．

5.1 敏感貪欲戦略

まず，敏感貪欲戦略を定義する．ある反復が始まった際，アルゴリズムがベクトル $x \in \mathbb{Z}_+^V$ と $\mathrm{dom}(\phi) = x$ であるような実現 $\phi \in \Phi^*$ を保持しているとする．このとき，アルゴリズムは $(v,i) := \arg\max \Delta(v,i \mid \phi)/(\sum_{j \in [i]} c(v,j))$ を計算する．ただし，この定義で max は，$x \vee i\chi_v$ が制約を満たすような全ての $(v,i) \in P$ に対してとられている．その後，アルゴリズムは $x(v)$ を 1 だけ増加させ，次の反復へと移る．このような反復が，$c(x) < k$ である限り繰り返される．

二部グラフ伝播モデルにおける予算配分問題において，敏感貪欲戦略の性能が非適応的な貪欲アルゴリズムよりも悪くなるような問題例が存在することを示そう．二部グラフ伝播モデルでの予算配分問題の定義や記法については，4.1 章での記述に従うこととする．V を $\{v, v'\}$ とし，k を非負整数，ϵ を正の実数とする．点 v は k 個の点 $u_1, \ldots, u_k \in U$ に，v' は点 $u' \in U$ のみに隣接しているとする．このとき，u' は $u_1, \ldots, u_k$ のどの点とも異なる点とする．ベクトル $b \in \mathbb{Z}_+^V$ を $b(v) = k$ と $b(v') = 1$ で定義する．各辺に関連づけられた確率 q は次のように定義される．辺 vu_1 に対しては，

$$q_{vu_1}(j) = \begin{cases} 1-\epsilon & j = 1, \\ 0 & j = 2, \ldots, k-1, \\ \epsilon & j = k. \end{cases}$$

任意の $i = 2, \ldots, k$ について，辺 vu_i に対しては

$$q_{vu_i}(j) = \begin{cases} 0 & j = 1, \ldots, k-1, \\ 1-\epsilon & j = k. \end{cases}$$

辺 $v'u'$ に対しては，$q_{v'u'}(1) = 1-\epsilon$ となる．f をこれらのパラメータによって定義される予算配分問題の目的関数とする．容量関数 c は V に属する点と非負整数の任意のペアに対して 1 を返すとする．このとき，ナップサック制約を満たすためには $x(v) + x(v') \leq k$ が成立しなければならない．

ϕ を初期の状態とする．つまり，$\mathrm{dom}(\phi) = \emptyset$ である．このとき，$\Delta(v,1 \mid \phi) = \cdots = \Delta(v,k-1 \mid \phi) = \Delta(v',1 \mid \phi) = 1-\epsilon$ かつ $\Delta(v,k \mid \phi) = k(1-\epsilon) + \epsilon^2$ が成立する．$\Delta(v,k \mid \phi)/k > 1-\epsilon$ であるので，非適応的な貪欲アルゴリズム π^* は $x(v) = k$ かつ $x(v') = 0$ であるようなベクトル x を解として出力する．よって，$f_{\mathrm{avg}}(\pi^*) = k(1-\epsilon) + \epsilon^2$ が成り立つ．

一方で，敏感戦略 π はまず $x(v)$ を 1 に増やす．このとき，u_1 は確率 $1-\epsilon$ で影響を受ける．ψ を u_1 が影響を受けるときの実現とする．すると，$\Delta(v,k \mid \psi) = (1-\epsilon)(k-1)$ かつ $\Delta(v',1 \mid \psi) = 1-\epsilon$ が成立する．よって，$\Delta(v,k \mid \psi)/k < \Delta(v',1 \mid \psi)/1$ が成り立つ．これより，u_1 が影響を受ける場合は，次の反復で π は $x(v')$ を 1 に増やす．このとき，その後の反復で $x(v)$ は高々 $k-1$ までしか増やせないので，π が終了したときの $f(x)$ の期待値は $1+(1-\epsilon) = 2-\epsilon$ である．もし u_1 が最初の反復で影響をうけないときには，

