

代用電荷法による数値等角写像のための2つの定式化の比較

天 野 要†

与えられた問題領域から標準領域へ、すなわち、(1) Jordan 曲線の内部から単位円の内部へ、(2) その外部から外部へ、(3) 2つの Jordan 曲線で囲まれた有界な2重連結領域から円環領域へ、という3種の等角写像を考える。Laplace 方程式の近似解法として知られている代用電荷法を適用して、これらの等角写像の簡単で精度の高い数値解を得ることができる。その方法は、最近、上記の3種の等角写像の統一的な数値計算法として再定式化されている。この論文では、数値等角写像に適用された従来の個別的な代用電荷法と再定式化された統一的な代用電荷法とを理論と数値実験の両面から比較し、いずれの定式化を選択すべきであるかを明らかにする。結論は次のとおりである：再定式化された統一的な代用電荷法は、(a) 等角写像の問題との整合性、(b) 計算手順の統一性、(c) 数値写像の精度、において従来の個別的な代用電荷法より優れている。逆に、従来の個別的な代用電荷法を選択すべき積極的な理由は見当たらない。

A Comparison between Two Formulations for the Numerical Conformal Mapping by the Charge Simulation Method

KANAME AMANO†

The charge simulation method, which is a solver suitable for Laplace's equation, has been applied to compute the following three conformal maps: (1) from a domain interior to a closed Jordan curve onto the interior of the unit disk, (2) from a domain exterior to a closed Jordan curve onto the exterior of the unit disk, and (3) from a doubly-connected domain bounded by two closed Jordan curves onto a circular annulus. They have recently been reformulated into a unified method of numerical conformal mapping of the interior, exterior and doubly-connected domains. In this paper, the original non-unified formulations and the revised unified formulation are compared for both theoretical and practical purposes. It is shown that the unified formulation is superior to the non-unified formulations in the following points: (a) consistency with the mapping problems, (b) uniformity of the computational procedures, and (c) accuracy of the numerical results.

1. はじめに

与えられた問題領域から標準領域へ、すなわち、1) Jordan 曲線の内部から単位円の内部へ、2) その外部から外部へ、3) 2つの Jordan 曲線で囲まれた有界な2重連結領域から円環領域へ、という3種の等角写像を考える。

このような等角写像の数値計算法としては Symm¹⁾⁻³⁾ の積分方程式法が著名である。これは等角写像の問題を境界上のソース密度を未知量とする第1種 Fredholm 型の積分方程式に帰着させ、そのソース密度を階段関数で近似したものである。ソース密度の近似には、その後、区分多項式を用いた Hayes⁴⁾ やスプライン関数と角点の性質を反映した特異関

数を用いた Hough & Papamichael^{5),6)} の改良が重ねられている。特に、Hough & Papamichael⁶⁾ では、Gaier^{7),8)} の提案に基づいて、Symm の積分方程式法が3種の等角写像の統一的な数値計算法として再定式化されている。しかし、実際の計算に際して、これらの定式化のいずれを選択すべきであるかについてはまだ明確な指針が与えられていない。なお、数値等角写像の研究の歴史と近年の展開については Gaier⁹⁾、Henrici¹⁰⁾、Trefethen¹¹⁾ に詳しい。

これに対して、最近、Laplace 方程式の近似解法として知られている代用電荷法^{12),13)} に基づく方法¹⁴⁾⁻¹⁶⁾ が提案されている。この方法は、数値積分を必要としない簡単な方法であるにもかかわらず、問題の領域に凹型の角点が存在しない場合には、ソース密度の近似法を改良した積分方程式法⁴⁾⁻⁶⁾ と同等またはそれ以上の計算精度を与えることができる¹⁷⁾。この代用電荷法に対しても、積分方程式法の場合と同様に、3種の等

† 愛媛大学工学部情報工学科

Department of Computer Science, Faculty of Engineering, Ehime University

角写像の統一的な数値計算法としての再定式化が可能である¹⁸⁾。しかし、従来の代用電荷法^{14)~16)}と再定式化された代用電荷法¹⁸⁾のいずれを選択すべきであるかについてはまだ明確な指針が与えられていない。

この論文では、問題領域から標準領域への上記の3種の等角写像に対する従来の個別的な代用電荷法^{14)~16)} (以下、旧定式化と呼ぶ)と再定式化された統一的な代用電荷法¹⁸⁾ (以下、新定式化と呼ぶ)とを理論と数値実験の両面から比較し、いずれの定式化を選択すべきであることを明らかにする。結論は次のとおりである: 新定式化は、(a)等角写像の問題との整合性、(b)計算手順の統一性、(c)数値写像の精度、において旧定式化より優れている。逆に、旧定式化を選択すべき積極的な理由は見当たらない。

2. 数値等角写像の方法

図1の3種の等角写像に対して新旧の定式化を対照的に記述する。

2.1 内部等角写像

z 平面上に与えられた Jordan 曲線 C で囲まれた

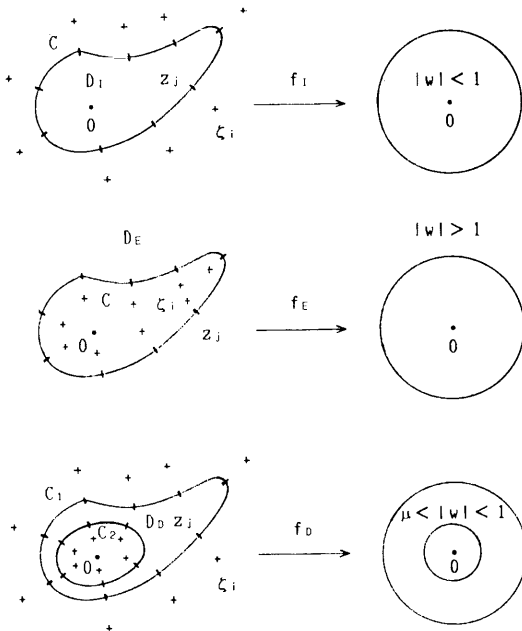


図1 等角写像と代用電荷法

Fig. 1 Conformal mapping of the interior, exterior and doubly-connected domains.

