

局所的接線推定法による4次の C^2 補間曲線

黒田 満† 木村文彦†† 古川 進†††

局所的接線推定法による従来の3次の C^1 補間曲線を拡張して、元の全体的形状を保存しつつ固有の性質もある程度残した4次の C^2 S -スプライン補間曲線を提案している。この曲線はデータの補間、計算機援用の形状設計やコンピュータグラフィックスの分野で有用である。元の C^1 曲線同様に、「振動」の少ない全体形状を生成するし、直線部分を含ませることもできる。スパンごとに逐次定義することや部分的に修正することも同様に可能である。近傍の3点か5点から、それぞれ、BesselあるいはFMILL法かAkimaあるいはRenner & Pochop法によって推定する接線を使って S -スプラインの付加制御点を決定する。Akimaの補間データを使った図的、数値的テストの結果、上述の共通の特長とともに固有の性質ももっていることが確認された。テストの副産物として、局所性を系統的に制御できるノンユニフォームな C^2 補間曲線と、最小自乗法の意味で元の C^1 曲線に最も近い大域性のある4次の C^2 補間曲線をえている。

Quartic C^2 Interpolating Curves Based on Local Tangent Estimation

MITSURU KURODA,† FUMIHIKO KIMURA†† and SUSUMU FURUKAWA†††

This paper presents quartic C^2 interpolating S -splines as extensions of conventional cubic C^1 interpolating curves based on local tangent estimation with preserving global shape and their own characteristics to a certain extent. They are useful in the fields of smooth curve fitting, computer aided geometric design and computer graphics. They generate less oscillating global shape and can have straight line sections incorporated in themselves as the C^1 curves. They can also be defined span-by-span and can be locally adjustable. Additional control points of the S -splines are determined by tangents estimated by Bessel/FMILL or Akima/Renner & Pochop methods from neighboring 3 or 5 data points, respectively. Graphical and numerical curve-fitting tests to Akima's data points make it clear that these curves share the common features mentioned above and have their own characteristics inherited. As by-products for the tests, nonuniform interpolating C^2 curve with controllable locality was derived, and also quartic C^2 interpolating curve with global behavior which is closest to the C^1 interpolating curve from the point of the least squares method.

1. はじめに

本論文は、近傍の通過点からの接線推定法による従来のいくつかの C^1 (連続な)補間曲線を拡張して、元の全体的形状を保存しつつ各固有の特徴もできるだけ残すような4次の C^2 S -スプライン補間曲線を提案する。

通過点における接線を近傍通過点から推定して3次

† 豊田工業大学制御情報工学科
Department of Information and Control Engineering, Toyota Technological Institute

†† 東京大学工学部精密機械工学科
Department of Precision Machinery Engineering, Faculty of Engineering, The University of Tokyo

††† 山梨大学工学部機械システム工学科
Department of Mechanical System Engineering, Faculty of Engineering, Yamanashi University

の C^1 Hermite 補間曲線をうる方法¹⁾は、データの補間や形状設計あるいはコンピュータグラフィックスの分野で広く使われてきた。通過点や接線といった直観になじむ量によってスパンごとに逐次定義することができるし、直線部分を含ませることも²⁾できる。また、ほかの部分の形状に影響を及ぼすことなく部分的に修正することもできる。さらに、3次の C^2 補間曲線のように予期せぬうねりを生ずることもない。しかし、工学上は多くの場合に曲率連続であることが要求されるために B -スプラインやBézier曲線が導入されてからはあまり使われていない。

著者らはすでに、3次の B -スプライン補間曲線の各スパンを4次に上げて制御点を付加した S -スプライン²⁾を使って、各スパンが影響を受ける通過点の範囲(局所性)を系統的に制御できる C^2 補間曲線を研

究してきた³⁾⁻⁵⁾。これは3次の C^1 補間曲線と C^2 補間曲線の特長をかねそなえたような曲線である。しかし、局所性の強いところでは必ずしも満足のいく性質をもっているとはいえない⁴⁾。それは局所性を手軽に制御することに重点を置いて付加制御点を決めているからである。

そこで本研究ではこの付加制御点を従来の局所的な接線推定法を用いて決めることを考える。具体的には、近傍の3点か5点から、それぞれ、BesselあるいはFMILL法¹⁾かAkimaあるいはRenner & Pochop法^{1),6)}によって推定した接線をもとに S -スプラインの付加制御点を定める。この4種類の方法による曲線を、あてはめの難しいといわれるAkimaの補間点データ⁷⁾を使ってテストする。その際、同じ次数と同じ局所性を有するほかの曲線と比較するために、局所性を系統的に制御できる C^2 補間曲線を新たにノンユニフォーム化する。さらに、この4次の C^2 補間曲線が局所性を捨てればどこまで元の3次の C^1 補間曲線に近い形状を表すことができるかの限界も変分法によって調べる。結果、元の3次の C^1 補間曲線の、「振動」が少ないとして知られる共通の性質を損なうことなく、また、固有の性質も比較的残しながら局所性のある4次の C^2 補間曲線が得られていることを明らかにする。

本論文では対象を比較・検討しやすい平面曲線に限っている。また、 S -スプラインの代わりに $B2$ -スプライン^{8),9)}を使った同様の C^2 連続化も可能であるけれども、両スプラインによる差がわずか⁴⁾であるために省略した。

