テクニカルノート

任意の区分3次補間曲線を最小自乗近似する4次の C^2 補間曲線

黒田 満[†] 古川 進[††] 木村文彦[†††]

任意に与えられる区分3次の補間曲線を最小自乗近似する4次の C^2 補間曲線を提案している．複合的な連続性をもつ3次曲線も C^2 連続化できる．与曲線が C^2 連続ならば同じ曲線となる．この新しい曲線はコンピュータグラフィックスや計算機援用の形状設計の分野で有用である．各スパンを次数上げしてえられる付加制御点を決めるための線形連立方程式を記号式として導いている．これは安定に容易に解くことができる．

Quartic C^2 Interpolating Curve Least-Square-Approximating Arbitrary Piecewise Cubic Interpolating Curve

Mitsuru Kuroda,[†] Susumu Furukawa[††] and Fumihiko Kimura[†††]

This paper presents a quartic C^2 interpolating curve which mimics a given cubic interpolating curve on the basis of the least-square approximation. The scheme can make C^2-continuous a composite curve with various continuity. The resulting curve would be identical to a cubic C^2 interpolating curve if a C^2 one would be given. The new curve is useful in the field of computer graphics and computer aided geometric design. The linear equation system is derived as symbolic expressions to determine additional control points obtained by degree-elevation in each span. The system is solvable stably and easily.

1. はじめに

本論文は3次の C^2 連続な補間曲線の拡張となるように，任意の区分3次補間曲線を最小自乗近似する4次の C^2 補間曲線を導くものである．C^1 連続や G^2 連続部分を含む複合的な曲線も一括して C^2 連続化できるし，C^2 曲線を与えれば同じ曲線となるので，データの補間あるいは計算機援用の形状設計やコンピュータグラフィックスの分野で有用である．

(節点間隔が) ユニフォームな曲線はとくに簡単であるが，結果にいたる過程は必ずしも容易でないせいかこれまでにこのような曲線は研究されてこなかった．著者らは近傍の通過点から推定する接線を用いて局所性のある C^2 補間曲線をうる研究をしていてこの問題に気づき[1]，解をえたのでここに報告する．

本研究では局所性のある4次の C^2 補間曲線 (S-スプライン[2]) を用いる．3次の B-スプライン補間曲線の各スパンを4次に上げてえられる付加制御点を最小自乗法に基づいて決めることになる．関連する線形連立方程式を数式処理システムによって記号式として導くので，利用者はこれを解くだけでよい．ノンユニフォーム曲線の場合にはプログラムのコーディングに少し手間取るけれども計算は安定でほとんど時間を要しない．

次数上げのかわりに節点挿入によって付加制御点をうる $B2$-スプライン[3]を用いても同様の結果をえるけれども，取り扱いが少し繁雑になる上に結果の形状にほとんど差が見られない[4),5)]ために省略した．

† 豊田工業大学制御情報工学科
Department of Information and Control Engineering, Toyota Technological Institute
†† 山梨大学工学部機械システム工学科
Department of Mechanical System Engineering, Faculty of Engineering, Yamanashi University
††† 東京大学工学部精密機械工学科
Department of Precision Machinery Engineering, Faculty of Engineering, The University of Tokyo

2. 最小自乗近似する4次の C^2 曲線

もちいる4次の C^2 補間曲線では節点はすべて二重である．また，次のような記法に従う通過点や制御点などには式(1)のような関係がある．図1参照．

- 3次の Bézier 制御点：$\boldsymbol{b}_0, \cdots, \boldsymbol{b}_{3i}, \boldsymbol{b}_{3i+1}, \cdots, \boldsymbol{b}_{3n}$,
- 4次の Bézier 制御点：$\boldsymbol{c}_0, \cdots, \boldsymbol{c}_{4i}, \boldsymbol{c}_{4i+1}, \cdots, \boldsymbol{c}_{4n}$,
- B-スプライン制御点：$\boldsymbol{d}_{-1}, \cdots, \boldsymbol{d}_{2i}, \cdots, \boldsymbol{d}_{2n+1}$,
- (二重) 節点：$u_0, \cdots, u_i, \cdots, u_n$.