The ζ_i and z_j are charge points and collocation points used in the charge simulation method.

領域 D_I から w 平面上の単位円内部 $|w| < 1$ への等角写像 $w = f_I(z)$ を考える。この写像は、 D_I の内部に原点 (正規化点) を取れば、正規化条件 $f_I(0) = 0$, $f_I'(0) > 0$ の下に一意的に定まる。

代用電荷法に基づいて、問題の等角写像の近似写像関数^{14), 18)}

$$F_I(z) = z \exp \{G_I(z) + iH_I(z)\}, \quad (1)$$

$$G_I(z) + iH_I(z) = \sum_{i=1}^N Q_i \{ \log |z - \zeta_i| + i \arg(1 - z/\zeta_i) \} \quad (2)$$

を得ることができる。ここに、 $\zeta_i \in \bar{D}_I = D_I \cup C$ ($i = 1, 2, \dots, N$) は \bar{D}_I の外部に配置された電荷点である。未定係数である電荷 Q_i ($i = 1, 2, \dots, N$) は境界 C 上の N 個の拘束点 $z_j \in C$ ($j = 1, 2, \dots, N$) で $|F_I(z_j)| = 1$ を満たすように、すなわち $G_I(z_j) = -\log |z_j|$ を満たすように定める。すなわち、拘束条件と呼ばれる連立1次方程式

$$\sum_{i=1}^N Q_i \log |z_j - \zeta_i| = -\log |z_j|, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (3)$$

の解である。

内部等角写像については新旧の定式化は同一である。

2.2 外部等角写像

z 平面上に与えられた Jordan 曲線 C の外側の領域 D_E から w 平面上の単位円外部 $|w| > 1$ への等角写像 $w = f_E(z)$ を考える。この写像は正規化条件 $f_E(\infty) = \infty$, $f_E'(\infty) > 0$ の下に一意的に定まる。問題の一般性を失うことなく、原点を C で囲まれた領域の内部に取ることができる。

代用電荷法に基づいて、問題の等角写像の近似写像関数¹⁸⁾

$$F_E(z) = 1/\Gamma \exp \{G_E(z) + iH_E(z)\}, \quad (4)$$

$$G_E(z) + iH_E(z) = \log \Gamma \sum_{i=1}^N Q_i \log(z - \zeta_i) \quad (5)$$

を得ることができる。ここに、 Γ は曲線 C の容量 γ の近似値で、電荷点 $\zeta_i \in \bar{D}_E = D_E \cup C$ ($i = 1, 2, \dots, N$) は \bar{D}_E の外部すなわち D_I の内部に配置される。電荷 Q_i ($i = 1, 2, \dots, N$) は、 $\Gamma \neq 1$ のとき、境界 C 上の N 個の拘束点 $z_j \in C$ ($j = 1, 2, \dots, N$) で $|F_E(z_j)| = 1$ を満たすように、すなわち $G_E(z_j) = \log \Gamma$ を満たすように定める。すなわち、拘束条件と呼ばれる連立1次方程式

$$\sum_{i=1}^N Q_i \log |z_j - \zeta_i| = 1, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (6)$$

の解である。また、

$$G_E(z) + iH_E(z) = \log z + \hat{G}_E(z) + i\hat{H}_E(z) \quad (7)$$

で定義される共役な調和関数 $\hat{G}_E(z)$ と $\hat{H}_E(z)$ の無限遠点における漸近的性質 $\lim_{z \rightarrow \infty} \{\hat{G}_E(z) + i\hat{H}_E(z)\} = 0$ から、

$$\log \Gamma \sum_{i=1}^N Q_i = 1 \quad (8)$$

でなければならない。

同じ記号を用いて、旧定式化¹⁵⁾による近似写像関数は

$$F_E(z) = z/\Gamma \exp\{\hat{G}_E(z) + i\hat{H}_E(z)\}, \quad (9)$$

$$\hat{G}_E(z) + i\hat{H}_E(z) = \sum_{i=1}^N \hat{Q}_i \log(z - \zeta_i), \quad (10)$$

拘束条件の連立1次方程式は、 \hat{Q}_i と $\log \Gamma$ を未知量として、

$$\sum_{i=1}^N \hat{Q}_i \log|z_j - \zeta_i| - \log \Gamma = -\log|z_j|, \quad j=1, 2, \dots, N, \quad (11)$$

$$\sum_{i=1}^N \hat{Q}_i = 0 \quad (12)$$

となる。

なお、Jordan 曲線 C の容量 γ については、 C で囲まれる最大の円の半径を r_1 、 C を囲む最小の円の半径を r_2 とするとき、 $r_1 \leq \gamma \leq r_2$ が成り立つ¹⁰⁾。したがって、円の容量は半径に等しい。問題の等角写像とは $z \rightarrow \infty$ のとき $f_E(z) \rightarrow z/\gamma$ すなわち $\gamma = 1/f'_E(\infty)$ なる関係がある。正規化条件 $f'_E(\infty) > 0$ を $f'_E(\infty) = 1$ とすれば、曲線 C は単位円ではなく半径 γ の円に移る。

外部等角写像では、容量の近似値 Γ も同時に求まる。しかし、 $\Gamma = 1$ の場合には、任意の z に対して $G_E(z) + iH_E(z) = 0$ すなわち $F_E(z) = 1$ となっており、新定式化の(4)式と(5)式で写像を計算することはできない。その場合には問題の領域を適当に拡大または縮小してからこの方法を適用する。旧定式化の(9)式と(10)式はこのような問題を生じない。

2.3 2重連結領域等角写像

z 平面上に与えられた Jordan 曲線 C_1 と C_2 で囲まれた有界な2重連結領域 D_D から w 平面上の円環領域 $\mu < |w| < 1$ への等角写像 $w = f_D(z)$ を考える。ここに、 C_1 と C_2 は D_D の外側と内側の境界で、それぞれ同心円 $|w| = 1$ と $|w| = \mu$ に移るとする。この写像は、円環の内部半径 μ の値とともに、回転の任意性を除いて一意に定まる。円環の内部半径の逆数 μ^{-1} は領域 D_D のモジュラスと呼ばれる。問題の一般