2. 接線推定法による3次の C^1 曲線

3次の Hermite 補間は通過点とそこでの接線の組の列から C^1 連続な補間曲線を定める。したがって、接線を隣接通過点から推定すれば通過点だけから補間曲線をうることができる。Bessel, FMILL, Akima と Renner & Pochop 法は、それぞれ、隣接の3, 3, 5, 5個の通過点から接線を推定する^{1),6)}。いずれもノンユニフォームな局所性のある曲線を生成する。これらの推定法のベクトル表現式を整理して2.1節で述べる。

本研究では Hermite 補間の代わりに Bézier 曲線を用いる。また、通過点、制御点、節点などを以下のように表すことにする。図1参照。

- 与通過点: $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_i, \mathbf{p}_{i+1}, \dots, \mathbf{p}_n$,

- 3次の Bézier 制御点:

$$\mathbf{b}_{-2}, \dots, \mathbf{b}_{3i}, \mathbf{b}_{3i+1}, \dots, \mathbf{b}_{3n+2},$$

- 節点: $u_{-2}, \dots, u_i, u_{i+1}, \dots, u_{n+2}$,

- 通過点における推定接線: $\mathbf{s}_0, \dots, \mathbf{s}_i, \mathbf{s}_{i+1}, \dots, \mathbf{s}_n$.

節点間隔は次のように定める。

$$\sum_{i=0}^{n-1} \Delta_i = n, \tag{1}$$

ただし、

$$\begin{cases} \frac{\Delta_i}{\Delta_{i+1}} = \left\{ \frac{|\Delta \mathbf{p}_i|}{|\Delta \mathbf{p}_{i+1}|} \right\}^{1/2}, & i=0, \dots, n-2, \\ \Delta_i = u_{i+1} - u_i, \Delta \mathbf{p}_i = \mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i. \end{cases} \tag{2}$$

スパン $\mathbf{r}_i(t)$ は次の Bézier 曲線である。

$$\mathbf{r}_i(t) = \sum_{j=0}^3 \binom{3}{j} (1-t)^{3-j} t^j \mathbf{b}_{3i+j}, \quad 0 \leq t \leq 1, \tag{3}$$

$$\begin{cases} \mathbf{b}_{3i-1} = \mathbf{p}_i - \frac{1}{3} \Delta_i \mathbf{s}_i, \\ \mathbf{b}_{3i+1} = \mathbf{p}_i + \frac{1}{3} \Delta_i \mathbf{s}_i, \end{cases} \quad i=0, \dots, n. \tag{4}$$

2.1 接線推定法

従来の接線推定法は次のように整理することができる。Bessel と FMILL の (方法による) 接線は通過点に関して線形であり、節点間隔を等しくすれば一致する。Akima と Renner & Pochop の接線は通過点に関して非線形である。特に、Renner & Pochop の接線は節点間隔に独立である。いずれの方法も2.2節の終端条件を満たすものとする。

- Akima⁷⁾, Bessel, FMILL の接線推定法

$$\mathbf{s}_i = (1 - \alpha_i) \mathbf{a}_{i-1} + \alpha_i \mathbf{a}_i, \quad \alpha_i = \frac{\Delta \mathbf{p}_i}{\Delta_i}, \tag{5}$$

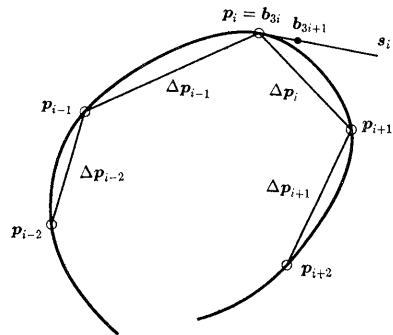


図1 通過点、接線と Bézier 制御点
Fig. 1 Data points, tangents and Bézier control points.

$$\alpha_i = \begin{cases} \frac{|\Delta \mathbf{a}_{i-2}|}{|\Delta \mathbf{a}_{i-2}| + |\Delta \mathbf{a}_i|}, & \text{Akima,} \\ \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_{i-1} + \Delta_i}, & \text{Bessel,} \\ \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1} + \Delta_i}, & \text{FMILL,} \\ i=0, \dots, n. \end{cases} \quad (6)$$

● Renner & Pochop の接線推定法^{10),11)}

$$\mathbf{s}_i = (1 - \beta_i) \Delta \mathbf{p}_{i-1} + \beta_i \Delta \mathbf{p}_i, \quad (7)$$

$$\beta_i = \begin{cases} \frac{|\Delta \mathbf{q}_{i-2}|}{|\Delta \mathbf{q}_{i-2}| + |\Delta \mathbf{q}_i|}, \\ \text{or} \\ \frac{|\mathbf{q}_{i-2} \times \mathbf{q}_{i-1}|}{|\mathbf{q}_{i-2} \times \mathbf{q}_{i-1}| + |\mathbf{q}_i \times \mathbf{q}_{i+1}|}, \end{cases} \quad (8)$$

$$\mathbf{q}_i = \frac{\Delta \mathbf{p}_i}{|\Delta \mathbf{p}_i|} = \frac{\mathbf{a}_i}{|\mathbf{a}_i|}, \quad i=0, \dots, n.$$

2.2 終端条件

各方法による生成曲線を同じ境界条件のもとで比較できるように, Besselの接線条件¹⁾を採用する. Besselの接線は端点 \mathbf{p}_0 で次のようになる.

$$\mathbf{s}_0 = (1 + \alpha_1) \mathbf{a}_0 - \alpha_1 \mathbf{a}_1. \quad (9)$$

これは仮想通過点 \mathbf{p}_{-1} を次のように採ると式(5)となる.

$$\mathbf{a}_{-1} = 2\mathbf{a}_0 - \mathbf{a}_1, \quad \Delta_{-1} = \Delta_1. \quad (10)$$

このとき, 4点 $\mathbf{p}_{-1}, \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ が1つの放物線, したがって2次のBézier曲線上の点となる.