u_i は重なった二つの節点を表し，制御点 $\boldsymbol{d}_i$ および $\boldsymbol{c}_{4i} = \boldsymbol{b}_{3i}$ と対応している．

$$\begin{cases} \text{通過点：} \boldsymbol{c}_{4i} = \boldsymbol{b}_{3i} = \alpha_i \boldsymbol{c}_{4i-1} + \beta_i \boldsymbol{c}_{4i+1}, \\ \text{制御点：} \boldsymbol{c}_{4i-1} = \alpha_i \boldsymbol{d}_{2i-1} + \beta_i \boldsymbol{d}_{2i}, \\ \text{制御点：} \boldsymbol{c}_{4i+1} = \alpha_i \boldsymbol{d}_{2i} + \beta_i \boldsymbol{d}_{2i+1}, \\ \text{付加制御点：} \boldsymbol{c}_{4i+2} = \boldsymbol{d}_{2i+1}, \\ \quad \alpha_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta_{i-1} + \Delta_i}, \\ \quad \beta_i = \dfrac{\Delta_{i-1}}{\Delta_{i-1} + \Delta_i} = 1 - \alpha_i, \\ \quad \Delta_i = u_{i+1} - u_i. \end{cases} \tag{1}$$

この曲線では付加制御点と通過点が局所性のある独立な変数である[4),5)]．したがって，与えられた区分3次補間曲線 $\underline{\boldsymbol{r}(u)}$ を最小自乗近似する4次の C^2 補間曲線 $\boldsymbol{r}(u)$ を導くことは，次式の J を最小化するように付加制御点を決定することである．$\{\boldsymbol{b}_i\}_{i=0}^{3n}$ と $\{\Delta_i\}_{i=0}^{n-1}$ を入力して $\{\boldsymbol{c}_i\}_{i=0}^{4n}$ を出力する．

$$\begin{aligned} J &= \int_{u_0}^{u_n} \{\boldsymbol{r}(u) - \underline{\boldsymbol{r}(u)}\}^2 du \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \Delta_i \int_0^1 \{\boldsymbol{r}_i(t) - \underline{\boldsymbol{r}_i(t)}\}^2 dt. \end{aligned}$$

まずスパン $\underline{\boldsymbol{r}_i(t)}$ を次数上げ[6)]して次のような Bézier 制御点によって4次式表現する（整理すると4次項は消える）．

$$\left\{ \boldsymbol{b}_{3i}, \frac{\boldsymbol{b}_{3i} + 3\boldsymbol{b}_{3i+1}}{4}, \frac{\boldsymbol{b}_{3i+1} + \boldsymbol{b}_{3i+2}}{2}, \frac{3\boldsymbol{b}_{3i+2} + \boldsymbol{b}_{3i+3}}{4}, \boldsymbol{b}_{3i+3} \right\}$$

次にスパン $\boldsymbol{r}_i(t)$ の制御点を式(1)の関係を使って書きかえる．

$$\begin{cases} \boldsymbol{c}_{4i-1} = \dfrac{1}{2\alpha_i} \boldsymbol{b}_{3i} + \dfrac{\alpha_i}{2} \boldsymbol{c}_{4i-2} - \dfrac{\beta_i^2}{2\alpha_i} \boldsymbol{c}_{4i+2}, \\ \boldsymbol{c}_{4i+1} = \dfrac{1}{2\beta_i} \boldsymbol{b}_{3i} - \dfrac{\alpha_i^2}{2\beta_i} \boldsymbol{c}_{4i-2} + \dfrac{\beta_i}{2} \boldsymbol{c}_{4i+2}. \end{cases} \tag{2}$$

すべての付加制御点に $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_{4n-1}$ を加えて未知数とする．J の式中で $\boldsymbol{r}(u) - \underline{\boldsymbol{r}(u)}$ はこれらの未知数に関して線形である．したがって，未知数に関する次のような線形連立方程式(3)を導くことができる．実際の誘導には数式処理システムを用いた．M と N はそれぞれ $(n+2)\times(n+2)$ および $(n+2)\times(3n+1)$ 要素のスカラーからなる行列である．M は対角線上に大きな値をもつ五重対角の対称行列である．安定で容易に解をうることができる．曲線はどちらの端を始点とするかに独立に表されるので N もその意味の対称性をもっている．以下では M や N のこれらの性質を考慮して要素 $M_{i,j}$ や $N_{i,j}$ の記述を省略してある．

$$M \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_1 \\ \boldsymbol{c}_2 \\ \boldsymbol{c}_6 \\ \cdots\cdots \\ \boldsymbol{c}_{4n-1} \end{bmatrix} = N \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_0 \\ \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \\ \cdots \\ \boldsymbol{b}_{3n} \end{bmatrix} \tag{3}$$