性を失うことなく、原点を C_2 で囲まれた領域の内部に取ることができる。

代用電荷法に基づいて、問題の等角写像の近似写像関数¹⁸⁾

$$F_D(z) = \exp\{G_D(z) + iH_D(z)\}, \quad (13)$$

$$G_D(z) + iH_D(z) = \log M \sum_{i=1}^N Q_i \log(z - \zeta_i) \quad (14)$$

を得ることができる。ここに、 M は μ の近似値で、電荷点 $\zeta_i \in \bar{D}_D = D_D \cup C_1 \cup C_2$ ($i=1, 2, \dots, N$) は C_1 の外側に N_1 個、 C_2 の内側に N_2 個、合計 $N = N_1 + N_2$ 個配置される。電荷 Q_i ($i=1, 2, \dots, N$) は、(1)境界 C_1 上の N_1 個の拘束点 $z_j \in C_1$ ($j=1, 2, \dots, N_1$) で $|F_D(z_j)| = 1$ を満たし、(2)境界 C_2 上の N_2 個の拘束点 $z_j \in C_2$ ($j=1, 2, \dots, N_2$) で $|F_D(z_j)| = M$ を満たすように、すなわち(1) $G_D(z_j) = 0$ ($z_j \in C_1$ ($j=1, 2, \dots, N_1$)) と(2) $G_D(z_j) = \log M$ ($z_j \in C_2$ ($j=1, 2, \dots, N_2$)) を満たすように定める。すなわち、拘束条件と呼ばれる連立1次方程式

$$\sum_{i=1}^N Q_i \log|z_j - \zeta_i| = 0, \quad j=1, 2, \dots, N_1, \quad (15)$$

$$= 1, \quad j=N_1+1, \dots, N \quad (16)$$

の解である。また、

$$G_D(z) + iH_D(z) = \log z + \hat{G}_D(z) + i\hat{H}_D(z) \quad (17)$$

で定義される調和関数 $\hat{H}_D(z)$ の領域 D_D における1価性から、

$$\log M \sum_{i=1}^{N_2} Q_i = 1 \quad (18)$$

でなければならない。ここに、 $\sum_{i=1}^{N_2}$ は C_2 の内側に配置された電荷に対する和を意味する。

同じ記号を用いて、旧定式化¹⁶⁾による近似写像関数は

$$F_D(z) = z \exp\{\hat{G}_D(z) + i\hat{H}_D(z)\}, \quad (19)$$

$$\hat{G}_D(z) + i\hat{H}_D(z) = \sum_{i=1}^N \hat{Q}_i \log(z - \zeta_i), \quad (20)$$

拘束条件の連立1次方程式は、 \hat{Q}_i と $\log M$ を未知量として、

$$\sum_{i=1}^N \hat{Q}_i \log|z_j - \zeta_i| = -\log|z_j|, \quad j=1, 2, \dots, N_1, \quad (21)$$

$$\sum_{i=1}^N \hat{Q}_i \log|z_j - \zeta_i| - \log M = -\log|z_j|, \quad j=N_1+1, \dots, N, \quad (22)$$

$$\sum_{i=1}^{N_2} \hat{Q}_i = 0 \quad (23)$$

となる。

2.4 表現の統一

新定式化¹⁸⁾の近似写像関数は、回転の任意性を除いて、

$$F(z) = \alpha(z) \exp \left\{ \beta \sum_{i=1}^N Q_i \log(z - \zeta_i) \right\}, \quad (24)$$

(1) $\alpha(z) = z, \quad \beta = 1,$

(2) $\alpha(z) = 1/\Gamma, \quad \beta = \log \Gamma,$

$$\Gamma = \exp \left(1 / \sum_{i=1}^N Q_i \right), \quad (25)$$

(3) $\alpha(z) = 1, \quad \beta = \log M,$

$$M = \exp \left(1 / \sum_{i=1}^{N_2} Q_i \right)$$

と統一することができる。式の前の(1), (2), (3)はそれぞれ内部領域, 外部領域, 2重連結領域の場合であることを示す。拘束条件の連立1次方程式は

$$\sum_{i=1}^N Q_i \log |z_j - \zeta_i| = \delta(z_j), \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (26)$$

(1) $\delta(z_j) = -\log |z_j|, \quad z_j \in C,$

(2) $\delta(z_j) = 1, \quad z_j \in C, \quad (27)$

(3) $\delta(z_j) = 0, \quad z_j \in C_1,$
 $= 1, \quad z_j \in C_2$

となる。

3. 比較

新旧の定式化の相違点を整理し、それに沿って両者の特徴を比較、考察する。なお、内部領域の場合の定式化は同一であるから、実際上の違いは外部領域と2重連結領域の場合に現れる。

新旧の定式化の相違点は次のように整理することができる。

近似写像関数の形：旧定式化の近似写像関数 $F_I(z)$, $F_E(z)$, $F_D(z)$ は、いずれも z 平面上の原点を w 平面上の原点に対応させる形で、変数 z を因子として含んでいる。新定式化の $F_E(z)$ と $F_D(z)$ は z を因子として含まない。

調和関数の境界値：旧定式化の調和関数 $G_I(z)$, $G_E(z)$, $G_D(z)$ の境界値はいずれも $-\log |z|$ 型である。新定式化の $G_E(z)$ と $G_D(z)$ の境界値は定数型である。

連立1次方程式の構造：旧定式化の連立1次方程式すなわち、(1)内部領域の(3)式、(2)外部領域の(11)式と(12)式、(3)2重連結領域の(21)式~(23)式は、それぞれ、(1) Q_i の N 元、(2) \hat{Q}_i と $\log \Gamma$

の $N+1$ 元、(3) \hat{Q}_i と $\log M$ の $N+1$ 元、を未知数として、

(1) $[a_{ji}], \quad a_{ji} = \log |z_j - \zeta_i|,$

(2) $\begin{bmatrix} & -1 \\ & a_{ji} & : \\ & & -1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix},$