Akimaの接線ではさらに次を追加することになる⁷⁾. 点 \mathbf{p}_{-2} も同じ放物線上の点となる.

$$\mathbf{a}_{-2} = 3\mathbf{a}_0 - 2\mathbf{a}_1.$$

端点 \mathbf{p}_n 側でも同様の終端条件を採用する.

$$\begin{cases} \mathbf{a}_n = 2\mathbf{a}_{n-1} - \mathbf{a}_{n-2}, & \Delta_n = \Delta_{n-2}, \\ \mathbf{a}_{n+1} = 3\mathbf{a}_{n-1} - 2\mathbf{a}_{n-2}. \end{cases} \quad (11)$$

FMILLの接線でも同じ仮想通過点を使う. Renner & Pochop法では $\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_n$ をBesselの接線として, $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_{n-1}$ を次のように独自の境界条件¹¹⁾から決める.

$$\begin{cases} \mathbf{s}_1 = \frac{|\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2| \Delta \mathbf{p}_0 + \Delta \mathbf{p}_1}{|\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2| + 1}, \\ \mathbf{s}_{n-1} = \frac{\Delta \mathbf{p}_{n-2} + |\mathbf{q}_{n-3} \times \mathbf{q}_{n-2}| \Delta \mathbf{p}_{n-1}}{1 + |\mathbf{q}_{n-3} \times \mathbf{q}_{n-2}|}. \end{cases} \quad (12)$$

3. 接線推定法による4次のC²曲線

3次のC¹連続なBessel, FMILL, AkimaとRenner & Pochop(の方法による)曲線を4次のS-スプラインとしてC²連続化する. そして, この曲線と同じ次数で同じ局所性を有するC²補間曲線として比較対象にするために, 「局所性を系統的に制御できるC²曲

線⁵⁾⁻⁷⁾」をノンユニフォームな節点間隔の曲線に拡張する.

3.1 4次のC²S-スプライン

2章のC¹補間曲線をC²連続化するために用いるS-スプライン^{2),4)}について簡単に述べる. 4次のC²連続なS-スプラインは3次のB-スプライン補間曲線の各スパンを4次に上げて制御点を付加した曲線である. 自身の互いに独立な制御点として, この付加制御点と通過点をもつ曲線である. 通過点, 制御点などを次のように記すこととしてS-スプラインを式(13)によって表す.

- B-スプライン制御点: $\mathbf{d}_{-1}, \dots, \mathbf{d}_{2i}, \dots, \mathbf{d}_{2n+1}$,
- 4次のBézier制御点: $\mathbf{c}_{-1}, \dots, \mathbf{c}_{4i}, \mathbf{c}_{4i+1}, \dots, \mathbf{c}_{4n+1}$,
- S-スプライン制御点:

$$\mathbf{d}_{-1}, \mathbf{p}_0, \mathbf{d}_1, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{d}_{2n-1}, \mathbf{p}_n, \mathbf{d}_{2n+1},$$

$$\mathbf{r}(u) = \sum_0^n f_i(u) \mathbf{p}_i + \sum_{-1}^n g_i(u) \mathbf{d}_{2i+1}. \quad (13)$$

S-スプラインは局所性のある曲線である. 通過点, 付加制御点の各ブレンディング関数 $f_i(u)$ と $g_i(u)$ の局所台(恒等的にゼロでない区間)はそれぞれ2区間と3区間である. すべての節点は二重節点である. 節点間隔は2章と同じとする.

S-スプライン制御点やBézier制御点などの関係を図2に示す. Bézier曲線とB-スプライン制御点の間には次の関係がある.

$$\begin{cases} \mathbf{p}_i = \delta_i \mathbf{c}_{4i-1} + \gamma_i \mathbf{c}_{4i+1}, \\ \mathbf{c}_{4i-1} = \delta_i \mathbf{d}_{2i-1} + \gamma_i \mathbf{d}_{2i}, \\ \mathbf{c}_{4i+1} = \delta_i \mathbf{d}_{2i} + \gamma_i \mathbf{d}_{2i+1}, \\ \gamma_i = \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_{i-1} + \Delta_i}, \\ \delta_i = \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1} + \Delta_i} = 1 - \gamma_i, \\ i=0, \dots, n. \end{cases} \quad (14)$$

これはまた次のC²連続な補間条件でもある.