π は $x(v)$ を k まで増やす．このとき，π が終了したときの $f(x)$ の期待値は $\epsilon+(1-\epsilon)(k-1)$ である．これらより，$f_{\mathrm{avg}}(\pi)=(1-\epsilon)(2-\epsilon)+\epsilon(\epsilon+(1-\epsilon)(k-1))$ が成り立つ．

k が十分大きいとき，$f_{\mathrm{avg}}(\pi)/f_{\mathrm{avg}}(\pi^*)$ は ϵ に収束する．ϵ は任意の正実数に設定できるので，$f_{\mathrm{avg}}(\pi)/f_{\mathrm{avg}}(\pi^*)$ がいくらでも悪くなるような問題例が存在することが分かる．

5.2 鈍感貪欲戦略

本節では二つの鈍感貪欲戦略を与える．二つのうちのひとつは近似比 $(1-1/e)$ を達成する．出力される解 x はナップサック制約 $c(x)\le k$ を満たさないが，常に $c(x)\le 2k$ かつ $E[c(x)]\le k$ を満たす．もう一方の戦略は常に制約を満たす解を出力するが，その代わり近似比は $(e-1)/(2e)$ となる．スペースの都合上，証明の多くは本報告では省略する．

まず，いくつかの定義と補題を与える．二つの戦略 π と π' について，それらの**連結** $\pi@\pi'$ を次のように定義する．まず，戦略 π を走らせて，ベクトル x_π を得る．次に，π を走らせているときに得られた情報を無視して，戦略 π' を走らせてベクトル $x_{\pi'}$ を計算する．$\pi@\pi'$ は $x_\pi\vee x_{\pi'}$ を出力する．

非乱択戦略 π と $i\in[k]$ について，π_i を π の**切断**と呼び，次のように定義する．完全実現 ϕ について π_i がどのように振る舞うかを定義しよう．x を π が保持しているベクトルとする．$c(x)$ が i を超えた時刻を θ と呼ぶ．時刻 θ の瞬間に π は $x(v)$ を増やしているとしよう．θ_0 を，θ 以前に π が $x(v)$ 以外の x の要素を増加させている瞬間で最も遅い時刻とする．もしそのような瞬間がなければ，θ_0 は π が走り出した瞬間と定義する．同様に，θ_1 を θ 以降で π が $x(v)$ 以外の要素を増やしていた最も早い時刻と定義する．もしそのような瞬間がなければ，θ_1 は π が終了した時刻とする．時刻 θ_0 に $x(v)=j_0$ かつ $c(x)=i_0$ であり，時刻 θ_1 に $x(v)=j_1$ かつ $c(x)=i_1$ であるとする．時刻 θ_0 までは，π_i は π と同様に振る舞う．その後，π_i は確率 $(i-i_0)/(i_1-i_0)$ で $x(v)$ を j_1 まで増やし終了する．それ以外の場合では，π_i は $x(v)$ を増やすことなく時刻 θ_0 に終了する．π_i は任意の完全実現 ϕ に対して $E[c(x)]\le i$ であるようなベクトル x を解として出力する．ただし，ここでの期待値は π_i に含まれるランダムネスによって決まるものである．

補題 1. f が適応的単調であるための必要十分条件は，任意の戦略 π と π' に対し，$f_{\mathrm{avg}}(\pi)\le f_{\mathrm{avg}}(\pi'@\pi)$ が成り立つことである．

補題 2. f を適応的単調劣モジュラ関数とする．$\phi\in\Phi^*$ を $p(\phi)>0$ であるような実現とし，π^* を任意の戦略とする．このとき，

$$\Delta(\pi^*\mid\phi)\le E[c(\pi^*)\mid\phi]\max_{(v,i)\in P}\frac{\Delta(v,i\mid\phi)}{\sum_{j\in[i]}c(v,j)}.$$

以降，戦略 π を以下のように定義する．一般性を失うことなく，すべての $v\in V$ について $c(b(v)\chi_v)\le k$ が成り立つとする．$x\equiv 0$ から始まり，π は $\Delta(v,i\mid\psi)/(\sum_{j\in[i]}c(v,j))$ を最大化するペア $(v,i)\in P$ を計算し，$x(v)$ を i まで増加させる．ただし，ψ はその時点での実現を指す．π はこの操作を繰り返し，$c(x)\ge k$ となったら終了する．本節では，この戦略の切断 π_k が $(1-1/e)$ 近似であることを証明する．π_k の詳細は戦略 1 に記述する．