節点間隔がユニフォームですべての Δ_i が等しく，したがってすべての α_i と β_i が 1/2 のときには M と N は次のようになる．

$$M = \frac{1}{315} \begin{bmatrix} 40 & 34 & -4 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & 56 & -21 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & \cdots & 78 & -22 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & 78 & -22 & 1 & 0 & \cdots \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & \cdots & 78 & -21 & -4 \\ & & & & & \cdots & 56 & 34 \\ & & & & & & \cdots & 40 \end{bmatrix},$$

$$N = \frac{1}{1260} \begin{bmatrix} 40 & 180 & 108 & -48 & 0 & \cdots & \cdots \\ 34 & 189 & 207 & -90 & -45 & -27 & 12 \\ -4 & -27 & -45 & -102 & 234 & 234 & -102 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & -27 & -45 & -102 \\ \cdots & & & \cdots & & & \cdots \\ \cdots & & & \cdots & & & \cdots \\ \cdots & & & \cdots & & & \cdots \end{bmatrix}$$

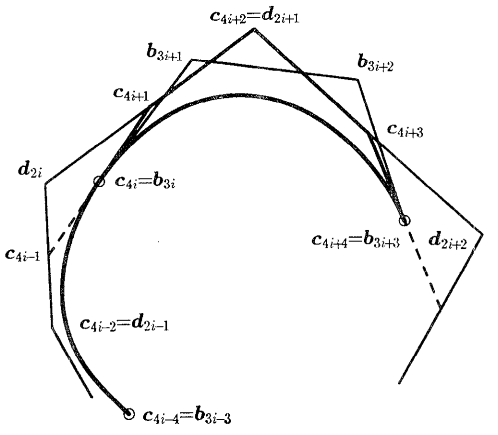
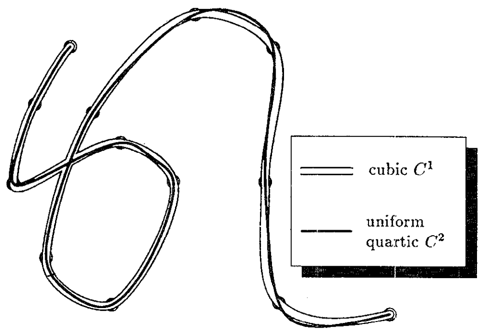


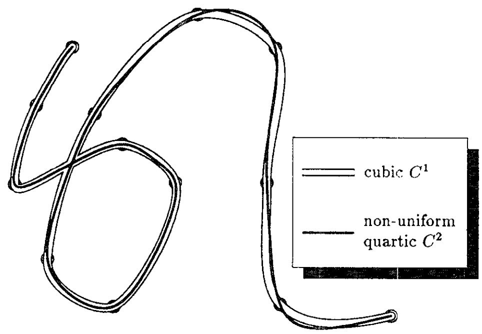
図 1 制御点と通過点の関係
Fig. 1 Relationship between control points and passing points.

$$
\left.\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & & & & & & & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & & & & & & \cdots & 0 \\
-45 & -27 & 12 & 0 & \cdots & & & \cdots & 0 \\
234 & 234 & -102 & -45 & -27 & 12 & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & & & \cdots & & & \cdots & & \\
\cdots & & & \cdots & & & \cdots & 189 & 34 \\
\cdots & & & \cdots & & & \cdots & 180 & 40
\end{array}\right].
$$

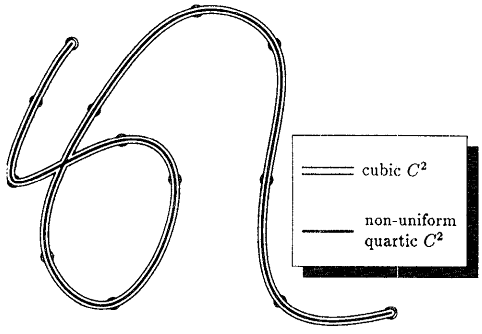
節点間隔がノンユニフォームなときの行列要素の値は付録に掲げる．



(a) Cubic C^1 curve (left 7 spans: Akima curve, right 5 spans: Bessel curve) and uniform quartic C^2 curve.



(b) Cubic C^1 curve (left 7 spans: Akima curve, right 5 spans: Bessel curve) and non-uniform quartic C^2 curve.



(c) Cubic C^2 curve and non-uniform quartic C^2 curve.

図 2　4次の C^2 補間曲線の例
Fig. 2　Examples of quartic C^2 interpolating curves.