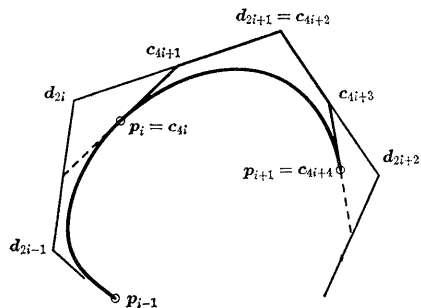


図2 S-スプライン制御点とBézier制御点
Fig. 2 S-spline polygon and Bézier polygons.

$$\delta_i^2 \mathbf{d}_{2i-1} + 2\delta_i \gamma_i \mathbf{d}_{2i} + \gamma_i^2 \mathbf{d}_{2i+1} = \mathbf{r}(u_i) = \mathbf{p}_i, \quad (15)$$

$$i=0, \dots, n.$$

各スパンは次の Bézier 曲線である.

$$\mathbf{r}_i(t) = \sum_{j=0}^4 \binom{4}{j} (1-t)^{4-j} t^j \mathbf{c}_{4i+j}, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (16)$$

$$i=0, \dots, n.$$

3.2 局所性のある C² 補間曲線

S-スプラインは付加制御点を決めれば補間曲線として確定する. そこで, 接線推定法によって3次の Bézier 制御点を式(4)のように決めした後, 次式によって付加制御点を定める. これは次数上げに使う制御点位置である¹⁾.

$$\mathbf{d}_{2i+1} = \frac{\mathbf{b}_{3i+1} + \mathbf{b}_{3i+2}}{2}, \quad i = -1, \dots, n. \quad (17)$$

ただし, 両端では Bessel の終端条件から次のようになる.

$$\begin{cases} \mathbf{b}_{-2} = \frac{1}{\delta_0} \mathbf{b}_{-1} - \frac{\gamma_0}{\delta_0^2} \mathbf{b}_1 + \left(\frac{\gamma_0}{\delta_0}\right)^2 \mathbf{b}_2, \\ \mathbf{b}_{3n+2} = \frac{1}{\gamma_n} \mathbf{b}_{3n+1} - \frac{\delta_n}{\gamma_n^2} \mathbf{b}_{3n-1} + \left(\frac{\delta_n}{\gamma_n}\right)^2 \mathbf{b}_{3n-2}. \end{cases} \quad (18)$$

これによって C² Bézier や FMILL 曲線では付加制御点を 4 通過点から決めることになる. Akima 曲線では付加制御点を隣接 6 通過点から決めることにな

る. 残りの偶数番の B-スプライン制御点を式(15)より決めれば C² 曲線が確定する. ただし, 実用的には, Bézier 制御点を式(14)から導いて式(16)で曲線を生産する方が便利である.

結局, この曲線は C¹ 曲線から付加制御点を決めて(これを固定して), 接続点近傍を調整して C² 連続化したものである. したがって, 元の C¹ 曲線より大域性をもつ曲線となっている. 各スパンは Bessel や FMILL 曲線では 6 通過点から, Akima や Renner & Pochop 曲線では 8 通過点から決まることになる.

3.3 局所性を系統的に制御できる C² 補間曲線

前節の曲線と同じ次数の同じ局所性をもつほかの C² 曲線と比較するために, 著者らがすでに導いた「局所性を系統的に制御できる補間曲線」をノンユニフォーム化する.

まず, S-スプラインの各スパンを 3 次式とみなして C² 補間曲線を導く. 付加制御点は全通過点の(係数和が 1 の)重心結合として決まる. 次に, この付加制御点を隣接の 4 通過点あるいは 6 通過点以外の項をゼロとおいた重心結合によって近似する. 最後に, 式(15)から偶数番の B-スプライン制御点を決め直す. このように付加制御点を 4 ないしは 6 通過点から決めてえられる曲線^{*}は, それぞれ, C² Bessel や FMILL

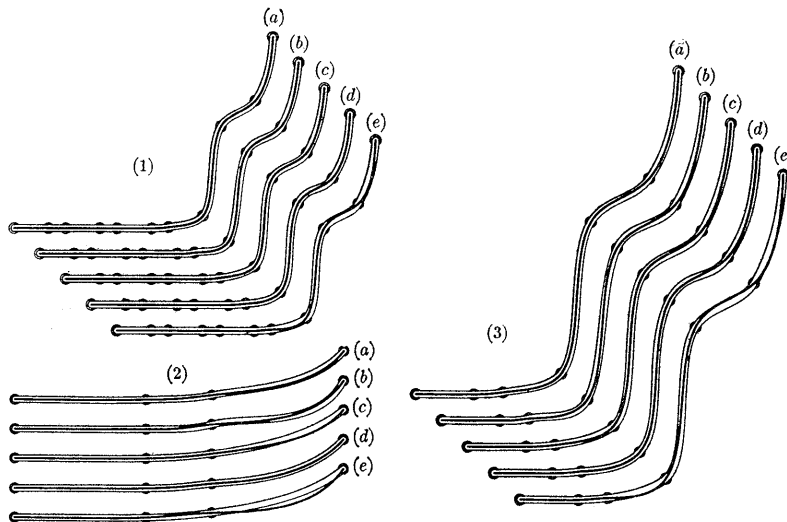


図 3 (1) C¹ 曲線 (白抜き太線) と C² 曲線 (実線), (2) 左から 5~7 スパン, (3) 左から 5~10 スパン, (a) Bessel, (b) FMILL, (c) Akima, (d) Renner & Pochop, (e) C¹ Akima-3 次の C²

Fig. 3 (1) C¹ curve (outlined thick line) and C² curve (solid line), (2) their 5th~7th spans and (3) their 5th~10th spans, (a) Bessel, (b) FMILL, (c) Akima, (d) Renner & Pochop, (e) C¹ Akima-cubic C².

* ユニフォームな曲線の場合に対応づけて, それぞれを $m=1, m=2$ の曲線と呼ぶことにする.