戦略 1 $(1-1/e)$ 近似戦略

入力: 有限集合 V，適応的単調劣モジュラ関数 $f\colon\mathbb{Z}_+^V\to\mathbb{R}_+$，$k\in\mathbb{R}_+$，$b\in\mathbb{Z}_+^V$，$c\colon V\times\mathbb{Z}_+\to\mathbb{R}_+$
出力: $c(x)\le 2k$ かつ $x\le b$ であるようなベクトル $x\in\mathbb{Z}_+^V$

```
∀v ∈ V : x(v) ⟵ 0
∀(v,i) ∈ P : ψ(v,i) ⟵ ∗
while c(x) < k do
    (v,i) ← argmax_{(v,i)∈P} Δ(v,i | ψ)/(Σ_{j∈[i]} c(v,j))
    C ⟵ Σ_{j=x(v)+1}^{i} c(v,j)
    if c(x) + C > k then
        確率 (k − Σ_{v'∈V} Σ_{j∈[x(v')]} c(v',j))/C で x を出力して終了
    end if
    x(v) ⟵ max{x(v), i}
    (v,i') ∉ dom(ψ) であるような任意の i' ≤ i について，ψ(v,i') ⟵ (v,i') の状態を代入
end while
x を出力
```

ある戦略が任意の完全実現について常に $x\le b$ かつ $E[c(x)]\le k$ であるようなベクトル x を出力するとき，その戦略は**実行可能**であるという．ただし，$E[c(x)]$ は戦略の内部のランダムネスにのみ依存する期待値である．

定理 1. f が適応的単調劣モジュラであるならば，戦略 *1* で与えられた戦略 π_k は任意の実行可能戦略 π^* について $f_{\mathrm{avg}}(\pi_k)\ge(1-1/e)f_{\mathrm{avg}}(\pi^*)$ を満たす．さらに，π_k は実行可能であり，常に $c(x)\le 2k$ を満たすベクトル x を出力する．

次に，常に $x\le b$ でありかつ $c(x)\le k$ であるようなベクトル x を出力する戦略を，戦略 2 で与える．この戦略の近似比は，以下の定理で示すとおり $(e-1)/(2e)$ である．

定理 2. もし f が適応的単調劣モジュラであるならば，戦略 *2* で与えられる戦略 π' は常に $x\le b$ かつ $c(x)\le k$ であるようなベクトル $x\in\mathbb{Z}_+^V$ を出力し，任意の実行可能戦略 π^* に対して $f_{\mathrm{avg}}(\pi')\ge(e-1)/(2e)\cdot f_{\mathrm{avg}}(\pi^*)$ を満たす．

参考文献

[1] The Washington Post: Mad Money: TV ads in the 2012 presidential campaign, http://www.washingtonpost.com/wp-srv/special/politics/track-presidential-campaign-ads-2012/, November 14, 2012.

[2] Alon, N., Gamzu, I. and Tennenholtz, M.: Optimizing budget allocation among channels and influencers, *21st International Conference on World Wide Web*

戦略 2 $(e-1)/(2e)$ 近似戦略

入力: 有限集合 V, 適応的単調劣モジュラ関数 $f\colon \mathbb{Z}_+^V \to \mathbb{R}_+, k \in \mathbb{R}_+$, $b \in \mathbb{Z}_+^V$，$c\colon V \times \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}_+$

出力: $c(x) \leq k$ かつ $x \leq b$ であるようなベクトル $x \in \mathbb{Z}_+^V$

$\forall v \in V : x(v) \longleftarrow 0$

$\forall (v,i) \in P\colon \psi(v,i) \longleftarrow *$

$v' \longleftarrow \arg\max_{v \in V} \Delta(v, b(v) \mid \psi)$

確率 1/2 で $x(v') \longleftarrow b(v')$ とし，任意の $i \in [b(v')]$ について $\psi(v',i) \longleftarrow (v',i)$ の状態とする．

while $i > x(v)$ かつ $x \vee i\chi_v$ が実行可能であるような $(v,i) \in P$ が存在する **do**

$(v,i) \longleftarrow \arg\max \Delta(v,i \mid \psi)/(\sum_{j\in[i]} c(v',j))$．ただし，右辺の最大化は $x \vee i\chi_v$ が実行可能であるような任意の $(v,i) \in P$ についてとる．