3. 曲　線　例

図2に曲線例を示す．与えた区分3次曲線は(a)，(b)では，左から7スパンが Akima 曲線[7]で残りが Bessel 曲線[6]であり，(c)ではノンユニフォームな3次の C^2 補間曲線である．いずれも白抜き太線で示してある．生成された本曲線は実線で示し，(a)はユニフォーム曲線で(b)，(c)はノンユニフォーム曲線である．Akima 曲線と Bessel 曲線はそれぞれ通過点における接線を近傍の5および3通過点から推定して C^1 曲線を生成するもので，Akima 曲線のほうが大域性が強く「より C^2 連続に近いのか」，C^2 連続な本曲線が元の曲線の近くを通るのがわかる．(a)の曲線の左から4スパン目で「うねり」が生じているのが(b)では（錯視でいぜん「うねり」が残っているように見えるが）解消している．(c)では両曲線が完全に一致していることがわかる．実際に4次の項がゼロになっていることを数値的に確かめている．ここでは平面曲線例だけをあげたが空間曲線も同様に扱える．

4. ま　と　め

任意の区分3次補間曲線を最小自乗近似する4次の C^2 補間曲線を導いた．そして実例に基づいて以下のことを確認した．

- 3次の C^2 補間曲線を与えて同じ曲線をえる．
- 記号式として導いた線形連立方程式は安定に容易に解くことができる．
- ユニフォーム曲線はとくに簡単であるが，通過点配置によっては予期せぬ「うねり」を生ずることもある．この「うねり」はノンユニフォーム曲線によって解消した．

参　考　文　献

1) 黒田　満，木村文彦，古川　進：局所的接線推定法による4次の C^2 補間曲線，情報処理学会論文誌，Vol. 35, No. 9, pp. 1759-1767 (1994).
2) 河合利幸，藤田卓志，大村皓一：2重節点をもつスプライン基底の一構成法，信学論（D），Vol. J71-D, No. 6, pp.

1149-1150 (1988).

3) Woodward, C. D.: *B*2-splines—A Local Representation for Cubic Spline Interpolation—, Kunii, T. L. (ed.), *Proc. CG International '87*, pp. 197-206, Springer-Verlag, New York (1987).

4) 黒田　満，古川　進，木村文彦：局所性を制御できる補間曲線としての *S*-スプラインと *B*2-スプライン，情報処理学会論文誌，Vol. 34, No. 11, pp. 2294-2301 (1993).

5) Kuroda, M., Furukawa, S. and Kimura, F.: Controllable Locality in C^2 Interpolating Curves by *B*2-splines/*S*-splines, *Computer Graphics Forum*, Vol. 13, No. 1, pp. 49-55 (1994).

6) Farin, G. (木村文彦監修，山口　泰監訳)：CAGD のための曲線・曲面理論—実践的利用法—，p. 330, 共立出版 (1991).

7) Akima, H.: A New Method of Interpolation and Smooth Curve Fitting Based on Local Procedures, *J. ACM*, Vol. 17, No. 4, pp. 589-602 (1970).

付録　ノンユニフォーム曲線の *M* と *N*

$$M_{1,1}=\frac{8\Delta_0}{63},$$

$$M_{1,2}=\frac{2\Delta_0}{21}+\frac{8\alpha_1\Delta_0}{315},$$

$$M_{1,3}=-\frac{8\beta_1^2\Delta_0}{315\alpha_1},$$

$$M_{2,2}=\frac{4\Delta_0}{35}+\frac{2\alpha_1\Delta_0}{21}+\frac{2\alpha_1^2\Delta_0}{63}+\frac{2\alpha_1^4\Delta_1}{63\beta_1^2},$$

$$M_{2,3}=-\frac{2\beta_1^2\Delta_0}{63}-\frac{\beta_1^2\Delta_0}{21\alpha_1}-\frac{2\alpha_1^2\Delta_1}{63}-\frac{\alpha_1^2\Delta_1}{21\beta_1}-\frac{4\alpha_1^2\alpha_2\Delta_1}{315\beta_1},$$

$$M_{2,4}=\frac{4\alpha_1^2\beta_2^2\Delta_1}{315\alpha_2\beta_1},$$

$$M_{3,3}=\frac{2\beta_1^4\Delta_0}{63\alpha_1^2}+\frac{4\Delta_1}{35}+\frac{2\alpha_2\Delta_1}{21}+\frac{2\alpha_2^2\Delta_1}{63}+\frac{2\beta_1\Delta_1}{21}+\frac{8\alpha_2\beta_1\Delta_1}{315}+\frac{2\beta_1^2\Delta_1}{63}+\frac{2\alpha_2^4\Delta_2}{63\beta_2^2},$$