曲線あるいはC² Akima や Renner & Pochop 曲線と同じ局所性をもつ曲線である。

具体的には、3次のC²補間曲線を導くための連立方程式として、式(15)のn+1個に各スパンの4次の項をゼロとする次のn個の条件を加える。これはBézier 曲線(16)の4次の項を書き換えることによって導くことができる。

$$4\delta_i \mathbf{d}_{2i} + 2(2\gamma_i - 3 + 2\delta_{i+1}) \mathbf{d}_{2i+1} + 4\gamma_{i+1} \mathbf{d}_{2i+2} = \mathbf{p}_i + \mathbf{p}_{i+1}, \quad i=0, \dots, n-1. \quad (19)$$

終端条件として、Bessel の接線条件(9)と(11)を付加する。これは変形して右辺を通過点に展開しておく。

$$\begin{cases} 4\delta_0 \mathbf{d}_0 + 4\gamma_0 \mathbf{d}_1 = (3 - \gamma_1) \mathbf{p}_0 + \left(1 + \frac{\Delta_0}{\Delta_1}\right) \mathbf{p}_1 \\ \qquad \qquad \qquad - \frac{\Delta_0}{\Delta_1} \gamma_1 \mathbf{p}_2, \\ 4\delta_n \mathbf{d}_{2n-1} + 4\gamma_n \mathbf{d}_{2n} = (3 - \gamma_n) \mathbf{p}_n \\ \qquad \qquad \qquad \left(1 + \frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}}\right) \mathbf{p}_{n-1} - \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}} \gamma_n \mathbf{p}_{n-2}. \end{cases} \quad (20)$$

この連立方程式の右辺の列ベクトルは(2n+3)×(n+1)行列Mを使ってM[**p**₀, **p**₁, ..., **p**_n]^tのように変換できるので、すべての制御点を通過点の重心結合として表すことができる。したがって、付加制御点を容易に隣接4通過点あるいは6通過点の重心結合で近似できる。

3.4 局所性のある補間曲線の比較

Akima による補間データ⁷⁾のうち、あてはめの難しいといわれる次の例を使って、局所性のあるC¹およびC²連続な補間曲線相互の比較を行う。なお、図3, 4, 5, 7では適宜注目スパン部分を抜きだして表示している。

x	0	2	3	5	6	8	9	11	12	14	15
y	10	10	10	10	10	10	10.5	15	50	60	85

ただし、彼の論文中の図の縦横比とあわせるためにx座標値を2/3倍、y座標値を1/10倍する。なお、以下のRenner & Pochop 曲線例においては(8)の後者の式を用いている。

図3では3.2節のC²補間曲線と元のC¹補間曲線を比較している。いずれの方法による曲線も元の曲線の全体的形状を反映していることがわかる。(e)に示した比較結果は関数グラフとしての(1次元)曲線を比較したAkimaの結果とは異なり、平面曲線としての3次のC²補間曲線はそれほど「振動」しないことを示している。

図4ではこれらC²補間曲線相互の比較をしている。(2)では、左に書いた曲線を中心に右に書いた曲線までの偏差を10倍して示している。Bessel 曲線とFMILL 曲線は等間隔の節点列で一致する曲線であるので、図には不等間隔の影響がところどころでしているとみることができる。Akima 曲線はBessel 曲線やRenner & Pochop 曲線と比較しても「振動の少ない」曲線であることがわかる。

図5では局所性を系統的に制御できるC²補間曲線との比較を示している。m=1の曲線はBessel やFMILL曲線より凸側にずれる。m=2の曲線もAkima やRenner & Pochop 曲線に比べて多少「振動」することがわかる。新しい曲線はこの例のような通過点列に対して、より「振動」の少ない形状を生成することがわかる。

図6にはこのような曲線を使う上で注意すべき通過点配置を示している。図のように一直線上の3点を通

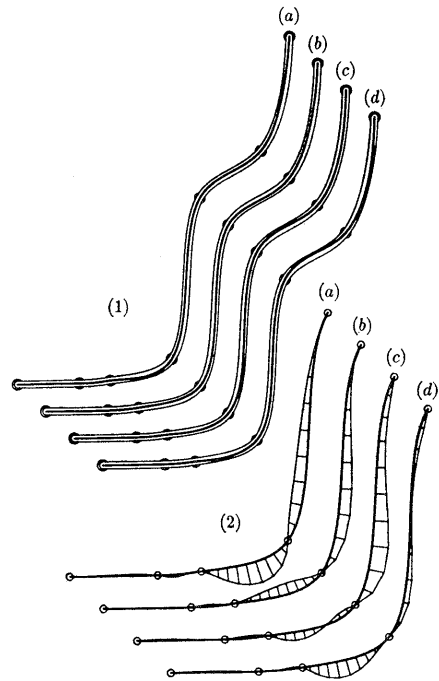


図4 (1) C²曲線相互の比較(白抜き太線-実線)と(2)拡大偏差, (a) Bessel-FMILL, (b) Bessel-Akima, (c) Bessel-Renner & Pochop, (d) Akima-Renner & Pochop
Fig. 4 (1) Comparison of C² curves (outlined thick line-solid line), (2) scaled deviation, (a) Bessel-FMILL, (b) Bessel-Akima, (c) Bessel-Renner & Pochop, (d) Akima-Renner & Pochop.