(3) $\begin{bmatrix} & & & 0 \\ & & & : \\ & & & 0 \\ & & a_{ji} & -1 \\ & & & : \\ & & & -1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$

という異なる構造の係数行列を持っている。新定式化の連立1次方程式の係数行列はすべて内部領域の場合と同じ構造に統一されている。外部領域の Γ と2重連結領域の M の値は Q_i の値から別途計算される。

さて、連立1次方程式の係数行列の構造の統一は3種の等角写像の計算手順の統一性すなわちプログラムモジュールの共通性の向上をもたらす。

代用電荷法が適用される Dirichlet 問題の境界値の影響はより重要である。代用電荷法はなめらかな境界値、その極限としての定数型境界値、の問題を得意としている。電気工学におけるポテンシャル解析への応用例¹²⁾も多くは定数型境界値の問題である。したがって、上記のような境界値の違いは、外部領域と2重連結領域の場合に、新定式化が旧定式化より高い計算精度を与える可能性を示唆している。実際、対数ポテンシャル $\log |z|$ は原点 $z=0$ に特異点を持っている。原点が境界に近ければ、問題の領域の外部にあって、その特異性が代用電荷法の精度に影響するであろう。

Dirichlet 問題の境界値の違いは、近似写像関数の形に起因し、外部領域と2重連結領域の場合の新旧の定式化にさらに重要な影響を与えている。すなわち、旧定式化は、計算結果が原点の位置に依存するという意味で、座標系の平行移動に対して可変である。これに対して、新定式化は、計算結果が原点の位置に依存しないという意味で、座標系の平行移動に対して不変である。そもそも、等角写像の問題では、座標系の原点の位置は意味を持たない。この点で、旧定式化は不自然であり、新定式化は自然である。なお、内部領域の場合には、原点を等角写像の問題の正規化点に取った。これは問題の記述を簡潔にするためであり、表現

を座標系の平行移動に対して不変な形に改めることは容易である。ただし、その場合でも、Dirichlet 問題の境界値は対数型のままである。

以上の考察から、新定式化は旧定式化より次のような点で優れていると考えることができる。

(a) 計算手順の統一性：連立1次方程式の係数行列の構造が同じであり、3種の等角写像をより統一的な手順で計算することができる。

(b) 等角写像の問題との整合性：外部領域と2重連結領域の場合に、等角写像の問題には無関係な座標系の平行移動に対して不変であり、原点の取り方に依存しない計算結果を得ることができる。

(c) 数値写像の精度：しかも、そのとき、代用電荷法が適用される Dirichlet 問題の境界値に対数ポテンシャルの特異性の問題が存在せず、より高い計算精度を期待することができる。

これに対して、調和関数 $G_I(z)$ と $H_I(z)$, $\hat{G}_E(z)$ と $\hat{H}_E(z)$, $\hat{G}_D(z)$ と $\hat{H}_D(z)$ がすべて絶対値の拡大率 $|w/z|$ と偏角の回転量 $\arg(w/z) = \arg w - \arg z$ に関係していること、すなわち、これらの調和関数の統一的な幾何学的解釈が可能であることは旧定式化の長所である。新定式化の $G_E(z)$ と $H_E(z)$, $G_D(z)$ と $H_D(z)$ は w 平面上の絶対値 $|w|$ と偏角 $\arg w$ そのものに関係している。しかし、新定式化の持つ前述の利点ははるかに大きい。

なお、旧定式化の近似写像関数の形がいずれも z 平面上の原点を w 平面上の原点に写像していることは合理的であるかに見える。しかし、外部領域と2重連結領域の場合には、原点は等角写像が定義される領域の外部に取られる。原点から原点への写像という条件を課すべき理由はないのである。

4. 数値実験

電荷点と拘束点の配置には次のような方法を採用する。まず、境界上の拘束点 $z_j \in C$, $j=1, 2, \dots, N$ を問題の領域に対して正の向きに配置する。次に、各拘束点 z_i に対して、電荷点 ζ_i を

$$\zeta_i = z_i + r h_i e^{i(\arg(z_{i+1} - z_{i-1}) - \pi/2)}, \quad (28)$$

$$h_i = 1/2(|z_{i+1} - z_i| + |z_i - z_{i-1}|), \quad (29)$$

と配置する。定数 $r > 0$ は電荷配置のパラメータである。

近似写像関数 $F(z)$ の誤差評価には正則関数の最大値の原理を利用することができる。ここでは次のような指標を用いる。一般的には、 $|F(z)|$ の誤差のみが評

価可能である。これは、単連結領域の場合には

$$E_m = \max_j |F(z_{j+1/2}) - 1|, \quad (30)$$

で、2重連結領域の場合には

$$E_m = \max \{ \max_{j_1} |F(z_{j_1+1/2}) - 1|, \max_{j_2} |F(z_{j_2+1/2}) - M| \} \quad (31)$$

で計算される。ここに、 $z_{j+1/2} \in C$ は境界上の拘束点 z_j と z_{j+1} の間の中間点であり、 $z_{j_1+1/2}$ と $z_{j_2+1/2}$ は2重連結領域の場合の C_1 と C_2 上の中間点である。真の写像関数 $f(z)$ が知られている場合には、境界上の拘束点と中間点で計算した $F(z)$ の誤差

$$E_f = \max_c |F(z) - f(z)| \quad (32)$$

を提示する。また、その場合には(31)式の M は μ で置き換えられる。

多くの計算例^{14)~16), 18), 19)}が $E_m \approx E_f$ すなわち E_m が近似写像関数の誤差の良い指標であることを示している。

以下の例では、 N は境界曲線あたりの電荷数を表すものとする。したがって、2重連結領域の場合には、 $N_1 = N_2 = N$ で、電荷の総数は $2N$ である。特に断わらない限り、電荷数は $N=64$ 、配置のパラメータは $r=2^i$, $i=-4, -3, \dots, 3, 4$ である。

