クリプキ･モデルに基づく音楽のコード表現と生成に関する基礎的考察

村井 哲也 1) 生方 誠希 2) 工藤 康生 3) 赤間 世紀 4)
北海道大学 1) 北海道大学 2) 室蘭工業大学 3) 筑波大学 4)

1. まえがき

クリプキ･モデルは可能世界の非空集合，その上の２項関係(到達可能関係)，原子命題の各世界における真偽を与える付値関数から構成され，様相論理や直観主義論理など非古典論理に対するいわゆる可能世界意味論を提供する．このモデルは自然に多重集合を表現し，特別な場合として通常の(部分)集合を含み，世界の集合として自然数全体を取れば，自然に順序関係が２項関係として設定され，直観主義論理やある種の時相論理のモデルとなるが，これが列を表現している(cf.[6])．

近年，計算論的音楽理論が発展している(cf.[5])．本稿ではクリプキ･モデルが表現する列を音楽のコード進行とみなし．様相論理の必然性・可能性(対応する位相構造では，開核・閉包，ラフ集合では，下近似・上近似)による粒状計算を導入したコード進行の表現と生成に関する基礎的考察を行う．

2. 準備

本学会別稿[6]の内容を要約する．記号の集合をPとする．カルナップ･モデルとは組$\langle W, v\rangle$である．ここで，Wは非空集合，vは次の写像$v:P\times W\to 2$ (ただし，$2=\{0, 1\}$)である．Wの要素は可能世界と呼ばれる．写像 v は様相命題論理では，各原子命題の各世界における真理値(0 or 1)を与える．カルナップ･モデルはクリプキらが拡張し，W上の2項関係R ($\subseteq W\times W$)を追加した組$\langle W, R, v\rangle$を一般にクリプキ･モデルと呼び，Wの任意の部分集合$X(\subseteq W)$に対する様相演算子，すなわち，必然･可能の演算子がそれぞれ，

$$[R]X=\{w\in W \mid W_w\subseteq X\},$$
$$\langle R\rangle X=\{w\in W \mid W_w\cap X\neq\emptyset\}$$

によって定義される．ここで，$W_w=\{w'\in W \mid wRw'\}$である．これらは位相空間[8]ではそれぞれ，X の開核･閉包，ラフ集合論[4,7]ではそれぞれ，(一般化)下近似･(一般化)上近似と呼ばれる．

記号集合Pに対し．カルナップ･モデル$M=\langle W, v\rangle$は2^P上の多重集合と同等である．実際，写像vから，$\varphi_M(w)=\{p\in P \mid v(p, w)=1\}$によって，$2^P$上の多重集合($2^P$上のW-族)$\varphi_M: W\to 2^P$を構成できる．カルナップ･モデル$M=\langle W, v\rangle$が与えられた時，任意の部分集合$X(\subseteq W)$に対して，$M_X=\langle X, v_X\rangle$を M の部分カルナップ･モデルと呼ぶ．これから導かれる2^P上の多重集合(2^P上の X-族) $\varphi_{MX}:X\to 2^P$は明らかに，φ_Mの部分多重集合である．

直観主義論理や時相論理では，2項関係を順序関係とするクリプキ･モデルで意味論を与えることができる．例えば，可能世界の集合として時点を表す自然数の集合$\mathbb{N}$を取れば，自然に全順序関係$\leq$を伴い，$\mathbb{N}$-族は無限列と同等である．よって，クリプキ･モデル$\langle\mathbb{N}, \leq, v\rangle$は 2^P 上の列を表現する．後者の場合は論理式の集合列である．

インデックス集合 W 上に2項関係 $R(\subseteq W\times W)$が与えられたクリプキ･モデル$\langle W, R, v\rangle$において，部分多重集合の様相演算子を定義する．集合 A 上の W-族φとWの非空部分集合$X(\subseteq W)$ に対して，部分多重集合 $\varphi|_X:X\to 2^P$ を考える．この時，クリプキ･モデル

A Formulation of Chord Progression as Sequences in Kripke models for non-classical logics
1) Tetsuya MURAI, Hokkaido University
2) Seiki UBUKATA, Hokkaido University
3) Yasuo KUDO, Muroran Institute of Technology
4) Seiki AKAMA, The University of Tsukuba