る C^1 FMILL 曲線に含まれていた3つの変曲点は C^2 連続化によって1つに減少するという好ましい結果となる。一方、 C^1 Akima 曲線 (C^1 Bessel や Renner & Pochop 曲線でも同様) は直線部分を含んでいたのが C^2 連続化によって3つの変曲点を含むことになる。この不具合を避けるには直線部分から曲線に移るときに、少しだけずらした、Akima の補間データ例

中の7番目のような点を挿入することである。

4. C^1 曲線との偏差最小な C^2 曲線

3.2 節の C^2 曲線は元の C^1 曲線の全体形状を反映した曲線であった。しかし、局所性を捨てるならば、より一層元の曲線の形状に近い C^2 曲線をうることができる。ここでは、元の C^1 曲線に最も近い形状の C^2 曲線の一例として、最小自乗法の意味で最も近い C^2 曲線を導いて3.2 節の C^2 曲線と比較する。

元の C^1 曲線を $r(u)$ 、新しい C^2 曲線を $\tilde{r}(u)$ とする。元の曲線のスパン $r_i(u)$ を4次に上げた Bézier 制御点を $\{b_{4i}, b_{4i+1}, b_{4i+2}, b_{4i+3}, b_{4i+4}\}$ とする¹⁾。3.2 節の C^2 曲線の対応制御点を $\{c_{4i}, c_{4i+1}, c_{4i+2}, c_{4i+3}, c_{4i+4}\}$ とする。新しい曲線のスパン $\tilde{r}_i(u)$ の付加制御点は c_{4i+2} より x_i だけ変位しているとする。そして、次の J を $\{x_i\}_{i=1}^{n-1}$ に関して最小化するものとする。

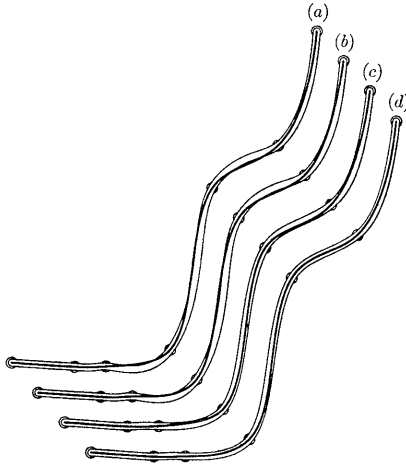


図5 局所性を制御できる C^2 補間曲線 (白抜き太線) との比較, (a) $m=1$ -Bessel, (b) $m=1$ -FMILL, (c) $m=2$ -Akima, (d) $m=2$ -Renner & Pochop

Fig. 5 Comparison with interpolating curves with controllable locality (outlined thick line), (a) $m=1$ -Bessel, (b) $m=1$ -FMILL, (c) $m=2$ -Akima, (d) $m=2$ -Renner & Pochop.

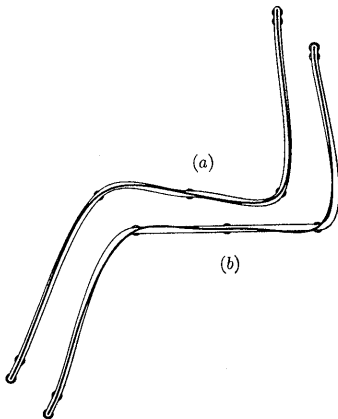


図6 不具合を生ずる通過点配置, 白抜き太線: C^1 曲線, 実線: C^2 曲線, (a) FMILL, (b) Akima
Fig. 6 Undesired configuration of data points, outlined thick line: C^1 curve, solid line: C^2 curve, (a) FMILL, (b) Akima.

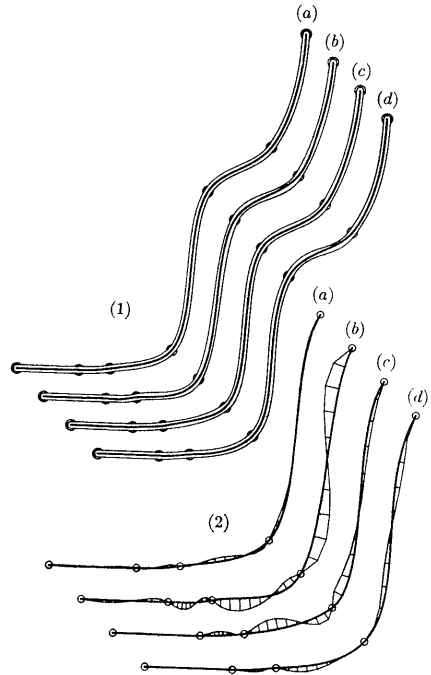


図7 (1) 偏差最小の C^2 曲線, 白抜き太線: C^1 曲線, 実線: C^2 曲線, (2) 拡大偏差, (a) Bessel, (b) FMILL, (c) Akima, (d) Renner & Pochop
Fig. 7 (1) C^2 curve (solid line) minimally deviated from C^1 curve (outlined thick line), (2) scaled deviation, (a) Bessel, (b) FMILL, (c) Akima, (d) Renner & Pochop.

$$J = \int_{u_0}^{u_n} \{r(u) - \underline{r}(u)\}^2 du. \quad (21)$$

この積分の $r_i(u)$ スパン関係分 J_i は次のようになる。

$$\begin{aligned} J_i &= \int_{u_i}^{u_{i+1}} \{r_i(u) - \underline{r}_i(u)\}^2 du = \Delta_i \int_0^1 \{4(1-t)^3 e_1 \\ &\quad + 6(1-t)t^2 x_i + 4(1-t)t^3 e_2\}^2 dt \\ &= \frac{2\Delta_i}{315} (10e_1^2 + 15e_1 \cdot x_i + 9x_i^2 + 8e_1 \cdot e_2 \\ &\quad + 15x_i \cdot e_2 + 10e_2^2). \end{aligned} \quad (22)$$