数値実験には愛媛大学情報処理センターの FACOM M-770/6 システムを用いた。計算は倍精度で、その有効精度は16進14桁である。

例1 楕円

$$C: x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$$

領域 1 $a=1.25, b=1$

2 $a=2.5, b=1$

3 $a=5, b=1$

4 $a=10, b=1$

5 $a=20, b=1$

6 $a_1=7, b_1=5, a_2=5, b_2=1$

内部領域と外部領域 1~5, 2重連結領域 1~6 を計算する。2重連結領域 1~5 では $a_1=a, b_1=b, a_2=a_1/2, b_2=b_1/2$ である。外部領域の解析解は

$$f_E(z) = \{z + (z^2 - a^2 + b^2)^{1/2}\} / (a+b),$$

$$\gamma = (a+b)/2,$$

2重連結領域の解析解は、 $a_1^2 - b_1^2 = a_2^2 - b_2^2$ すなわち2つの楕円が共焦のとき、

$$f_D(z) = \{z + (z^2 - a_1^2 + b_1^2)^{1/2}\} / (a_1 + b_1),$$

$$\mu = (a_2 + b_2) / (a_1 + b_1),$$

である。領域6がその例である。

拘束点は境界曲線ごとに、(a)離心角、(b)長さ、または、(c)偏角で等間隔になるように、それぞれ

- (a) $z_j = (a \cos \theta_j, b \sin \theta_j)$,
- (b) $\int_{z_{j-1}}^{z_j} |dz| \cong 1/N \int_C |dz|$, $z_1 = (a, 0)$
- (c) $z_j = (R_j \cos \theta_j, R_j \sin \theta_j)$,
 $R_j = (\cos^2 \theta_j / a^2 + \sin^2 \theta_j / b^2)^{-1/2}$,
 $\theta_j = 2\pi(j-1)/N$, $j=1, 2, \dots, N$

で配置する。拘束点と電荷点の配置の密度は長軸付近と短軸付近で、それぞれ(a) $a : b$, (b) $1 : 1$, (c) $b : a$ となる。

表1に新旧の定式化による数値写像 $F(z)$ の誤差 E_m, E_f を電荷配置のパラメータ r の値とともに示す。これらは r の値を前述のように $1/16 \sim 16$ の範囲で変えて最も良い精度が得られた場合の値である。内部領域では(c)偏角による配置が、外部領域と2重連結領域では(a)離心角による配置が良い精度を与えている。表2は表1と同じ r の値を用いて得られた外部領域の容量 Γ の誤差 $E_r = \Gamma - \gamma$ と2重連結領域の円環の内部半径 M の誤差 $E_M = M - \mu$ である。解析解

表1 数値写像の精度 (楕円, $N=64$)

Table 1 Errors of the numerical mapping of elliptic domains by the unified and non-unified charge simulation methods. $N=64$ simulation charges are used.

	新定式化						旧定式化					
	離心角	r	長さ	r	偏角	r	離心角	r	長さ	r	偏角	r
1							4.4E-16	16	4.4E-16	16	4.4E-16	16
2							2.3E-8	8	5.2E-10	8	3.1E-9	8
内部3 E_m			同		右		2.6E-5	2	4.8E-6	4	1.6E-8	8
4							5.0E-4	1	4.3E-4	2	2.9E-5	2
5							1.4E-2	1/2	9.0E-3	1	5.4E-4	1
1	7.4E-13	4	9.4E-13	4	1.5E-12	4	9.0E-13	4	9.4E-13	4	1.6E-12	4
2	3.1E-7	2	6.7E-5	1	1.3E-4	1	1.1E-6	2	1.4E-4	2	1.3E-4	1
外部3 E_f	5.4E-5	1	1.5E-3	1/2	1.8E-2	1/2	1.1E-3	1	7.5E-3	1/2	1.8E-2	1/2
4	1.3E-3	1/2	2.2E-2	1/4	1.4E-1	1/4	2.2E-2	1/2	2.4E-2	1/2	1.4E-1	1/4
5	6.9E-3	1/4	4.9E-2	1/4	6.5E-1	1/16	6.9E-2	1/4	9.1E-2	1/4	6.5E-1	1/16
1	8.2E-11	4	1.2E-10	4	1.7E-10	4	8.2E-11	4	1.2E-10	4	1.7E-10	4
2	8.1E-7	2	5.1E-5	2	1.3E-4	1	8.1E-7	2	5.1E-5	2	1.3E-4	1
2重3 E_m	2.1E-4	1	2.8E-3	1/2	6.1E-3	1/2	8.1E-4	1	4.2E-3	1	6.1E-3	1/2
4	4.7E-3	1/2	6.7E-3	1/2	6.6E-2	1/4	1.8E-2	1/2	1.4E-2	1/2	6.6E-2	1/4
5	2.1E-2	1/4	1.4E-2	1/4	1.6E-1	1/16	5.2E-2	1/4	7.6E-2	1/4	1.6E-1	1/16
6 E_f	8.4E-5	1	1.8E-3	1/2	8.9E-3	1/2	5.8E-4	1	4.1E-3	1/2	8.8E-3	1/2

表2 容量と円環の内部半径の精度 (楕円, $N=64$)

Table 2 Errors of the capacity and the inner radius of the annulus corresponding to Table 1, together with their exact values. The values* are obtained with $N=128$ simulation charges.