$x(v) \longleftarrow \max\{x(v), i\}$

$(v,i') \notin \mathrm{dom}(\psi)$ であるような任意の $i' \leq i$ について，$\psi(v,i) \longleftarrow (v,i')$ の状態．

end while

x を出力．

(WWW), pp. 381–388 (2012).

[3] Chen, Y., Javdani, S., Karbasi, A., Bagnell, J. A. D., Srinivasa, S. and Krause, A.: Submodular Surrogates for Value of Information, *Twenty-Ninth AAAI Conference on Artificial Intelligence (AAAI-15)*, pp. 3511–3518 (2015).

[4] Chen, Y. and Krause, A.: Near-optimal Batch Mode Active Learning and Adaptive Submodular Optimization, *30th International Conference on Machine Learning (ICML)*, pp. 160–168 (2013).

[5] Chen, Y., Shioi, H., Montesinos, C. F., Koh, L. P., Wich, S. and Krause, A.: Active Detection via Adaptive Submodularity, *31th International Conference on Machine Learning (ICML)*, pp. 55–63 (2014).

[6] Deshpande, A., Hellerstein, L. and Kletenik, D.: Approximation Algorithms for Stochastic Boolean Function Evaluation and Stochastic Submodular Set Cover, *Twenty-Fifth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA)*, pp. 1453–1466 (2014).

[7] Domingos, P. and Richardson, M.: Mining the network value of customers, *Seventh ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining (KDD)*, pp. 57–66 (2001).

[8] Feige, U.: A threshold of ln n for approximating set cover, *J. ACM*, Vol. 45, pp. 634–652 (1998).

[9] Gabillon, V., Kveton, B., Wen, Z., Eriksson, B. and Muthukrishnan, S.: Adaptive Submodular Maximization in Bandit Setting, *27th Annual Conference on Neural Information Processing Systems (NIPS)*, pp. 2697–2705 (2013).

[10] Gabillon, V., Kveton, B., Wen, Z., Eriksson, B. and Muthukrishnan, S.: Large-Scale Optimistic Adaptive Submodularity, *Twenty-Eighth AAAI Conference on Artificial Intelligence (AAAI-14)*, pp. 1816–1823 (2014).

[11] Golovin, D. and Krause, A.: Adaptive Submodular Optimization under Matroid Constraints, *CoRR*, Vol. abs/1101.4450 (2011).

[12] Golovin, D. and Krause, A.: Adaptive Submodularity: Theory and Applications in Active Learning and Stochastic Optimization, *J. Artif. Intell. Res. (JAIR)*, Vol. 42, pp. 427–486 (2011).

[13] Golovin, D., Krause, A. and Ray, D.: Near-Optimal Bayesian Active Learning with Noisy Observations, *24th Annual Conference on Neural Information Processing Systems (NIPS)*, pp. 766–774 (2010).

[14] Kempe, D., Kleinberg, J. and Tardos, E.: Maximizing the spread of influence through a social network, *Ninth ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining (KDD)*, pp. 137–146 (2003).

[15] Krause, A., Golovin, D. and Converse, S. J.: Sequential Decision Making in Computational Sustainability via Adaptive Submodularity, *AI Magazine*, Vol. 35, No. 2, pp. 8–18 (2014).

[16] Richardson, M. and Domingos, P.: Mining knowledge-sharing sites for viral marketing, *8th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*, pp. 61–70 (2002).

[17] Soma, T., Kakimura, N., Inaba, K. and Kawarabayashi, K.: Optimal Budget Allocation: Theoretical Guarantee and Efficient Algorithm, *31th International Conference on Machine Learning (ICML)*, pp. 351–359 (2014).

[18] Sviridenko, M.: A note on maximizing a submodular set function subject to a knapsack constraint, *Oper. Res. Lett.*, Vol. 32, pp. 41–43 (2004).