ただし、

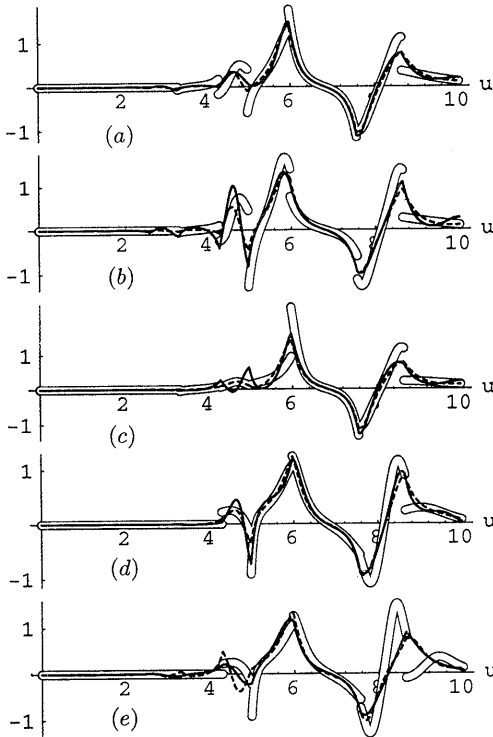


図8 曲率グラフ、白抜き太線：C¹ 曲線、点線：C² 曲線、実線：偏差最小のC² 曲線、(a) Bessel, (b) FMILL, (c) Akima, (d) Renner & Pochop, (e) 局所性を制御できる曲線 (白抜き太線： $m=1$, 点線： $m=2$, 実線：3次のC²)

Fig. 8 Curvature graph, outlined thick line: C¹ curve, dashed line: C² curve, solid line: minimally deviated C² curve, (a) Bessel, (b) FMILL, (c) Akima, (d) Renner & Pochop, (e) curve with controllable locality (outlined thick line: $m=1$, dashed line: $m=2$, solid line: cubic C²).

$$\begin{cases} e_1 = c_{4i+1} - b_{4i+1} - \frac{\delta_i^2}{2\gamma_i} x_{i-1} + \frac{1}{2}\gamma_i x_i, \\ x_i = c_{4i+2} - b_{4i+2}, \\ e_2 = c_{4i+3} - b_{4i+3} + \frac{1}{2}\delta_{i+1} x_i - \frac{\gamma_{i+1}^2}{2\delta_{i+1}} x_{i+1}. \end{cases} \quad (23)$$

x_i はスパン $r_{i-1}(u)$, $r_i(u)$, $r_{i+1}(u)$ に関係するだけである。

J を最小化する x_i はその各成分 x_i および y_i で偏微分してゼロとおいた連立一次方程式からえられる。

$$\begin{cases} \frac{\partial J}{\partial x_i} = 0, \\ \frac{\partial J}{\partial y_i} = 0, \end{cases} \quad i = -1, \dots, n+1. \quad (24)$$

実は、未知数 $\{x_i\}_{i=-1}^{n+1}$ と $\{y_i\}_{i=-1}^{n+1}$ の係数行列は等しい。しかも各行列は両端を除く主対角線上に大きな値をもつ対称な五重対角行列である。安定で容易に解をうることができる。

結果の曲線を図7に示している。(2)ではC¹ 曲線を中心に偏差最小のC² 曲線までの実際の偏差を10倍して表示している。いずれの曲線も元のC¹ 曲線に大変近いことがわかる。

図8ではこれまでの曲線を曲率グラフによって比較している。局所性の強い Bessel や FMILL 曲線およ

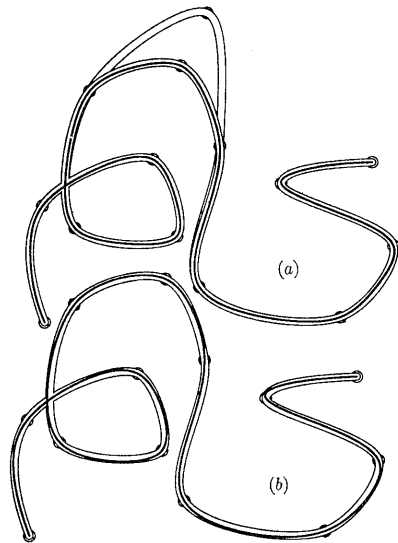


図9 C¹ 曲線 (白抜き太線) による局部修正後の (a) 偏差最小のC² 曲線と (b) 3.2 節のC² 曲線

Fig. 9 (a) C² curve minimally deviated from C¹ curve (outlined thick line) after local correction and (b) C² curve by the method of Section 3.2.

表 1 曲率自乗積分値
Table 1 Square integral of curvature.