	新定式化			旧定式化			r, μ
	離心角	長さ	偏角	離心角	長さ	偏角	
1	-4.4E-16	-6.7E-16	-4.4E-16	4.4E-16	6.7E-16	2.2E-16	1.125
2	-2.3E-8	-3.3E-5	-2.9E-5	3.6E-8	9.1E-8	-3.3E-6	1.75
外部3 E_r	-6.2E-5	-1.5E-3	3.9E-3	2.1E-5	-1.5E-4	4.5E-3	3
4	-3.5E-3	-2.7E-2	-1.8E-1	5.3E-5	1.2E-2	-1.8E-1	5.5
5	-3.8E-2	-7.5E-2	-2.4E+0	-1.2E-2	-5.2E-2	-2.3E+0	10.5
1	-9.4E-13	-1.5E-13	9.7E-13	-9.3E-13	-1.5E-13	9.7E-13	0.507379754086040*
2	-1.2E-7	-6.2E-8	-3.2E-5	-8.8E-8	-4.1E-8	-2.1E-5	0.6047607*
2重3 E_M	-8.3E-5	-1.3E-3	-3.3E-4	-5.2E-5	3.6E-5	-2.2E-4	0.7402*
4	-2.4E-3	-6.4E-4	-1.3E-2	-1.5E-3	-3.4E-4	-1.3E-2	0.849*
5	-1.2E-2	-5.2E-3	-5.5E-2	-9.2E-3	-3.6E-3	-5.1E-2	0.92*
6 E_M	-2.9E-5	-6.3E-4	2.5E-4	-1.5E-5	-4.0E-4	3.6E-4	0.5

が知られていない2重連結領域1~5については電荷数を $N=128$ に倍増して得られた値との差で E_M を評価した. 推定値 μ^* は $N=128$ とした新定式化で異なる拘束点配置 (a), (b) を用いて一致した範囲の値である.

表1の数値写像に関しては, いずれの拘束点配置でも, 新定式化による計算精度は旧定式化による計算精度と同等またはそれ以上である. この精度の向上は配置 (a), (b), (c) (最後の場合には同精度) の順に, かつ, 楕円のアスペクト比 ($\propto a/b$) の大きな領域で著しい. 外部領域2, 4と2重連結領域3で(b)長さによる配置を用いた場合には最も良い精度が得られたパラメータ r の値は新旧の定式化で異なっている. しかし, この r の値を旧定式化の値に合わせても, 新定式化の精度が旧定式化の精度以下になることはない. なお, 2重連結領域6の場合には, アスペクト比の大きな内部の楕円が計算精度を決定している.

一般に, 容量 Γ と円環の内部半径 M に関して最も良い精度が得られる r の値は近似写像関数 $F(z)$ に関して最も良い精度が得られる r の値より大きい. 実際, 表1で r の値の異なる外部領域2, 4と2重連結領域3の場合にも, 新定式化の r の値を倍にして旧定式化の値に一致させれば, そのときの新定式化の E_r と E_M の値はそれぞれ $E_r=4.4E-8$ ($r=2$), $9.3E-3$ ($r=1/2$), $E_M=2.5E-5$ ($r=1$) となって, Γ と M の精度は大幅に向上する. したがって, 公平な比較のためには, 表2の対応する新定式化の値をこれらの値で置き換えるべきである. これらの値を採用してもなお, 楕円の場合の Γ と M の精度は旧定式化の方が多少良い. しかし, 以下のような理由で, 表2の Γ と M の精度はいずれの定式化でも表1の数値写像の精度に比べて十分に高いと考えることができる.

正則関数の最大値の原理により, 外部領域の近似写像関数の誤差は境界上または無限遠点で最大値をとる. 厳密には, 表1の E_r は境界上の誤差 (ここでは絶対誤差と相対誤差は等しい) の指標であるにすぎない. 一方, 近似写像関数の形から, $E_{\log r} = |\log \Gamma - \log r|$ が無限遠点の相対誤差であることが容易にわかる. そして, 表1と表2のすべての場合に $E_{\log r} <$ (多

くの場合, \ll) E_r なる関数の成立していることを確認することができる. したがって, 容量 Γ の精度は十分に高く, E_r を外部領域の数値写像の (正確には, 相対) 誤差の指標とすることができる.

円環の内部半径 M に関して例外なく $E_M <$ (多くの場合, \ll) E_r (領域6では E_r) なる関係が成立している. これは誤差の評価式 (31) で μ の代わりに M を用いることの妥当性を支持している.

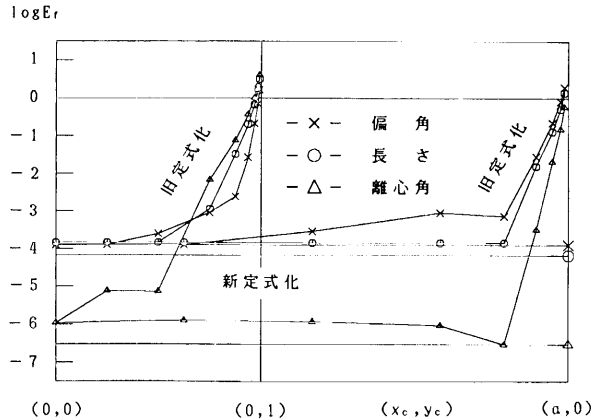


図2 原点の移動と数値写像の精度 (楕円外部領域, $a=2.5, N=64$)

Fig. 2 Error diagram of the numerical mapping of an exterior elliptic domain $(x-x_c)^2/a^2+(y-y_c)^2>1$. The point (x_c, y_c) moves on the two axes of symmetry. $N=64$ simulation charges are used.

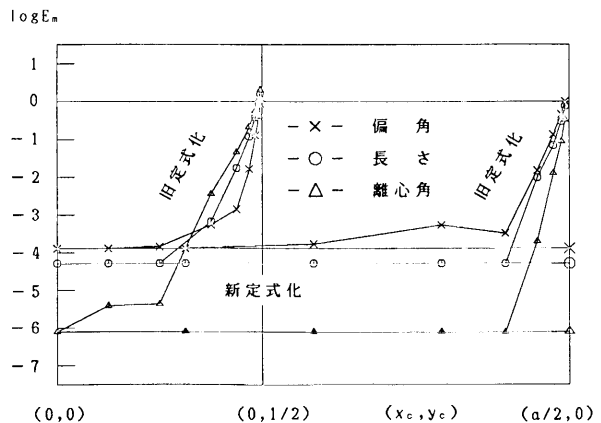


図3 原点の移動と数値写像の精度 (楕円2重連結領域, $a=2.5, N=64$)

Fig. 3 Error diagram of the numerical mapping of a doubly-connected elliptic domain $(x-x_c)^2/a^2+(y-y_c)^2<1, (x-x_c)^2/a^2+(y-y_c)^2>(1/2)^2$. The point (x_c, y_c) moves on the two axes of symmetry. $N=64$ simulation charges are used.