$$M_{3,4}=-\frac{2\beta_2^2\Delta_1}{63}-\frac{\beta_2^2\Delta_1}{21\alpha_2}-\frac{4\beta_1\beta_2^2\Delta_1}{315\alpha_2}-\frac{2\alpha_2^2\Delta_2}{63}-\frac{\alpha_2^2\Delta_2}{21\beta_2}-\frac{4\alpha_2^2\alpha_3\Delta_2}{315\beta_2},$$

$$M_{3,5}=\frac{4\alpha_2^2\beta_3^2\Delta_2}{315\alpha_3\beta_2},$$

$$M_{4,4}=\frac{2\beta_2^4\Delta_1}{63\alpha_2^2}+\frac{4\Delta_2}{35}+\frac{2\alpha_3\Delta_2}{21}+\frac{2\alpha_3^2\Delta_2}{63}+\frac{2\beta_2\Delta_2}{21}+\frac{8\alpha_3\beta_2\Delta_2}{315}+\frac{2\beta_2^2\Delta_2}{63}+\frac{2\alpha_3^4\Delta_3}{63\beta_3^2},$$

$$M_{4,5}=-\frac{2\beta_3^2\Delta_2}{63}-\frac{\beta_3^2\Delta_2}{21\alpha_3}-\frac{4\beta_2\beta_3^2\Delta_2}{315\alpha_3}-\frac{2\alpha_3^2\Delta_3}{63}-\frac{\alpha_3^2\Delta_3}{21\beta_3}-\frac{4\alpha_3^2\alpha_4\Delta_3}{315\beta_3},$$

$$M_{4,6}=\frac{4\alpha_3^2\beta_4^2\Delta_3}{315\alpha_4\beta_3}.$$

$$N_{1,1}=\frac{2\Delta_0}{63},$$

$$N_{1,2}=\frac{\Delta_0}{7},$$

$$N_{1,3}=\frac{3\Delta_0}{35},$$

$$N_{1,4}=\frac{4\Delta_0}{315}-\frac{8\Delta_0}{315\alpha_1},$$

$$N_{2,1}=\frac{\Delta_0}{42}+\frac{2\alpha_1\Delta_0}{315},$$

$$N_{2,2}=\frac{9\Delta_0}{70}+\frac{3\alpha_1\Delta_0}{70},$$

$$N_{2,3}=\frac{9\Delta_0}{70}+\frac{\alpha_1\Delta_0}{14},$$

$$N_{2,4}=-\frac{\Delta_0}{126}-\frac{\Delta_0}{21\alpha_1}+\frac{\alpha_1\Delta_0}{63}+\frac{2\alpha_1^2\Delta_1}{63\beta_1^2}-\frac{\alpha_1^2\Delta_1}{63\beta_1},$$

$$N_{2,5}=-\frac{\alpha_1^2\Delta_1}{14\beta_1},$$

$$N_{2,6}=-\frac{3\alpha_1^2\Delta_1}{70\beta_1},$$

$$N_{2,7}=-\frac{2\alpha_1^2\Delta_1}{315\beta_1}+\frac{4\alpha_1^2\Delta_1}{315\alpha_2\beta_1},$$

$$N_{3,1}=-\frac{2\beta_1^2\Delta_0}{315\alpha_1},$$

$$N_{3,2}=-\frac{3\beta_1^2\Delta_0}{70\alpha_1},$$

$$N_{3,3}=-\frac{\beta_1^2\Delta_0}{14\alpha_1},$$

$$N_{3,4}=\frac{2\beta_1^2\Delta_0}{63\alpha_1^2}-\frac{\beta_1^2\Delta_0}{63\alpha_1}-\frac{\Delta_1}{126}+\frac{2\alpha_2\Delta_1}{315}-\frac{\Delta_1}{21\beta_1}-\frac{4\alpha_2\Delta_1}{315\beta_1}+\frac{\beta_1\Delta_1}{63},$$

$$N_{3,5}=\frac{9\Delta_1}{70}+\frac{3\alpha_2\Delta_1}{70}+\frac{\beta_1\Delta_1}{14},$$

$$N_{3,6}=\frac{9\Delta_1}{70}+\frac{\alpha_2\Delta_1}{14}+\frac{3\beta_1\Delta_1}{70},$$