	Bessel	F MILL	Akima	R. & P.
3.2節の曲線	1.2740	1.4201	1.2431	1.17234
4章の曲線	1.3301	1.8632	1.3973	1.2872

び局所性を制御できる曲線 ($m=1$ や 2) では直線部分でも微妙に「振動」していることがわかる。それ以外の曲線部分では点線と実線はほぼ一致している。そこで、曲率自乗積分を計算してみると表 1 のようになる。この値からは 3.2 節の C^2 曲線の方がより滑らかであるといえる。

結局、局所性の喪失と計算量の増大に加えて滑らかさをやや損なうという代償を払って、元の C^1 曲線により近い C^2 曲線をえたことになる。試行錯誤的な形状設計過程では、柔軟性がある取り扱やすい 3 次の C^1 曲線で形状探索していった、ゴール近くなったところでこの曲線に切り替えて C^2 連続化することが考えられる。図 9 (a) は C^1 曲線で局部修正した後にこの曲線で C^2 連続化した例である。しかし、多くの応用では (b) のように 3.2 節の C^2 曲線で十分であろう。

5. ま と め

局所的接線推定法による従来の 3 次の C^1 補間曲線を拡張して、元の曲線の全体的形状を損なうことなく、かつ各固有の特徴もできるだけ残すような 4 次の C^2 S -スプライン補間曲線を提案した。Akima の補間データと Bessel の終端条件を使って生成曲線を図的および数値的にテストした結果、提案した 4 曲線は予定したように次のような共通の特長とともに、 C^1 曲線から引き継いだと思われる各固有の特徴を表した。

1. C^2 連続である。
2. スパンごとに逐次定義できるし、形状を部分的に修正することもできる。 C^1 曲線より少し大域性が増して、3 個ずつ多い通過点によって 1 スパンが定まる。
3. 3 次の C^2 補間曲線や局所性を系統的に制御できる C^2 補間曲線より「振動」の少ない形状を生成する。
4. FMILL 曲線以外は直線部分を含むことができる。

副次的に次のような結果をえた。

- このような C^1 および C^2 補間曲線が不具合な形状

を生じかねない通過点配置の指摘と回避法。

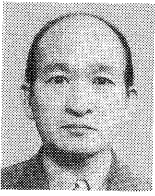
- 局所性を系統的に制御できるノンユニフォームな C^2 補間曲線。
- 任意の 3 次の C^1 補間曲線に最小自乗法の意味で最も近い (大域性のある) 4 次の C^2 補間曲線。

参 考 文 献

- 1) Farin, G. (大村文彦 監修, 山口 泰 監訳): CAGD のための曲線・曲面理論—実践的利用法—, p. 330, 共立出版 (1991).
- 2) 河合利幸, 藤田卓志, 大村皓一: 2 重節点をもつスプライン基底の一構成法, 信学論 (D), Vol. J71-D, No. 6, pp. 1149-1150 (1988).
- 3) 黒田 満, 古川 進, 木村文彦: 局所性を制御できる C^2 連続な $B2$ -スプライン補間曲線, 精密工学会誌, Vol. 60, No. 1, pp. 65-69 (1994).
- 4) 黒田 満, 古川 進, 木村文彦: 局所性を制御できる補間曲線としての S -スプラインと $B2$ -スプライン, 情報処理学会論文誌, Vol. 34, No. 11, pp. 2294-2301 (1993).
- 5) Kuroda, M., Furukawa, S. and Kimura, F.: Controllable Locality in C^2 Interpolating Curves by $B2$ -splines/ S -splines, *Computer Graphics Forum*, Vol. 13, No. 1, pp. 49-55 (1994).
- 6) Hoschek, J. and Lasser, D.: *Fundamentals of Computer Aided Geometric Design*, p. 727, AK Peters (1993).
- 7) Akima, H.: A New Method of Interpolation and Smooth Curve Fitting Based on Local Procedures, *J. ACM*, Vol. 17, No. 4, pp. 589-602 (1970).
- 8) Woodward, C. D.: $B2$ -splines—A Local Representation for Cubic Spline Interpolation—, Kunii, T. L. (ed.), *Proc. CG International '87*, pp. 197-206, Springer-Verlag, New York (1987).
- 9) 古川 進, 伊藤 誠, 黒田 満, 清水誠司: 自由曲線, 曲面の生成時における制御点決定の一手法, 精密工学会誌, Vol. 58, No. 4, pp. 715-719 (1992).
- 10) Renner, G.: A Method of Shape Description for Mechanical Engineering Practice, *Computer in Industry*, Vol. 3, pp. 137-142 (1982).
- 11) Renner, G. and Pochop, V.: A New Method for Local Smooth Interpolation, Encarnacao, J. L. (ed.), *EUROGRAPHICS '81*, pp. 137-147 (1981).

(平成 6 年 2 月 22 日受付)

(平成 6 年 5 月 12 日採録)

**黒田 満** (正会員)

昭和18年生。昭和40年岐阜大学工学部卒業。同年同大学工学部助手。昭和56年豊田工業大学制御情報工学科講師。現在助教授。曲線・曲面理論、コンピュータ・グラフィックスの研究に従事。工学博士。精密工学会、日本機械学会、ACMなどの各会員。

**古川 進** (正会員)

昭和19年生。昭和43年山梨大学大学院修士課程修了。同年山梨大学工学部助手。講師を経て昭和63年より同助教授。CAD/CAMシステム、立体の特徴抽出、曲線・曲面理論などの研究に従事。物流やロボットにも興味を持っている。工学博士。精密工学会、日本機械学会、設計工学会などの各会員。

**木村 文彦** (正会員)

昭和20年生。昭和49年東京大学大学院博士課程修了。同年電子技術総合研究所パターン情報部入所。昭和54年より東京大学工学部精密機械工学科助教授。昭和62年より同教授。マン・マシン・システム、コンピュータ・グラフィックス、形状モデリング、CAD/CAMなどの研究に従事。工学博士。IFIP-WG 5.2-5.3 委員。精密工学会、日本機械学会などの各会員。