次に、座標系の移動すなわち原点の位置に対する計算精度の依存性を調べる。図2と図3は、それぞれ外部領域2と2重連結領域2の場合に、座標形の原点を楕円の長軸と短軸に沿って移動させ、数値写像の誤差をプロットしたものである。この座標変換に対して不変性を保つ新定式化の誤差は水平な直線になる。図から、旧定式化の精度は原点の取り方に依存し、原点が境界に近づくほど低下すること、その低下は近づく方向の境界上に配置された拘束点の密度が小さいほど大きいこと、等がわかる。数値写像の精度の低下に伴ってΓとMの精度も低下する。したがって、表1と表2は、図2と図3の左端に対応し、旧定式化にとって条件の良い比較であったといえる。また、予測されるように、外部領域と2重連結領域ではよく似た結果が得られている。

原点が境界に近づく場合の精度の低下は代用電荷法が適用される Dirichlet 問題の境界値の $\log|z|$ が領域外に持つ特異点の影響である。個々の計算ごとに良い精度が得られる r の値を取り直せばこの精度の低下を多少は軽減することができる。しかし、旧定式化の性質を質的に改善するものではない。

外部領域と2重連結領域の問題に旧定式化を適用する場合には、原点は境界曲線で囲まれた領域の中心付近に取るべきである。対称軸の交点が境界から最も遠い点でもある楕円は旧定式化で扱い易い領域であるといえる。また、境界上の拘束点の密度の変化や原点の移動に伴う境界との距離の変化も

規則的である。新定式化の有効性を例示するために、このような領域を取り上げて詳しく検討した。

例2 Cassini の楕形

$$C: |z^2 - b^2| = a^2 \quad (a > b)$$

領域 1 $a=1.8, b=1$

2 $a=1.06, b=1$

3 $a=1.02^{1/2}, b=1$

4 $a_1=2(14)^{1/2}, b_1=7, a_2=2, b_2=1$

内部領域と外部領域1~3, 2重連結領域1~4を計算する。2重連結領域1~3では $a_1=a, b_1=b, a_2=a/2, b_2=b/2$ である。内部領域の解析解は

$$f_1(z) = az / (b^2 z^2 + a^4 - b^4)^{1/2},$$

外部領域の解析解は

$$f_2(z) = (z^2 - b^2)^{1/2} / a,$$

$$\gamma = a,$$

2重連結領域の解析解は、 $(a_1^2 - b_1^2) / b_1^2 = (a_2^2 - b_2^2) / b_2^2$ の

表3 数値写像の精度 (Cassini の楕形, $N=64$)

Table 3 Errors of the numerical mapping of Cassini's oval domains by the unified and non-unified charge simulation methods. $N=64$ simulation charges are used.

	新定式化				旧定式化			
	長さ	r	偏角	r	長さ	r	偏角	r
1					8.0E-13	8	2.2E-13	8
内部 2 E_f	同		右		3.7E-4	2	8.1E-7	2
3					7.1E-3	1/2	6.4E-5	2
1	2.5E-13	4	2.4E-13	4	1.2E-12	4	1.4E-12	4
外部 2 E_f	2.2E-7	2	2.1E-8	2	7.8E-5	2	1.8E-6	2
3	4.6E-5	1	9.1E-5	1	2.4E-3	1	3.6E-4	1
1	2.1E-11	4	2.5E-11	4	2.1E-11	4	2.5E-11	4
2重 2 E_M	6.3E-7	2	5.1E-6	2	4.6E-5	2	5.1E-6	2
3	4.7E-4	1	1.9E-3	1	2.0E-3	1	1.8E-3	1
4 E_f	1.7E-4	2	7.0E-7	2	1.7E-4	2	7.0E-7	2

表4 容量と円環の内部半径の精度 (Cassini の楕形, $N=64$)

Table 4 Errors of the capacity and the inner radius of the annulus corresponding to Table 3, together with their exact values.

The values* are obtained with $N=128$ simulation charges.

	新定式化		旧定式化		γ, μ
	長さ	偏角	長さ	偏角	
1	-8.9E-16	1.1E-15	6.9E-15	8.9E-16	1.8
外部 2 E_r	-6.9E-9	6.6E-10	1.6E-7	-2.1E-8	1.06
3	-1.9E-5	-2.2E-5	-9.7E-6	-2.5E-5	1.02 ^{1/2}
1	-1.8E-12	-1.3E-12	-1.8E-12	-1.0E-12	0.514995837751695*
2重 2 E_M	-3.3E-8	2.5E-7	2.3E-7	2.1E-7	0.714881676938*
3	-9.1E-5	-1.7E-4	-3.9E-5	-1.9E-4	0.863070*
4 E_M	7.7E-7	2.8E-8	7.9E-7	3.8E-8	(2/7) ^{1/3}

とき,

$$f_b(z) = a_1 z / (b^2 z^2 + a^4 - b^4)^{1/2},$$

$$\mu = a_1 b_2 / a_2 b_1$$

である. 領域 4 がその例である.

拘束点は境界曲線ごとに, (a) 長さ, または, (b) 偏角で等間隔になるように, それぞれ

$$(a) \int_{z_{j-1}}^{z_j} |dz| \doteq 1/N \int_C |dz|,$$

$$z_1 = ((a^2 + b^2)^{1/2}, 0),$$

$$(b) z_j = (R_j \cos \theta_j, R_j \sin \theta_j),$$

$$R_j = \{b^2 \cos 2\theta_j + (b^4 \cos^2 2\theta_j + a^4 - b^4)^{1/2}\}^{1/2},$$

$$\theta_j = 2\pi(j-1)/N, j=1, 2, \dots, N$$

で配置する. 後者の電荷点と拘束点は短軸 (y 軸) 付近 ($a < 2^{1/2}b$ のとき楕形の凹部) で密になる.

表 3 に数値写像 $F(z)$ の誤差を, 表 4 に外部領域の容量 Γ と 2 重連結領域の円環の内部半径 M の誤差を示す. これらは, 楕円の表 1 と表 2 に対応し, 記号の意味も同じである. 最も良い精度が得られた表 3 の r の値は新旧の定式化で完全に一致している. また, 旧定式化では, 原点に近い凹部で密になる (b) 偏角による配置が良い精度を与えている.