では，X から2つの部分集合[R]X と⟨R⟩X が定義され，それぞれから部分多重集合が生成される：

$$[R]\varphi_X = \varphi_{[R]X},$$

$$\langle R\rangle\varphi_X = \varphi_{\langle R\rangle X}.$$

この定義は列にも適用できる．

3. コード列の表現

記号の集合 P をコード名の集合とし，時点を表す自然数の集合ℕを可能世界集合とするクリプキ・モデル⟨ℕ, ≤, v⟩を考える．ここで，v : P×ℕ→2 である．例えば，コード進行が「CFGC」であれば，

v	C	Dm	Em	F	G	Am	Bm	…
0	1	0	0	0	0	0	0	
1	0	0	0	1	0	0	0	
2	0	0	0	0	1	0	0	
3	1	0	0	0	0	0	0	
:								

様相演算子は世界集合ℕとコード名の集合 P のそれぞれ両者に導入できる．

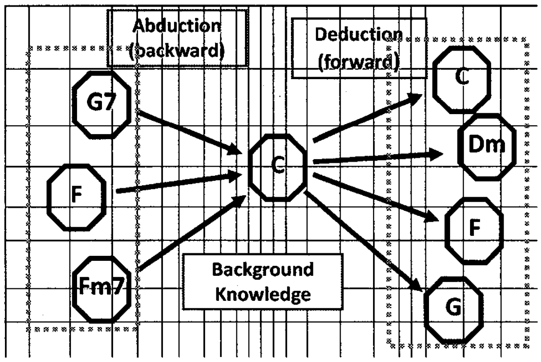
世界集合ℕはいくつかのコード名の単位に分割できる．上例で各コード名に同じ拍が割り当てられているとし，例えば，簡単のため，コード名4個で一つの構造を作るとすると，ℕは同値類に分割される．その結果，高次のモデル(商モデル)を構成できる：

v	C	Dm	Em	F	G	Am	Bm	…
[0]	1	0	0	1	1	0	0	
[4]	1	1	0	0	1	0	0	
:								

これは GTTM(cf[5])における簡約化に対応すると考えられる．数学的には同値類の代表元は自由に選択できるが，簡約化としては，その結果で裸ベリングするのが妥当である．

一方，代理コードなどの存在から，コード名の集合 P にも様相の構造を入れることができる．例えば，カデンツ CFGC に対して，F の代わりに Dm を使える，などである．しかし，CFC の場合は代理として使えないという規則があるので，代理の関係はその時点以前の文脈に依存して決まる相対的様相になると考えられ，文脈を与えるものは背景知識とみなすことができる．

音楽の流れは，音楽の性格に対応する P の部分集合に対して，ある時点毎にそれらの文脈で形成される様相の下で得られるラフ集合の用語では上または下近似から，次の時点のコード名を選ぶことで生成する意思決定過程として定式化できる可能性がある．



謝辞. 本研究の一部は日本学術振興会科学研究費基盤研究(B) No.19300074 および挑戦的萌芽研究 No. 19650046 の援助を得た．ここに謝意を表する．

文献

[1] R.A.Bull and K.Segerberg (2001), Basic Modal Logic. In D.M. Gabbay and F. Guenthner (eds.), Handbook of Philosophical Logic: Vol.3 (2nd ed.), Springer, pp.1-82.

[2] B.F.Chellas (1980), Modal Logic: an Introduction. Cambridge University Press.

[3] W.K.Grassmann and J.-P. Tremblay (1996), Logic and Discrete Mathematics: A Computer Science Perspective. Prentice-hall.

[4] S.Miyamoto (2004), Generalizations of Multisets and Rough Approximations, International Journal of Intelligent Systems, Vol.19, pp.639-652.

[5] 平田圭二，東条敏，浜中雅敏，平賀譲 (2008): 道しるべ: 計算の視点から音楽の構造を眺めてみると(連載). 情報処理 Vol.49, No.7--11.

[6] 村井哲也，宮本定明，生方誠希，工藤康生，赤間世紀 (2010)，非古典論理のクリプキ・モデルにおける列・多重集合・集合の表現と粒状性の定式化．情報処理学会創立50周年記念全国大会(第72回全国大会) 講演論文集CD-ROM: 6D-45.

[7] Z.Pawlak (1991), Rough Sets: Theoretical Aspects of Reasoning about Data, Kluwer Academic Publishers.

[8] W.Sierpinski (1956), General Topology, University of Toronto Press.