$$N_{3,7}=-\frac{\Delta_1}{126}-\frac{\Delta_1}{21\alpha_2}+\frac{\alpha_2\Delta_1}{63}+\frac{2\beta_1\Delta_1}{315}-\frac{4\beta_1\Delta_1}{315\alpha_2}$$

$$+\frac{2\alpha_2^2\Delta_2}{63\beta_2^2}-\frac{\alpha_2^2\Delta_2}{63\beta_2},$$

$$N_{3,8}=-\frac{\alpha_2^2\Delta_2}{14\beta_2},$$

$$N_{3,9}=-\frac{3\alpha_2^2\Delta_2}{70\beta_2},$$

$$N_{3,10}=-\frac{2\alpha_2^2\Delta_2}{315\beta_2}+\frac{4\alpha_2^2\Delta_2}{315\alpha_3\beta_2},$$

$$N_{4,4}=-\frac{2\beta_2^2\Delta_1}{315\alpha_2}+\frac{4\beta_2^2\Delta_1}{315\alpha_2\beta_1},$$

$$N_{4,5}=-\frac{3\beta_2^2\Delta_1}{70\alpha_2},$$

$$N_{4,6}=-\frac{\beta_2^2\Delta_1}{14\alpha_2},$$

$$N_{4,7}=\frac{2\beta_2^2\Delta_1}{63\alpha_2^2}-\frac{\beta_2^2\Delta_1}{63\alpha_2}-\frac{\Delta_2}{126}+\frac{2\alpha_3\Delta_2}{315}-\frac{\Delta_2}{21\beta_2}$$
$$-\frac{4\alpha_3\Delta_2}{315\beta_2}+\frac{\beta_2\Delta_2}{63},$$

$$N_{4,8}=\frac{9\Delta_2}{70}+\frac{3\alpha_3\Delta_2}{70}+\frac{\beta_2\Delta_2}{14},$$

$$N_{4,9}=\frac{9\Delta_2}{70}+\frac{\alpha_3\Delta_2}{14}+\frac{3\beta_2\Delta_2}{70},$$

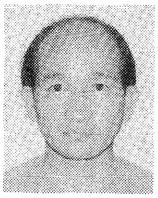
$$N_{4,10}=-\frac{\Delta_2}{126}-\frac{\Delta_2}{21\alpha_3}+\frac{\alpha_3\Delta_2}{63}+\frac{2\beta_2\Delta_2}{315}-\frac{4\beta_2\Delta_2}{315\alpha_3}$$
$$+\frac{2\alpha_3^2\Delta_3}{63\beta_3^2}-\frac{\alpha_3^2\Delta_3}{63\beta_3},$$

$$N_{4,11}=-\frac{\alpha_3^2\Delta_3}{14\beta_3},$$

$$N_{4,12}=-\frac{3\alpha_3^2\Delta_3}{70\beta_3},$$

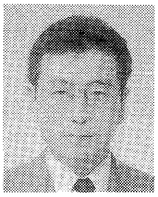
$$N_{4,13}=-\frac{2\alpha_3^2\Delta_3}{315\beta_3}+\frac{4\alpha_3^2\Delta_3}{315\alpha_4\beta_3}.$$

（平成６年８月29日受付）
（平成６年11月17日採録）



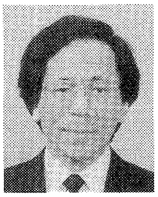
黒田　満（正会員）

昭和18年生．昭和40年岐阜大学工学部卒業．同年同大学工学部助手．昭和56年豊田工業大学制御情報工学科講師，現在助教授．曲線・曲面理論，コンピュータ・グラフィックスの研究に従事．工学博士．精密工学会，日本図学会，ACM などの各会員．



古川　進（正会員）

昭和19年生．昭和43年山梨大学大学院修士課程修了．同年山梨大学工学部助手．講師を経て昭和63年より同助教授．CAD/CAM システム，立体の特徴抽出，曲線・曲面理論などの研究に従事．物流やロボットにも興味を持っている．工学博士．精密工学会，日本機械学会，設計工学会などの各会員．



木村　文彦（正会員）

昭和20年生．昭和49年東京大学大学院博士課程修了．同年電子技術総合研究所パターン情報部入所．昭和54年より東京大学工学部精密機械工学科助教授．昭和62年より同教授．マン・マシン・システム，コンピュータ・グラフィックス，形状モデリング，CAD/CAM などの研究に従事．工学博士．IFIP-WG 5.2-5.3 委員．精密工学会，日本機械学会などの各会員．