新定式化による数値写像の精度の向上は楕円の場合より顕著である. Γ と M の精度はほとんど同等である. なお, 2 重連結領域 4 の場合には, 凹型である外側の楕形が計算精度を決定している.

楕円の場合と同様に, 外部領域のすべての場合に $E_{\log r} < (\text{多くの場合, } \ll) E_r$ なる関係が, また, 2 重連結領域のすべての場合に $E_M \ll E_m$ (領域 4 では E_r) なる関係が成立している. また, 具体的な数値は省略したが, 楕円と Cassini の楕形のいずれの場合にも, 解析解との比較で $E_m \doteq E_r$ なる関係が成立している.

5. おわりに

与えられた問題領域から標準領域へ, すなわち, 1) Jordan 曲線の内部から単位円の内部へ, 2) その外部から外部へ, 3) 2つの Jordan 曲線で囲まれた有界な 2 重連結領域から円環領域へ, という 3 種の等角写像に対する従来の個別的な代用電荷法¹⁴⁾⁻¹⁶⁾ と再定式化された統一的な代用電荷法¹⁸⁾ とを比較した. その結果, 再定式化された統一的な代用電荷法は, a) 等角写像の問題との整合性, b) 計算手順の統一性, c) 数値写像の精度, において従来の個別的な代用電荷法より優れていることがわかった. 逆に, 従来の個別的

な代用電荷法を選択すべき積極的な理由は見当たらない. 外部領域の容量と 2 重連結領域の円環の内部半径についてはいずれの定式化でも十分な計算精度を得ることができる. したがって, このような数値等角写像においては, 再定式化された統一的な方法を選択すべきである.

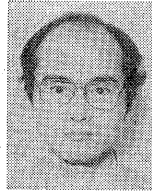
参考文献

- 1) Symm, G. T.: An Integral Equation Method in Conformal Mapping, *Numer. Math.*, Vol. 9, pp. 250-258 (1966).
- 2) Symm, G. T.: Numerical Mapping of Exterior Domains, *Numer. Math.*, Vol. 10, pp. 437-445 (1967).
- 3) Symm, G. T.: Conformal Mapping of Doubly-Connected Domains, *Numer. Math.*, Vol. 13, pp. 448-457 (1969).
- 4) Hayes, J. K., Kahaner, D. K. and Kellner, R. G.: An Improved Method for Numerical Conformal Mapping, *Math. Comput.*, Vol. 26, No. 118, pp. 327-334 (1972).
- 5) Hough, D. M. and Papamichael, N.: The Use of Splines and Singular Functions in an Integral Equation Method for Conformal Mapping, *Numer. Math.*, Vol. 37, pp. 133-147 (1981).
- 6) Hough, D. M. and Papamichael, N.: An Integral Equation Method for the Numerical Conformal Mapping of Interior, Exterior and Doubly-Connected Domains, *Numer. Math.*, Vol. 41, pp. 287-307 (1983).
- 7) Gaier, D.: Integralgleichungen erster Art und konforme Abbildung, *Math. Z.*, Vol. 147, pp. 113-129 (1976).
- 8) Gaier, D.: Das logarithmische Potential und die konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender Gebiete, in Butzer, P. L. and Fehér, F. (eds.), *E. B. Christoffel, The Influence of His Work on Mathematics and the Physical Sciences*, pp. 290-303, Birkhäuser, Basel (1981).
- 9) Gaier, D.: *Konstruktive Methoden der konformen Abbildung*, 294 pp., Springer-Verlag, Berlin (1964).
- 10) Henrici, P.: *Applied and Computational Complex Analysis*, Vol. 3, pp. 323-570, John Wiley & Sons, New York (1986).
- 11) Trefethen, L. N. (ed.): *Numerical Conformal Mapping*, 269 pp., North-Holland, Amsterdam (1986); reprinted from *J. Comput. Appl. Math.*, Vol. 14, No. 1&2 (1986).
- 12) 村島定行: 代用電荷法とその応用, 194 pp., 森北出版, 東京 (1983).
- 13) 岡本 久, 桂田祐史: ポテンシャル問題の高速

- 解法, 応用数理, Vol. 2, No. 3, pp. 2-20 (1992).
- 14) 天野 要: 代用電荷法に基づく等角写像の数値計算法, 情報処理学会論文誌, Vol. 28, No. 7, pp. 697-704 (1987).
 - 15) 天野 要: 代用電荷法に基づく外部等角写像の数値計算法, 情報処理学会論文誌, Vol. 29, No. 1, pp. 62-72 (1988).
 - 16) 天野 要: 代用電荷法に基づく2重連結領域等角写像の数値計算法, 情報処理学会論文誌, Vol. 29, No. 10, pp. 914-924 (1988).
 - 17) 天野 要, 日野 究: 数値等角写像における代用電荷法と積分方程式法の比較, 情報処理学会論文誌, Vol. 33, No. 4, pp. 428-437 (1992).
 - 18) Amano, K.: A Charge Simulation Method for the Numerical Conformal Mapping of Interior, Exterior and Doubly-Connected Domains, *J. Comput. Appl. Math.* (to appear).
 - 19) 天野 要: 代用電荷法に基づく数値等角写像の誤差の性質, 情報処理学会論文誌, Vol. 32, No. 1, pp. 1-10 (1991).

(平成5年5月19日受付)

(平成6年4月21日採録)



天野 要 (正会員)

1948年生. 1971年京都大学工学部電子工学科卒業. 1978年北海道大学大学院工学研究科電気工学専攻博士課程修了. 工学博士. 同年北海道大学大型計算機センター助手. 現在愛媛大学工学部情報工学科助教授. 研究分野は数値解析と数理情報学, 特に数値複素解析とパターン認知等. 情報処理学会創立30周年記念論文賞受賞. 日本数学会, 日本応用数理学会, 電子情報通信学会, 日本心理学会, ACM 各会員.